



“十二五”国家重点图书出版规划项目

连杆机构弹性振动 理论研究

Lianganjigou Tanxingzhendong Lilunyanjiu

»»» 蔡敢为 李兆军 王汝贵 著



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>



“十二五”国家重点图书出版规划项目

连杆机构弹性振动理论研究

蔡敢为 李兆军 王汝贵 著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

连杆机构弹性振动理论研究/蔡敢为 李兆军 王汝贵 著.—武汉:华中科技大学出版社, 2012.2

ISBN 978-7-5609-7827-7

I. 连… II. ①蔡… ②李… ③王… III. 连杆机构-弹性振动-理论研究 IV. TH112.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 055439 号

连杆机构弹性振动理论研究

蔡敢为 李兆军 王汝贵 著

策划编辑:万亚军

责任编辑:姚同梅

封面设计:范翠璇

责任校对:朱霞

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录排:华中科技大学惠友文印中心

印刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16

印张:10.25 插页:1

字数:215千字

版次:2012年2月第1版第1次印刷

定价:38.00元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

内 容 介 绍

弹性连杆机构的振动对其工作精度、疲劳寿命等都有重要影响。随着连杆机构向高精度、高速度、小质量、高负荷方向发展,其弹性振动的特性也就愈显重要。本书主要介绍作者在连杆机构弹性振动方面的研究工作,涉及含复合材料构件的机构振动和在机电耦合作用下的机构非线性振动两个方面内容。

纤维复合材料的刚重比、强重比和阻尼减振特性都显著高于传统金属材料,在连杆机构中采用纤维复合材料构件是抑制其弹性振动的一条有效措施。但纤维复合材料是各向异性材料,其弹性常数等有别于金属材料,其构件的刚度与阻尼特性也不同于金属材料构件。含复合材料构件的连杆机构的振动方程及其相应计算等都与金属材料构件的连杆机构有很大区别。本书介绍了如何建立含叠层复合材料构件、三维编织复合材料构件的连杆机构的振动方程,以及复合材料的细观力学参数与连杆机构宏观动态性能之间的关系等内容。

连杆机构的运行与研究表明,电动机的电磁参数对机构的动态性能有重要影响,如:驱动电动机的电磁谐波有时会引起连杆机构产生强烈振动;系统的临界转速会随电动机的运行参数变化而变化;在一定条件下,系统将出现参数共振与强迫振动相耦合的振动;等等。因此,把驱动电动机与连杆机构集成研究是有必要的。本书介绍了如何建立反映驱动电动机机电耦合关系的有限元单元及通过此种单元建立电动机-连杆机构系统的有限元动态分析方程,并讨论了此类系统在各种激励作用下的非线性振动特点、运动稳定性等。

本书分为五章。第1章为绪论。第2章介绍由连杆机构与驱动电动机组成的系统的弹性振动方程。连杆机构包括金属材料构件的连杆机构、含对称叠层复合材料构件的连杆机构、含三维编织纤维复合材料构件的连杆机构。电动机包括三相交流电动机、直流电动机、伺服电动机。系统包括电动机-四杆机构系统和电动机-两自由度五杆机构系统。第3章分析电动机-连杆机构系统的非线性振动,包括系统的自激惯性力、系统的参激振动机理、参激振动的耦合、非线性共振分析。第4章为系统的运动稳定性分析,包括主共振的运动稳定性、次谐共振的运动稳定性、超谐共振的运动稳定性、组合共振的运动稳定性、多重共振的运动稳定性分析等。第5章介绍机构弹性振动响应的仿真计算,包括迭代式模态叠加多尺度法的求解过程、多尺度-Newmark法的求解过程和实例分析。

本书既可作为科研与工程技术人员的参考书,也可作为相关专业研究生的教材。

序

随着机器的运行速度不断提高,载荷逐步加大,机器运行中其弹性构件的振动对其运动精度、疲劳寿命等的影响越来越显著。对机器弹性构件振动特性的深入研究,是机器设计的重要内容,对提高机器动态性能具有重要的作用。

蔡敢为教授及其团队十多年来对连杆机构的弹性振动性能进行了深入系统的研究,特别是对含复合材料构件的连杆机构振动特性、考虑驱动电动机与连杆机构的机电耦合作用的连杆机构系统的动态特性等开展了很有成效的研究工作。

采用复合材料替代金属来制造连杆机构的构件,是保证机构在高速下的运动精度和抑制其有害振动的一种有效措施。复合材料的比强度、比刚度大,阻尼特性等也明显优于金属材料,有利于改善机构的振动特性。特别是三维编织复合材料,因为其三维编织的纤维结构克服了叠层复合材料层间强度过低的缺陷,整体性能很好,有广泛的应用前景,也适合用于连杆机构、机器人机构等。但至今未见系统介绍含复合材料构件的机构动力学分析与动态设计方面的专著,本书则填补了这一空白。本书详细地介绍了含叠层复合材料构件、三维编织复合材料构件的连杆机构的弹性振动的建模方法,并全面地分析了其动态特性,对相关的教学与科研人员来说有很大的参考价值。

机电系统的运行与有关研究表明,电动机的电磁参数对机构的动态性能有重要影响。将电动机和弹性连杆机构作为一个系统的动态特性分析,称为“完全动力分析”。此前这方面的研究工作做得非常简单,甚至还没有建立包含电动机和机构的系统分析模型,更未见深入系统介绍这方面研究的专著。建立具有不同领域的物理量的系统动态方程不是一件容易的事情。本书创造性地提出了反映机电耦合关系的有限元电动机单元,然后应用此有限元法建立了包含系统机械参数和电磁参数的解析形式的振动方程。在此基础上,对系统在电动机转子振动偏心时不均匀气隙的气隙磁场导致的电磁参数激励、系统自激惯性力产生的激励等共同作用下的振动特性展开了全面、系统的研究,在系统各种非线性共振及其稳定性等方面获得许多深刻认识,并总结出一些规律,这些研究成果对电动机-连杆机构系统的设计有很高的参考价值,甚至对其他机电系统的机电耦合特性研究,也有较高的参考价值。

至今,在连杆机构弹性振动研究中,“运动弹性动力学”(kineto-elastodynamics, KED)仍然是最主要的和被广泛采用的分析方法。本书较好地充实了KED的内容,对其发展有积极推动作用。我很乐意为本书作序,我相信本书的出版必将对连杆机构的进一步发展和应用有所促进!

中国科学院院士



2011. 11. 18.

前 言

当连杆机构中一个及一个以上构件为弹性件时,该连杆机构称为弹性连杆机构。连杆机构中弹性构件的振动可简称为连杆机构弹性振动。弹性构件的振动对连杆机构工作精度、疲劳寿命等都有重要影响。在科学技术的发展、市场竞争的刺激以及人们不断追求完美等因素的作用下,连杆机构向高精度、高速度、小质量、高负荷方面不断发展,而其振动性能也愈发得到重视。本书主要介绍含新型纤维复合材料构件的连杆机构的振动性能、连杆机构在机电耦合作用下的非线性振动性能两个方面的内容。

机械学的发展与新材料的发明和应用有着紧密的联系,研究新材料在机械中的应用是当今机械学的一个重要内容。在机械系统中应用强重比和阻尼特性显著优于传统金属材料的先进复合材料是改善其弹性动力学性能的一条有效途径,是使机械产品在运转速度、质量、能量消耗和动态精度等方面的市场竞争能力产生本质飞跃的有力手段。新型的三维编织纤维增强复合材料克服了二维层合板复合材料层间刚度、强度过低的缺陷,显著地提高了材料的整体强度,且具有良好的阻尼性能,是作为高速连杆机构中构件的理想材料。

1993 年秋天至 1998 年春天,我在华中科技大学完成博士学位论文期间,在导师廖道训教授指导下完成了他主持的国家自然科学基金项目——具有三维纤维复合材料构件的机构动力学研究(项目编号:59475029)。我们提出了三维正交复合材料弹性常数、三维编织纤维复合材料杆件的刚度和阻尼等的计算公式;对含三维编织复合材料构件的连杆机构的振动方程进行了详细研究,将三维整体编织的复合材料视为多个单向纤维复合材料的叠加,由三维应变转换矩阵得到应变分布与结点位移间的关系,从而导出有限元单元刚度矩阵;分析了各向异性材料构件在不同振型中具有不同阻尼的原因,即不同应变所耗散的能量不同,而在不同的振型中各种应变所占比重不同,应变的不同组合就使得构件在不同的振型中具有不同阻尼,据此,由振动时各单向纤维复合材料的 6 个应变耗散能量集合组成单元的能量耗散,从而得到了各比阻尼容量的计算式,通过复合材料的阻尼单元模型及耗散能量表达式导出了机构的阻尼矩阵,在此基础上建立了含三维编织复合材料杆件的连杆机构的振动方程,并详细分析了这类连杆机构的振动性能与材料参数等之间的内在关系。

1998 年秋至 2000 年底,我在中南大学钟掘院士指导下做博士后研究,完成了中国博士后科学基金项目——具有复合材料构件的机构动态设计理论,对含复合材料构件的连杆机构弹性振动做了进一步的研究。但在此期间,我的主要精力放在参与完成钟院士主持的国家自然科学基金重点项目——复杂机电系统耦合与解耦设计理



论与方法(项目编号:59835170)上,主要担任系统的全局耦合模型和机电耦合关系等的研究工作。虽然该项目是结合轧钢机等冶金机械展开的,但建立具有不同物理量的系统全局耦合动态分析模型的工作,特别是关于机电耦合关系的研究,引起了本研究驱动电动机机电耦合关系对连杆机构非线性振动特性的影响的兴趣。

高速机构在运行中时常表现出一些人们未曾料及的现象,甚至出现严重的故障,如:驱动电动机的电磁谐波有时会引起高速轻型机构产生强烈振动;系统的临界转速会随电动机的运行参数变化而变化;在一定条件下,系统会出现参数共振与强迫振动相耦合的振动,等等。2001年初,我博士后出站后回到华中科技大学工作,于2001年申报了国家自然科学基金项目——含复合材料构件的机构系统耦合动力学研究(项目编号:50175031)并获批准。2003年我调到广西大学工作,又申请并获得了有关多自由度可控连杆机构系统的耦合动力学研究的教育部科技重点项目和广西自然科学基金项目。李兆军博士、王汝贵博士在攻读博士学位期间参与了我主持的这几个项目,是这几个项目主要的完成人。硕士生王文龙、戴文正、张晓斌、王湘、常平平、潘德永、余振延等也完成了许多工作。在这些项目中,我和研究团队对含复合材料的连杆机构振动问题做了进一步研究,包括针对过去 Tompson 教授等人所建立振动方程的不足,根据复合材料细观力学等理论重新推导并建立了含叠层复合材料构件的连杆机构的振动方程,我们所建立的机构振动方程反映了叠层复合材料各部分性能参数与机构宏观动态性能的关系,其中机构阻尼反映了叠层复合材料各部分能量耗散特性。这些项目的研究重点是驱动电动机机电耦合作用对连杆机构振动特性的影响。我们以驱动电动机-连杆机构系统为研究对象,对这类系统的运动稳定性、准静态响应、临界转速等进行了系统研究。针对驱动电动机转子振动偏心时不均匀气隙的气隙磁场,分析其实际运行状态的机电耦合关系,并建立了以电动机转子横振、扭振为节点位移的电动机有限元单元;应用有限单元法建立了含驱动电动机电磁参数、复合材料参数和机构的结构参数的系统非线性耦合动力学模型;分析了系统存在电磁参数振动和强迫振动的机理,研究了系统在电磁参数激励和外激励同时作用下的内共振、主共振、组合共振、次谐共振、超谐共振及多重共振响应及其运动稳定性等非线性振动特性,系统的共振响应、运动稳定性及临界转速与系统的结构参数、复合材料参数、电磁参数之间的内在关系;等等。在研究中,采用了以构件的振动响应为目标函数,以复合材料的纤维结构参数、电磁参数及复合材料构件截面的几何尺寸为设计变量的优化设计方法。

我们前期针对连杆机构振动特性的研究成果也对我们后来对其他机电系统振动特性的研究起到了较好的参考作用。如我们所完成的反映机电耦合关系的电动机有限元单元、系统的有限元动态分析模型、机电系统的非线性振动分析等研究成果,对我后来申报并获批的国家自然科学基金项目“混流式水轮发电机组全局耦合动态性能研究”(项目编号:50565501)的研究工作就起到了较好的借鉴作用。

然而,从国内外的研究情况看,含复合材料构件的连杆机构振动性能、连杆机构

在机电耦合作用下的振动性能等研究内容还没有得到学术界的足够重视,这些方面的研究对提高连杆机构动态性能的巨大潜力也还没有充分发挥出来。考虑至今尚未见到介绍这方面内容的学术专著,本着抛砖引玉的愿望,我们将这些年关于弹性连杆机构振动理论的研究成果组织起来形成本书,希望本书对相关科研工作及研究生培养起到一定参考作用。也希望本书能够引起更多的研究者关注并参与研究应用复合材料的连杆机构的振动性能和机电耦合作用对连杆机构振动特性的影响。更希望今后这方面的研究成果能够在工程实际中得到广泛采用,促使工程中的连杆机构的动态性能得到显著提高。

华中科技大学出版社王连弟副社长及万亚军编辑、刘锦编辑等对本书的出版给予了大力支持,并帮助我们成功申报了“‘十二五’国家重点图书出版规划项目”(已入选),在此对他们表示衷心的感谢。

考虑学术专著的特色,希望本书主要反映我们在连杆机构弹性振动方面的研究成果,已尽量少引用其他文献。但还是因为知识的连贯性和读者的需要等原因,不得不引用一些文献,最为突出的表现在本书的第2章第2节关于金属材料杆件的有限元单元模型的介绍中。另外,从本书结构考虑,又没有将我们近年来在连杆机构弹性振动方面的一些研究成果写入本书,如有关三向正交纤维复合材料的弹性常数、三维正交纤维复合材料弹性性能细观力学分析、三维编织复合材料杆件的刚度与阻尼等内容,都是含复合材料构件的机构弹性振动的重要研究内容,但从章节编排等方面考虑,没有纳入本书正文部分,而是作为本书的参考文献提供给需要的读者。

我在完成博士学位论文期间和博士后研究工作中分别得到廖道训教授和钟掘院士的悉心指导,他们的学术思想和研究艺术对我日后的科研工作具有深远影响。在本书完成之际,谨向两位尊敬的导师表示衷心感谢。

本人及团队的研究工作还得到赵淳生院士的亲切关怀和指教、帮助,赵院士还在百忙之中抽时间为本书作序,在此谨对尊敬的赵院士表示衷心感谢。

本书的内容反映了本人及所指导的研究生近期在机构动力学方面的研究成果,这些成果是在两个国家自然科学基金(项目编号:59475029,50175031)及中国博士后科学基金、湖南省自然科学基金、教育部科技重点项目基金和广西自然科学基金等的资助下取得的,在此谨向国家自然科学基金委员会和其他资助部门表示衷心的感谢。

在完成本书涉及的一系列科研项目的过程中,我们参考了大量国内外文献,在此对这些文献的作者表示衷心的感谢。

本人指导的多位博士研究生和硕士研究生为本书的研究工作作出了重要贡献,在此也要衷心地感谢他们。

由于学力浅薄、治学不精,我们对连杆机构弹性振动的研究还很不完善,尤其对多自由度连杆机构的振动研究更需进一步深入。另外,本人在1998年到中南大学做博士后研究工作后,主要精力转入了冶金机械的动态性能研究,2003年调入广西大



学工作后又转入水轮发电机组的动态性能研究,此后又相继研究工程机械、工业机器人、变胞机构、振动时效技术等,因此这些年未能持续地把精力集中于连杆机构的弹性振动研究上,对该领域的国内外研究动态也难以很好地掌握,所以书中疏漏、不妥甚至是错误之处在所难免,恳请读者不吝赐教。

蔡敢为

2011年11月

目 录

第1章 绪论	(1)
1.1 弹性连杆机构的研究概况	(1)
1.2 弹性连杆机构非线性振动的研究概况	(2)
1.3 含复合材料构件的弹性连杆机构的振动研究进展	(3)
1.4 弹性连杆机构在机电耦合作用下的非线性振动性能研究进展	(4)
第2章 连杆机构的振动方程	(7)
2.1 电动机单元	(8)
2.1.1 三相交流电动机单元	(8)
2.1.2 伺服电动机单元	(13)
2.1.3 直流电动机单元	(18)
2.1.4 电动机单元的运动微分方程	(20)
2.2 金属材料梁单元	(20)
2.2.1 位移模式	(20)
2.2.2 梁单元动能	(21)
2.2.3 梁单元势能	(22)
2.2.4 梁单元的运动微分方程	(22)
2.3 三维编织复合材料梁单元	(23)
2.3.1 单元位移模式	(23)
2.3.2 单元动能	(24)
2.3.3 单元势能	(25)
2.3.4 单元阻尼模型	(27)
2.3.5 梁单元的运动微分方程	(28)
2.4 对称叠层复合材料梁单元	(29)
2.4.1 位移模式	(29)
2.4.2 单元动能	(30)
2.4.3 单元势能	(30)
2.4.4 单元阻尼模型	(33)
2.4.5 梁单元的运动微分方程	(34)
2.5 连杆机构振动方程	(35)
2.5.1 弹性四连杆机构的振动方程	(35)
2.5.2 电动机-弹性四连杆机构系统振动方程	(42)



2.5.3 混合驱动五杆机构系统动力学模型	(45)
第3章 连杆机构系统非线性振动分析	(50)
3.1 系统的自激惯性力分析	(50)
3.1.1 连杆机构运动分析	(50)
3.1.2 连杆机构系统的刚体加速度	(54)
3.1.3 系统的自激惯性力	(57)
3.2 系统的参激振动机理	(61)
3.2.1 四连杆机构系统的参激振动机理	(61)
3.2.2 五连杆机构系统的参激振动机理	(62)
3.3 参激振动的耦合研究	(63)
3.3.1 四连杆机构系统参激振动的耦合	(63)
3.3.2 五连杆机构系统参激振动的耦合	(67)
3.4 共振分析	(69)
3.4.1 电动机-四连杆机构系统共振分析	(69)
3.4.2 混合驱动五杆机构系统共振分析	(85)
第4章 连杆机构的运动稳定性	(105)
4.1 主共振的运动稳定性分析	(105)
4.1.1 电动机-四连杆机构主共振的运动稳定性分析	(105)
4.1.2 混合驱动五连杆机构主共振的运动稳定性分析	(106)
4.2 次谐共振的运动稳定性分析	(107)
4.2.1 电动机-四连杆机构次谐共振的运动稳定性分析	(107)
4.2.2 混合驱动五连杆机构次谐共振的运动稳定性分析	(108)
4.3 超谐共振的运动稳定性分析	(110)
4.3.1 电动机-四连杆机构超谐共振的运动稳定性分析	(110)
4.3.2 混合驱动五连杆机构超谐共振的运动稳定性分析	(111)
4.4 组合共振的运动稳定性分析	(112)
4.4.1 电动机-四连杆机构组合共振的运动稳定性分析	(112)
4.4.2 混合驱动五连杆机构组合共振的运动稳定性分析	(113)
4.5 多重共振的运动稳定性分析	(114)
第5章 振动响应的仿真计算	(116)
5.1 利用迭代式模态叠加多尺度法的求解过程	(116)
5.1.1 迭代式模态叠加多尺度法的定义	(116)
5.1.2 四连杆机构系统动态方程一次近似解的计算	(117)
5.1.3 四连杆机构系统稳态弹性运动精确解的计算	(117)
5.2 利用多尺度-Newmark 法的求解过程	(120)
5.2.1 多尺度-Newmark 法的定义	(120)

5.2.2	五连杆机构系统动态方程一次近似求解	(120)
5.2.3	五连杆机构系统动态方程稳态解	(120)
5.3	实例分析	(121)
5.3.1	含金属构件的四连杆系统	(121)
5.3.2	含叠层复合材料构件的弹性四杆机构系统	(124)
5.3.3	弹性五连杆机构系统响应仿真计算	(129)
参考文献	(136)

第 1 章 绪 论

1.1 弹性连杆机构的研究概况

连杆机构弹性振动是指连杆机构弹性构件的振动,也即连杆机构中一个及一个以上构件为弹性件时的振动。在很多文献中,将含弹性构件的连杆机构称为弹性连杆机构,因此也称连杆机构弹性构件的振动为弹性连杆机构的振动。弹性构件的振动会直接对连杆机构工作造成诸多不利影响。如 Erdman A. 和 Sandor G. 的文章^[1]所述,某高速印刷机的纸张抓取机构,由于弹性构件的振动,机构的真实运动与期望运动之间存在较大误差,当实际运转速度超过设计速度一半时,就无法完成抓取动作了;又如,工业机械手从一个工位转入下一个工位,准备实现下一个动作时,必须等这种弹性构件的振动(即所谓“残余振动”)衰减后才可以执行,这就使得工作效率降低^[2]。另外,弹性构件的这种振动是造成构件疲劳破坏和系统噪声的重要原因。因此,随着连杆机构向高精度、高速度、小质量、高负荷方面不断发展,对其振动性能的研究也越来越显得重要。

早在 20 世纪 30 年代,就有人研究含弹性构件的连杆机构动力学问题^[3]。但在相当长的一段时间里,人们关于弹性连杆机构振动的研究都是零碎和不系统的,一般是将机构中的一个构件考虑为弹性构件,其余视为刚性构件。直到 20 世纪 70 年代,随着有限元法的引入,弹性连杆机构的振动才开始得到全面、系统的研究。20 世纪 70 年代初,美国的 Winfrey R. 和 Erdman A. 在不同的大学以连杆机构的弹性振动研究为博士论文课题,将有限元法应用于连杆机构的弹性振动研究中,使该领域的研究得到了全面、系统的发展^[4,5]。Erdman A. 与其导师 Sandor G. 提出了“运动弹性动力学”(kineto-elastodynamics, KED)的概念^[6],其特征在于其基本假设:机构的弹性变形运动不影响机构的名义运动(即把构件视为刚体时进行分析而得到的运动)。因为连杆机构在运动中,其结构不断变化,相对于静止结构的振动,运动弹性动力学有较大区别。至今,有关连杆机构弹性振动的研究大部分都是采用 KED 的方法,只有很少人采用多柔体动力学的方法研究连杆机构的弹性振动问题。因为在一般情况下, KED 方法完全可以满足需要,只有在必须涉及弹性变形运动和刚体运动的耦合时才需要采用多柔体动力学的方法。笔者是采用 KED 方法来研究弹性连杆机构的振动的。

我国在 20 世纪 80 年代开始连杆机构的弹性振动研究,张策、廖道训、张宪民、王玉新、邹慧君、王生泽、余跃庆、刘宏昭、于德介^[7-14]等一大批学者陆续对连杆机构的



弹性振动进行了研究,并取得了丰硕的成果,达到了国际先进水平。20世纪90年代以后,继续弹性连杆机构动力学研究的主要力量来自中国(包括台湾地区)^[15]。张策教授等人所著《弹性连杆机构的分析与设计》^[16]一书对我国关于弹性连杆机构振动研究起到了很好的推动作用。

从20世纪70年代初起,弹性连杆机构研究逐步成为机构学研究领域的一个重要分支。目前,国内外关于弹性连杆机构的研究主要就分析、综合、控制、平衡、间隙等方面展开。在弹性动力分析方面比较有代表性的理论有:时间单元的概念^[17],即将连杆机构运动周期划分为一系列时间单元,机构在时间单元内为定常系统;“准静态分析”的概念^[18];等等。在弹性动力综合方面比较有代表性的理论有 Imam I. 等人的非线性规划方法^[19]、张策等人提出的运动改善法等^[20]。在机构稳定性研究方面有代表性的工作有:Stamps F. R. 和 Bagci C. 发现“机构的低阶谐振现象”^[21];王玉新对弹性连杆机构谐振现象展开的系列研究工作^[22]。在连杆机构弹性振动的抑制方面,主要采用复合材料构件和主动抑制两种策略。在应用复合材料构件减轻连杆机构弹性振动方面,Thompson B. S. 在20世纪80年代的工作最具影响力^[23];在通过振动控制抑制连杆机构弹性振动方面,宋震国和张宪民的工作影响较大^[24,25];在考虑间隙的连杆机构动力学研究方面,Dubowsky S. 和 Freudenstein F. 的工作开展最早^[26],而 Earles S. 长达二十余年的研究工作也是很有影响力的^[27]。

1.2 弹性连杆机构非线性振动的研究概况

在弹性连杆机构动态特性的研究中,所考虑的非线性因素主要有两类:一是运动副的间隙,二是构件的大变形。

为了保证运动副元素之间的相对运动,运动副必然有间隙,而随着机械运转而发生的磨损又会使间隙增大。运动副间隙对连杆机构动态特性的影响是不容忽略的。随着弹性连杆机构动力学模型继续趋向精细化,计及运动副间隙因素的非线性系统动力学建模理论逐渐发展起来。Soong K. 和 Thompson B. S. 认为,在一个运动周期内连杆机构运动副元素之间的相对关系为接触、分离和碰撞,并建立了相应的模型,这种模型比较客观地反映了实际的物理过程,但建模和计算均十分复杂^[28]。Funabashi H. 等人认为连杆机构运动副元素之间只存在接触和自由两种状态,并建立了相应的模型^[29],这种模型应用较广泛。Furuhashi T. 等人鉴于连杆机构运动副之间的分离和碰撞过程都非常短,将运动副间隙视为一个无质量的刚性杆,并建立了相应的模型^[30],这种模型的特点是建模和计算都相对简单,但与实际情况相差较大。常宗瑜、黄铁球等人^[31,32]研究了带间隙的空间机构的动力学问题,对由间隙引起的结构非线性特性进行了分析,同时文荣等人^[33]还以理论计算和实验研究为基础,从结构的固有频率、动力学响应、结构碰撞振荡等方面出发验证了实际空间结构由铰间间隙引起的非线性动力学特性。

随着机械运转速度的提高,构件弹性变形也会变得不可忽略。文荣等人^[34]通过研究静止状态机构受单频激励作用的动力学响应,揭示了弹性机构的非线性振动特性,表明机构弹性件的大变形是导致其产生非线性振动的关键因素。在此基础上,他们还建立了考虑构件大变形引起的材料几何非线性的弹性连杆机构动力学模型。Hsieh S. R. 与 Shaw S. W. 等人^[35,36]采用多尺度法对带柔性连杆的四连杆机构的动力学稳定性及非线性共振问题进行了分析,着重研究了系统的主参数激振、主共振及超谐共振问题。王玉新^[37]也通过应用多尺度法研究了连杆机构由大变形引起的非线性响应,对连杆机构的主共振、分数共振、组合共振和内共振等进行了详细的研究,其研究显示利用多尺度法不仅可以更深入地解释一些利用线性系统理论无法很好解释的物理现象,还可以更深入地认识连杆机构的动力学本质。赫淑英等人^[38]根据梁的弹性理论,基于拉格朗日方程导出梁的振动方程,研究了系统低频率振动造成火箭连接结构松动及相对滑动引起的干摩擦阻尼、线性刚度及非线性刚度变化对系统动力学特性的影响。Du H. 等人^[39,40]分别应用有限元法对三维弹性连杆机构和柔性臂进行了动力学研究,分析了杆件大弹性变形引起的几何非线性对机构动态特性的影响。张宪民等人^[41,42]应用有限元法及虚位移原理建立了计入几何非线性时弹性连杆机构一般形式的时变非线性动力学方程,并将结构非线性问题的模态叠加方法的思想引入机构非线性运动方程组的求解中,取得了较好的效果。

1.3 含复合材料构件的弹性连杆机构的振动研究进展

采用复合材料构件是抑制连杆机构弹性构件振动、改善其动态性能的一项重要措施。早在20世纪80年代,Thompson B. S.^[23]、Sung C. K.^[43]、廖道训^[2]等人就相继研究了采用叠层复合材料(也称层合板复合材料)构件的连杆机构的振动问题,并取得了一系列的研究成果。但他们的工作不够细致完善,基本上没有引入复合材料力学理论研究这种新材料机构的动态性能,只是简单地用该各向异性复合材料的宏观平均综合性能套用各向同性的金属材料的有限元计算公式,而没有考虑复合材料的各向异性和组分材料特性。如在应用有限元法建立机构动态分析方程时,他们没有对这种复合材料梁单元的动能、势能情况作详细分析,而是直接引用传统金属材料的有限元梁单元的质量矩阵、刚度矩阵,只是把其中的密度和弹性模量换为层合板复合材料的平均密度和弹性模量。尤其是和建立金属构件弹性连杆机构的动态方程时一样,没能给出机构的阻尼矩阵,或是采用由质量矩阵和刚度矩阵组合的比例矩阵进行了近似处理。机构模态阻尼这一重要的动态特性长期未得到详细研究,上述学者在分析中仅考虑了杆件的比阻尼容量,在为减小机构振动的极大阻尼优化设计中,也只能以杆件比阻尼容量为目标。

针对关于层合板复合材料构件的机构振动问题研究的不足,蔡敢为等人对采用该材料的连杆机构的振动方程进行了详细研究^[44]。在建模中,应用复合材料细观力



学等理论分析推导了叠层复合材料梁单元质量矩阵和刚度矩阵,特别是采取复合材料梁振动时的黏滞阻尼力与速度的一次方成正比的假设,按照阻尼力在一个振动周期内所做的功与用阻尼损耗因子表达的一个周期内的耗能相等的原理,研究推导了机构的阻尼矩阵计算式。因此,用系统的结构参数、材料参数完整地表达了其刚度、惯量和阻尼特性,使有关层合板复合材料构件的机构振动理论更加完善。

因为叠层复合材料存在层间强度低的明显缺陷,其应用有一定局限性。20世纪90年代发明的三维编织复合材料克服了叠层复合材料层间强度低的缺陷,材料的整体刚度和强度有显著提高,且具有良好的抗损坏性能,在许多领域具有很好的应用前景,也适合作为连杆机构、机器人机构的构件。这种新型复合材料出现不久,廖道训就率先提出了将其应用于连杆机构以改善机构的动态性能的设想,并就此设想于1994年申报了国家自然科学基金项目并获批准。廖道训在20世纪80年代中期就与美国密歇根州立大学的Thompson一起进行含复合材料构件的机构动力学研究,并在The International Journal of Robotics Research^[2]、Journal of Composite Material等刊物发表了其研究成果^[45]。廖道训教授是最早研究具有复合材料构件的连杆机构动态性能的学者之一。

由于三维编织复合材料的三维四向的纤维结构十分复杂,过去有关叠层复合材料的强度、刚度和阻尼的计算公式等都不适用。为了将三维纤维复合材料应用于连杆机构,廖道训、蔡敢为等人对三维纤维复合材料的弹性常数(弹性模量、泊松比)、三维编织复合材料杆件的刚度、阻尼等进行了系统研究^[46-52],并综合应用复合材料力学理论和KED理论等对具有三维编织复合材料构件的连杆机构的振动方程、机构的模态阻尼、动态响应等进行了系统研究^[53,54]。其中:在应用有限元法建立含三维编织复合材料构件的连杆机构的振动方程时,从材料细观结构的角度分析研究了其梁的单元质量、刚度和阻尼矩阵;将三维整体编织的复合材料视为多个单向纤维复合材料的叠加,由三维应变转换矩阵得到应变分布与节点位移间的关系,从而导出单元刚度矩阵;分析了各向异性材料构件在不同振型中具有不同阻尼的原因,即不同应变所耗散的能量不同,而在不同的振型中各种应变所占比重不同,应变的不同组合就使得其在不同的模态中具有不同阻尼,据此,由振动时各单向纤维复合材料的6个应变耗散能量集组成单元的能量耗散,得到了各比阻尼容量的计算式,进而得到阻尼矩阵。

1.4 弹性连杆机构在机电耦合作用下的非线性振动性能研究进展

现代连杆机构的应用与研究表明:电动机的电磁参数对机构的动态性能有重要影响,驱动电动机的电磁谐波有时会引起高速轻型机构的强烈振动;系统的临界转速会随电动机的运行参数变化而变化;在一定条件下,系统将出现参数共振与强迫振动相耦合的振动;等等。因此,将驱动电动机与机构集成研究是有必要的。但是,在很

长的时间内,人们在弹性连杆机构的动态分析中,没有对机电耦合关系作深入细致的分析,建立机构动态分析模型时,一般是采用主动件等速运动的假设,而未考虑电动机电磁参数的影响。仅有少数学者抛弃了主动件等速运动假设,考虑了电动机的影响。这种将电动机和弹性连杆机构合在一起作为一个系统所进行的弹性动力分析称为“完全动力分析”。Liou F. W.^[55]、Smaili A.^[56]、张策^[57]等人在完全动力分析方面的工作都取得了一定成果,但他们的工作还不够深入,建模时并未把系统作为一个统一的对象,而是将电动机和连杆机构分割开来处理,仅仅是在弹性连杆机构动态方程的基础上引入一个简单的机电关系式,即电动机电磁转矩与电枢电流间的线性关系 $M = C\Phi I$,它只适用于电动机的转子无任何偏心和振动、电动机气隙稳定均匀的理想状态。因为此模型未能真实、准确地反映机、电之间复杂的耦合关系,基于此模型研究电磁参数与机构临界速度、多重共振等之间关系是困难的,因此这些问题一直未见有文献详细介绍。实际上,一般电动机的运行状况是,转子多处于进动状态,气隙磁场也不是稳定均匀的。由于供电系统的原因,电动机的电参数也是经常波动的,如三相交流电也难以保证恒定理想的三相对称状态。邱家俊^[58]通过理论和实验研究证实,即使对于不连接任何负载的实验电动机,电磁参数也会导致转子的复杂横振、扭振行为,甚至转子的固有频率会随激磁电流的增大而一分为二,即发生有趣的固有频率分裂现象,并同时激起两个振型的共振,即双重共振。自然,电动机与连杆机构连接后,情形会显著复杂化,仅仅把运行中连杆机构的惯量计入电动机转子的不断变化的等效转动惯量都会使机、电之间的相互影响更为复杂。因此,把电动机-弹性机构系统作为一个统一对象来深入研究有助于更完善地解释弹性连杆机构的分数共振、组合共振等现象。但是应用有限元法建立不同物理量的解析方程常被认为不是很容易的。蔡敢为、李兆军等人对此进行了较为系统、深入的研究^[59],根据三相交流电动机转子存在振动偏心这种实际状态的机电耦合关系,引入电动机气隙磁场能量函数,建立了以电动机转子横振、扭振为节点位移的电动机单元,应用有限元法建立含电动机电磁参数和金属材料的弹性连杆机构结构参数的系统动态方程,并根据该方程对系统的动态响应进行了仿真计算和分析,经实验验证,并与以往未考虑机电耦合因素所建方程的仿真计算结果对比,证实所建方程表达了以往方程未能反映的动态性能,较好地体现了系统动态性能与其电磁参数、结构参数之间的实在关系。同时,他们还在此基础上,结合叠层复合材料连杆单元、三维编织复合材料连杆单元,分别建立了电动机-含叠层复合材料构件的机构系统的动态分析模型、电动机-含三维编织复合材料构件的机构系统的动态分析模型。后来,蔡敢为、王汝贵等人又在直流电动机、伺服电动机机电耦合关系研究的基础上,建立了直流电动机、伺服电动机的有限单元模型,并在此基础上建立了混合驱动两自由度五杆机构系统的振动方程。在建立了各种电动机-连杆机构系统的振动方程后,本书作者等人对这些系统的非线性振动性能进行了系统研究^[60~75]:利用多尺度法对电动机-弹性连杆机构系统的参激振动和强迫振动的耦合机理及发生参、强联合共振条件进行深入研究,得到了一些



有益的结论;在充分考虑摄动法和数值分析法特点的基础上,推导了既能用于深入研究电动机-弹性连杆机构系统的动力学特性,又能求得较高精确度的动力学响应的方法——迭代式模态叠加多尺度法和多尺度-Newmark 法,为分析和计算系统的动力学特性提供了有效的方法;采用多尺度法研究了电动机-弹性四连杆机构系统和混合驱动五连杆机构系统在电磁参数激励下的主共振和次谐共振、在系统自激惯性力作用下的超谐共振、在电磁参数激励和自激惯性力共同作用下的组合共振和多重共振及其运动稳定性等问题,给出了各种共振响应的一次近似摄动解表达式,并分析了电动机-弹性连杆机构系统的动力学特性与系统的电磁参数、结构参数及材料参数之间的内在联系。

本书主要介绍本书作者在含新型纤维复合材料构件的连杆机构的振动性能、连杆机构在机电耦合作用下的非线性振动性能两个方面的研究中所取得的成果,包括含叠层复合材料构件、三维编织复合材料构件的连杆机构的振动方程,复合材料的细观力学参数与连杆机构宏观动态性能之间的关系,反映驱动电动机机电耦合关系的电动机有限元单元,通过该单元建立电动机-连杆机构系统的有限元动态分析方程,以及该系统在各种激励作用下的非线性振动、运动稳定性等内容。这些研究工作对抑制弹性连杆机构的振动和弹性连杆机构的设计等都有较好的借鉴作用,但目前国内外涉及这些研究内容的文献还不多见。

第2章 连杆机构的振动方程

为了研究弹性连杆机构的振动特性,需要建立其振动方程。只有在这种解析形式的动态分析模型基础上,才能方便地对其振动规律进行系统研究。本章主要介绍应用有限元法建立连杆机构振动方程的方法与过程。

在工程实际中,常常需要针对不同的研究目的,建立各种不同的连杆机构振动方程。

为了改善连杆机构的动态性能,现代连杆机构不仅采用了金属材料构件,还采用了先进复合材料构件。含这些各向异性的复合材料构件的连杆机构的振动方程是不同于金属材料构件机构的振动方程的。

现代连杆机构的应用与相关研究表明,其驱动电动机的机电耦合作用会对连杆机构的弹性振动产生影响。要深入研究连杆机构在电动机机电耦合作用下的振动特性,就需要建立电动机-弹性连杆机构系统的振动方程。这种考虑驱动电动机影响的连杆机构振动分析即连杆机构弹性振动分析的“完全动力分析”^[16]。

多自由度可控机构由包含控制电动机在内的多个电动机驱动,其输出运动由多个原动件共同决定,改变控制电动机的控制程序即可轻松地改变机构的输出运动,即实现机构输出的柔性化,因此多自由度可控机构具有很好的应用前景。但不同类型的驱动电动机对机构的机电耦合作用不尽不同,多个电动机的机电耦合作用对多自由度机构的振动影响更多,其振动方程也比单自由度机构更加复杂。

根据不同的工作任务,需要建立各种连杆机构的振动方程,如金属材料构件的四杆机构振动方程、含叠层复合材料构件的四杆机构振动方程、含三维编织复合材料构件的四杆机构振动方程、同时含金属材料构件和复合材料构件的四杆机构振动方程、电动机-金属材料构件四杆机构系统的振动方程、电动机-含复合材料构件四杆机构系统的振动方程、含复合材料构件的混合驱动五杆机构系统的振动方程……

应用有限单元法建立连杆机构的振动方程时,是将对象离散并划分为若干单元,进行单元特性分析,建立单元特性矩阵,形成单元特性方程,再将各单元特性矩阵装配成对象的整体特性矩阵,从而建立整体振动方程的。所以,在建立上述各种不同类型的连杆机构振动方程时,不同点主要体现在不同的有限元单元分析上。而由各个相同或不相同类型的有限元单元装配、建立连杆机构整体的振动方程的方法和过程则基本上是相同的。本章首先分别介绍建立各种连杆机构振动方程需要涉及的有限元单元,然后介绍由这些单元装配、建立各种连杆机构的振动方程的方法。



2.1 电动机单元

为了应用有限元法建立电动机-连杆机构系统的振动方程,我们提出了一类新的有限元单元——电动机单元。这种电动机单元与连杆机构振动分析的其他单元有相同之处,即也是通过节点与其他单元相联系;也有其特殊之处,如在单元的刚度分析中,不仅要考虑电动机轴的弹性势能,还要考虑电动机的气隙磁场能,这种考虑较好地体现了真实情况。具体分析如下。

由电机学知识可知:三相交流电动机三相定子绕组和三相转子绕组在空间对称分布,且定子绕组通以三相对称电流,各相电流在气隙空间产生正弦分布的磁势;伺服电动机通常工作在不对称情况下,即加在两个绕组上的电压和绕组中电流是不对称的,在气隙中的合成磁场为椭圆形旋转磁场。因此,分析伺服电动机的磁场性能时,与一般三相交流电动机有所不同,必须首先把气隙中的椭圆旋转磁场分解成正序和负序两个圆形旋转磁场来等效;对直流电动机而言,虽然其结构相对其他电动机比较简单,但其定子和转子机构与其他电动机又有所不同,其励磁磁势和电枢磁势也与其他电动机不同。所以针对各电动机结构与电磁参数的特点,分别对其进行分析。

2.1.1 三相交流电动机单元

为保证简便而不失一般性,在电动机轴的动力分析中,进行如下简化:在研究电动机轴上任一点的绝对加速度时,忽略哥氏加速度和牵连加速度中的刚体运动与弹性变形运动的耦合项;在应变能计算中忽略剪切变形的影响及横向位移对拉、压应变能的影响;电动机转子部分的长径比较小,将其视为刚体。振动分析中主要考虑电动机轴的弹性,电动机转子系统动力学分析采用轴盘系统模型,该轴盘系统的刚、弹性运动情况可由转子质心的偏心振动(即横向振动)和电动机轴相对于转子的扭转振动决定。如图 2-1 所示,1,2,3,4 为电动机单元的四个节点,其中:节点 1 设定在左支承轴承的中点处,节点位移皆为零;节点 2 设定在电动机转子几何中心处,有两个节点位移,即 y, z 方向的横向位移 u_1, u_2 ;节点 3 设定在右支承轴承的中点处,有一个节点位移,即扭角 u_3 ;节点 4 设定在轴的输出端,有一个节点位移,即扭角 u_4 。于是,此横振和扭振可由广义坐标向量 $\mathbf{u}_1 = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T$ 表达。图中, $Oxyz$ 为电动机单元坐标系。

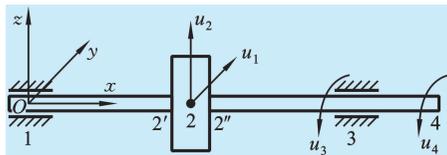


图 2-1 电动机单元简图

2.1.1.1 位移模式

图 2-1 所示电动机轴的轴线上任一点沿 y 方向的弹性横向位移 $W_{1y}(x, t)$ 、沿 z 方向的弹性横向位移 $W_{1z}(x, t)$ 及弹性扭角 $V_1(x, t)$ 可分别表示为

$$\begin{cases} W_{1y}(x, t) = \phi_1(x)u_1(t) \\ W_{1z}(x, t) = \phi_2(x)u_2(t) \\ V_1(x, t) = \sum_i \phi_i(x)u_i(t) \quad (i = 3, 4) \end{cases} \quad (2-1)$$

式中: $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x)$ 为电动机单元的典型函数, 且

$$\begin{aligned} \phi_{1,2}(x) &= \begin{cases} 1 - 10e_{11}^3 + 15e_{11}^4 - 6e_{11}^5 & (x \leq l_{11}) \\ 1 - 10e_{12}^3 + 15e_{12}^4 - 6e_{12}^5 & (l_{11} < x \leq l_{11} + l_{12}) \\ 0 & (l_{11} + l_{12} < x \leq l_{11} + l_{12} + l_{13}) \end{cases} \\ \phi_3(x) &= \begin{cases} 0 & (x \leq l_{11}) \\ 1 - e_{12} & (l_{11} < x \leq l_{11} + l_{12}) \\ e_{13} & (l_{11} + l_{12} < x \leq l_{11} + l_{12} + l_{13}) \end{cases} \\ \phi_4(x) &= \begin{cases} 0 & (x \leq l_{11}) \\ 0 & (l_{11} < x \leq l_{11} + l_{12}) \\ 1 - e_{13} & (l_{11} + l_{12} < x \leq l_{11} + l_{12} + l_{13}) \end{cases} \end{aligned}$$

式中: $e_{11} = \frac{x}{l_{11}}, e_{12} = \frac{l_{11} + l_{12} - x}{l_{12}}, e_{13} = \frac{l_{11} + l_{12} + l_{13} - x}{l_{13}}$, 其中 l_{11}, l_{12}, l_{13} 分别为节点 1 与 2'、节点 2' 与 3、节点 3 与 4 间的长度, 2'、2'' 分别为转子左右两侧的端点; $u_i(t)$ 为图 2-1 所示的节点位移。

2.1.1.2 单元动能与质量矩阵

在考虑电动机单元动能时, 假定每个截面处的质量都集中到轴线上来, 且忽略截面转动的动能, 则电动机单元的动能为

$$\begin{aligned} T_{E1} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_1} [m_1(x) + m_{10}\delta(l_{11})] [\dot{W}_{1ya}(x, t)]^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{l_1} [m_1(x) + m_{10}\delta(l_{11})] [\dot{W}_{1za}(x, t)]^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{l_1} [J_1(x) + J_{10}] [\dot{V}_{1a}(x, t)]^2 dx \end{aligned} \quad (2-2)$$

式中: l_1 为电动机轴长度, $l_1 = l_{11} + l_{12} + l_{13}$; $m_1(x)$ 为电动机轴的质量分布函数 (不含电动机转子), 对于等截面电动机轴, $m_1(x) = \rho_1 A_1$, ρ_1 为电动机轴的材料密度, A_1 为电动机轴的横截面积; m_{10} 为电动机转子的质量; $J_1(x)$ 为电动机轴的转动惯量分布函数 (不含电动机转子), 对于等截面电动机轴, $J_1(x) = \frac{1}{2} \rho_1 A_1 r_1^2$, r_1 为电动机轴的半径; J_{10} 为电动机转子的转动惯量; $\dot{W}_{1ya}(x, t)$ 为电动机轴的轴线上坐标为 x 的任一点沿 y 方向的横向绝对速度; $\dot{W}_{1za}(x, t)$ 为电动机轴的轴线上坐标为 x 的任一点沿 z 方向的横



向绝对速度; $\dot{V}_{1a}(x, t)$ 为电动机轴上距离原点为 x 的任意横截面的绝对角速度。

将式(2-1)及相关型函数代入式(2-2)中,忽略刚体运动与弹性运动的耦合项,整理得

$$T_{E1} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_{1a}^T \bar{\mathbf{m}}_1 \dot{\mathbf{u}}_{1a} \quad (2-3)$$

式中: $\dot{\mathbf{u}}_{1a}$ 为节点的绝对速度向量; $\bar{\mathbf{m}}_1$ 为电动机单元的质量矩阵,且

$$(\bar{\mathbf{m}}_1)_{11} = \int_0^{l_1} [m_1(x) + m_{10}\delta(l_{11})] \phi_1(x) \phi_1(x) dx$$

$$(\bar{\mathbf{m}}_1)_{22} = \int_0^{l_1} [m_1(x) + m_{10}\delta(l_{11})] \phi_2(x) \phi_2(x) dx$$

$$(\bar{\mathbf{m}}_1)_{kp} = \int_0^{l_1} [J_1(x) + J_{10}] \phi_k(x) \phi_p(x) dx \quad (k, p = 3, 4)$$

$\bar{\mathbf{m}}_1$ 的其余各元素皆为零。

2.1.1.3 单元势能与刚度矩阵

在忽略剪切和屈服变形能的情形下,电动机单元的弹性势能为

$$N_{11} = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} E_1 I_1(x) \left[\frac{\partial^2 W_{1y}(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} E_1 I_1(x) \left[\frac{\partial^2 W_{1z}(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} G_1 J_{01}(x) \left[\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (2-4)$$

式中: E_1 为电动机轴材料的弹性模量; $I_1(x)$ 为电动机轴抗弯截面惯性矩分布函数; G_1 为电动机轴材料的剪切弹性模量; $J_{01}(x)$ 为电动机轴极惯性矩分布函数。

严格地说,由于电动机存在齿槽等因素,空间磁通密度沿气隙圆周并非完全按正弦分布^[76]。在异步电动机正常运行时,气隙中除了存在基波旋转磁场外,还存在一系列的高次谐波磁场,如图2-2所示。这些高次谐波主要是由于主极的外形未经特殊设计,再加上铁芯的饱和使气隙磁场在空间呈非正弦分布而产生的。气隙高次谐波磁场是产生谐波转矩和杂散损耗的主要原因。交流绕组磁势不仅是空间的函数,而且也是时间的函数。

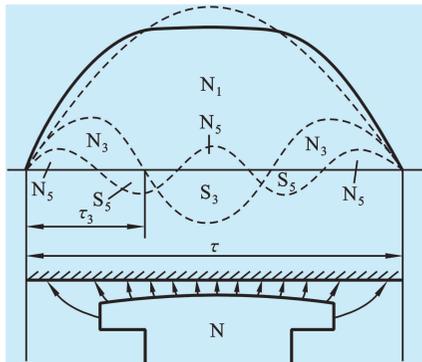


图 2-2 电动机主极磁场的磁通密度分布及其谐波

在以电动机作为驱动单元的机械系统中,电磁场的电磁参数与传动系统的力学参数交互影响,构成耦合。这种耦合表现为电磁场产生谐波分量,对传动系统的振动构成直接激励。这种激励在电动机驱动的机电设备中普遍存在,且激励作用随电动机功率的增大而增强。谐波分量的频率成分由电动机的驱动形式决定,在交流电动机中的谐波以 50 Hz 倍数频率的为主。由于电动机气隙中存在着一系列的谐波磁场,它们相互作用,由此在气隙中形成电磁力波。电磁力波作用于定子铁芯内圆表面,引起定子系统振动,而定子铁芯的径向振动位移反过来又会进一步影响气隙磁场,进而影响到电磁力的成分。作用于铁芯的力波和由它引起的振动可能同时存在径向、轴向和切向分量。在正弦波电压供电下,电动机气隙时间谐波磁场通过对电动机结构采取措施而得到削弱。

为了便于分析,这里采用以下的基本假设:

(1) 电动机三相定子绕组 A, B, C 和三相转子绕组 a, b, c 在空间对称分布,且定子绕组通以三相对称电流,各相电流在气隙空间产生正弦分布的磁势;

(2) 由于电动机磁场气隙长度 δ 相对于转子半径和转子有效长度 L_{01} 很小,因此忽略气隙磁场两端的边缘效应,将电动机磁场看做二维磁场来研究;

(3) 忽略磁路饱和与漏磁,磁导率无穷大;

(4) 硅钢片材料各向同性,其磁化曲线是单值的;

(5) 波形好,高次谐波分量小,只考虑基波分量的作用。

当电动机采用分别绕组、短距线圈等工艺时,就能够使高次谐波分布系数比基波分布系数小很多,即在基波磁动势稍微有所减小的同时,使谐波磁动势受到大幅度削弱,从而改善磁动势的波形。在以上的基本假设条件下,电动机三相绕组对称分布,在空间互差 120° 电角度,并且三相电流的幅值相等。

电动机转子的偏心主要包括静偏心、振动偏心和转动偏心等,为保证简便而不失一般性,这里仅考虑电动机转子存在转动偏心和振动偏心的情况。图 2-3 为电动机转子存在转动偏心和振动偏心时的气隙示意图,其中点 O 为定子内圆几何中心,点 O_1 为转子外圆几何中心,且 O_1 的坐标为 (y, z) , δ 为气隙长度, e 为气隙偏心, $e = \sqrt{y^2 + z^2}$, 且

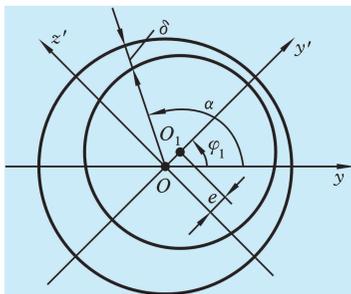


图 2-3 存在转动偏心和振动偏心时的气隙示意



$$\begin{cases} y = e_0 \cos \varphi_1 + u_1 \\ z = e_0 \sin \varphi_1 + u_2 \end{cases} \quad (2-5)$$

式中: e_0 为转动偏心; u_1, u_2 分别为振动偏心在 y 轴和 z 轴方向的分量; φ_1 为电动机轴的转角。

由机电分析动力学可知, 电动机气隙磁场能^[58]为

$$\begin{aligned} N_{12} = & \frac{R_1 L_{01}}{2} \int_0^{2\pi} \Lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_1^n \cos^n(\alpha - \varphi_1) [F_{1m} \cos(\omega_0 t - \alpha) \\ & + F_{2m} \cos(\varphi_1 + s\omega_0 t - \alpha - \phi)]^2 d\alpha \end{aligned} \quad (2-6)$$

式中: R_1 为电动机定子内圆半径; L_{01} 为转子的有效长度; ε_1 为有效相对偏心, 且 $\varepsilon_1 = \frac{e}{k_\mu \delta_0}$, 其中 δ_0 为均匀气隙长度, k_μ 为气隙饱和度, 且 $k_\mu = 1 + \frac{\delta_{Fe}}{k_1 \delta_0}$, k_1 为平均气隙的计

算气隙系数, δ_{Fe} 为铁磁材料当量气隙长度; Λ_0 为电动机均匀气隙磁导, 且 $\Lambda_0 = \frac{\mu_0}{k_\mu \delta_0}$, μ_0 为空气磁导率; s 为转差率; ω_0 为电动机的同步转速, 且 $\omega_0 = \frac{60f}{p}$, f 为供电电源频率, p 为合成磁场磁极对数; ϕ 为转子电流滞后定子电流的相位角; F_{1m}, F_{2m} 分别为定、转子三相合成磁势的幅值; α 为径向气隙与 y 轴的夹角。

式(2-6)中: $n=0$ 的分量最大, 占主导作用; $n \neq 0$ 的各项都是因气隙偏心引起的, 而且各项分量所占的比重不同, 由于 $\varepsilon_1 \ll 1$, 因而随着 n 的增大, 该分量数值迅速减小。一般情况下, 取前面两项就可以保证分析精度, 这里取其前三项(即 $n=0, 1, 2$)进行研究。

将式(2-6)展开, 取前三项, 整理得

$$\begin{aligned} N_{12} = & \frac{R_1 L_{01} \Lambda_0}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\left(1 + \frac{y^2 + z^2}{2\sigma^2} \right) + \frac{y}{\sigma} \cos \alpha + \frac{z}{\sigma} \sin \alpha + \frac{y^2 - z^2}{2\sigma^2} \cos 2\alpha + \frac{yz}{\sigma^2} \sin 2\alpha \right] \right. \\ & \left. \cdot [F_{1m} \cos(\omega_0 t - \alpha) + F_{2m} \cos(\varphi_1 + s\omega_0 t - \alpha - \phi)]^2 \right\} d\alpha \end{aligned} \quad (2-7)$$

单元的总势能 N_1 由弹性势能 N_{11} 和电动机气隙磁场能 N_{12} 组成, 即

$$N_1 = N_{11} + N_{12} \quad (2-8)$$

将式(2-1)、式(2-4)、式(2-5)、式(2-7)及相关型函数代入式(2-8)中, 并整理得

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{1}{2} \mathbf{u}_1^T (\bar{\mathbf{k}}_1 + \bar{\mathbf{k}}_{01}) \mathbf{u}_1 + \bar{\mathbf{E}}_0^T (\bar{\mathbf{k}}_1 + \bar{\mathbf{k}}_{01}) \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}_0^T (\bar{\mathbf{k}}_1 + \bar{\mathbf{k}}_{01}) \bar{\mathbf{E}}_0 \\ & + \frac{R_1 L_{01} \Lambda_0}{2} \cdot [F_{1m} \cos(\omega_0 t - \alpha) + F_{2m} \cos(\varphi_1 + s\omega_0 t - \alpha - \phi)]^2 d\alpha \end{aligned} \quad (2-9)$$

式中: $\bar{\mathbf{k}}_1$ 为电动机单元与弹性势能 N_{11} 相关的刚度矩阵; $\bar{\mathbf{k}}_{01}$ 为电动机单元与电动机气隙磁场能 N_{12} 有关的刚度矩阵; \mathbf{u}_1 为电动机单元广义坐标向量; $\bar{\mathbf{E}}_0$ 为与电动机转子转动偏心相关的向量, 且

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_0 &= [e_0 \cos \varphi_1 \quad e_0 \sin \varphi_1 \quad 0 \quad 0] \\ (\bar{\mathbf{k}}_1)_{11} &= \int_0^{l_1} E_1 I_1(x) \left[\frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx \\ (\bar{\mathbf{k}}_1)_{22} &= \int_0^{l_1} E_1 I_1(x) \left[\frac{\partial^2 \phi_2(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx \\ (\bar{\mathbf{k}}_1)_{kp} &= \int_0^{l_1} G_1 J_{01}(x) \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_p(x)}{\partial x} dx \quad (k, p = 3, 4) \\ (\bar{\mathbf{k}}_{01})_{11} &= -2g_{11} - g_{12} \cos \Omega_0 t - g_{13} \sin \Omega_0 t \\ (\bar{\mathbf{k}}_{01})_{12} &= (\bar{\mathbf{k}}_0)_{21} = -g_{12} \sin \Omega_0 t + g_{13} \cos \Omega_0 t \\ (\bar{\mathbf{k}}_{01})_{22} &= -2g_{11} + g_{12} \cos \Omega_0 t + g_{13} \sin \Omega_0 t \end{aligned}$$

其余各项元素为零,且

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= 2\omega_0 \\ g_{11} &= \frac{\pi R_1 L_{01} \Lambda_0}{4\sigma^2} [F_{1m}^2 + F_{2m}^2 + 2F_{1m} F_{2m} \cos \phi] \\ g_{12} &= \frac{\pi R_1 L_{01} \Lambda_0}{4\sigma^2} [F_{1m}^2 + F_{2m}^2 \cos 2\phi + 2F_{1m} F_{2m} \cos \phi] \\ g_{13} &= \frac{\pi R_1 L_{01} \Lambda_0}{4\sigma^2} [F_{2m}^2 \sin 2\phi + 2F_{1m} F_{2m} \sin \phi] \end{aligned}$$

2.1.2 伺服电动机单元

在伺服电动机轴的动力学分析中,进行如下简化:研究伺服电动机轴上任一点的绝对加速度时,忽略哥氏加速度和牵连加速度中的刚体运动与弹性变形运动的耦合项;在应变能计算中忽略剪切变形的影响及横向位移对拉、压应变能的影响;伺服电动机转子的长径比较小,将其视为刚体。

振动分析中主要考虑伺服电动机轴的弹性,采用轴盘系统模型,该轴盘系统的刚、弹性运动情况可由转子质心的偏心振动(即横向振动)和电动机轴相对于转子的扭转振动决定,如图 2-4 所示。图中 1,2,3,4 为伺服电动机单元的四个节点,其中:节点 1 设定在左支承轴承的中点处,节点位移皆为零;节点 2 设定在转子几何中心处,有两个节点位移,即 y, z 方向的横向弹性位移 U_1, U_2 ;节点 3 设定在右支承轴承的中点处,有一个节点位移,即弹性扭角 U_3 ;节点 4 设定在轴的输出端,有一个节点位移,即弹性扭角 U_4 。于是,此弹性横振和扭振可由广义坐标向量 $\mathbf{u}_5 = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4]^T$ 表达。图中 $Oxyz$ 为伺服电动机单元坐标系。

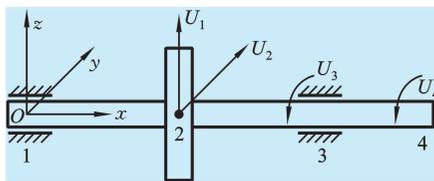


图 2-4 伺服电动机单元简图



2.1.2.1 位移插值函数

图 2-4 所示伺服电动机轴的轴线上任一点的横向位移 $W_5(x, t)$ 和弹性扭角 $V_5(x, t)$ 可分别表示为

$$\begin{cases} W_5(x, t) = \sum_i \chi_i(x) U_i(t) & (i = 1, 2) \\ V_5(x, t) = \sum_i \chi_i(x) U_i(t) & (i = 3, 4) \end{cases} \quad (2-10)$$

其中电动机单元型函数分别为

$$\chi_{1,2}(x) = \begin{cases} 10e_1^3 - 15e_1^4 + 6e_1^5 & (x \leq l_1) \\ 1 - 10e_2^3 + 15e_2^4 - 6e_2^5 & (l_1 < x \leq l_1 + l_2) \\ 0 & (l_1 + l_2 < x \leq l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (2-11)$$

$$\chi_3(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq l_1) \\ 1 - e_2 & (l_1 < x \leq l_1 + l_2) \\ e_3 & (l_1 + l_2 < x \leq l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (2-12)$$

$$\chi_4(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq l_1) \\ 0 & (l_1 < x \leq l_1 + l_2) \\ 1 - e_3 & (l_1 + l_2 < x \leq l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \quad (2-13)$$

式中: $e_1 = \frac{x}{l_1}$, $e_2 = \frac{l_1 + l_2 - x}{l_2}$, $e_3 = \frac{l_1 + l_2 + l_3 - x}{l_3}$; l_1 、 l_2 、 l_3 分别为节点 3 与 2、节点 2 与 3、节点 3 与 4 间的长度; $U_i(t)$ 为图 2-4 所示的节点位移。

2.1.2.2 单元动能和质量矩阵

考虑电动机轴(含转子)的转动惯量,伺服电动机单元的动能为

$$T_{E5} = \frac{1}{2} \int_0^l m_5(x) [\dot{W}_5(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l J_5(x) [\dot{V}_5(x, t)]^2 dx \quad (2-14)$$

式中: l 为电动机轴长度, $l = l_1 + l_2 + l_3$; $m_5(x)$ 为电动机轴的质量分布函数(含转子质量 m_{50} , m_{50} 在 $x = l_1$ 处); $J_5(x)$ 为电动机轴的转动惯量分布函数(含转子转动惯量 J_{50} , J_{50} 在 $x = l_1$ 处)。

将式(2-10)代入式(2-14)中,并忽略刚体运动与弹性运动的耦合项,得

$$T_{E5} = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_5^T \bar{\mathbf{m}}_5 \dot{\bar{\mathbf{u}}}_5 \quad (2-15)$$

式中:

$$\begin{cases} (\bar{\mathbf{m}}_5)_{11} = \int_0^l m_1(x) \chi_1(x) \chi_1(x) dx \\ (\bar{\mathbf{m}}_5)_{22} = \int_0^l m_1(x) \chi_2(x) \chi_2(x) dx \\ (\bar{\mathbf{m}}_5)_{kp} = \int_0^l m_1(x) \chi_k(x) \chi_p(x) dx \end{cases} \quad (k, p = 3, 4) \quad (2-16)$$

其余各元素皆为零,且 $\dot{\mathbf{u}}_5$ 为节点的绝对速度矢量, $\bar{\mathbf{m}}_5$ 为伺服电动机单元的质量矩阵。

2.1.2.3 单元势能和刚度矩阵

在忽略屈服变形能的情形下,伺服电动机单元的弹性势能为

$$N_{s1} = \frac{1}{2} \int_0^l E_5 I_5(x) \left[\frac{\partial^2 W_5(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l G_5 J_5(x) \left[\frac{\partial V_5(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (2-17)$$

式中: E_5 为伺服电动机轴材料的弹性模量; G_5 为伺服电动机轴材料的剪切弹性模量; $I_5(x)$ 为伺服电动机轴抗弯截面惯性矩分布函数; $J_5(x)$ 为伺服电动机轴极惯性矩分布函数。

对于伺服电动机,相位控制时两项电压均保持不变,仅改变两者之间的相位差 θ 来控制转速,所以除 $\theta = 90^\circ$ 外,电动机都在不对称运行状态下工作,即电动机是在椭圆形磁场下工作,则定子绕组正序和负序旋转磁势的幅值^[77]分别为

$$\begin{cases} F_{+s1} = F_m \cos \frac{90^\circ - \theta}{2} \\ F_{-s1} = F_m \sin \frac{90^\circ - \theta}{2} \end{cases} \quad (2-18)$$

式中: $F_m = 0.9 \frac{WK_w}{p_s} I$,其中, I 为激磁电流最大值, W 为伺服电动机激磁绕组匝数, K_w 为伺服电动机激磁绕组系数, p_s 为电动机极对数。相应转子的正序和负序磁势幅值分别为

$$\begin{cases} F_{+r1} = \frac{m_2}{m_1} \frac{x_m}{\sqrt{(r'_2/s)^2 + (x'_2)^2}} F_m \cos \frac{90^\circ - \theta}{2} \\ F_{-r1} = \frac{m_2}{m_1} \frac{x_m}{\sqrt{[r'_2/(2-s)]^2 + (x'_2)^2}} F_m \sin \frac{90^\circ - \theta}{2} \end{cases} \quad (2-19)$$

式中: m_1, m_2 分别为定子和转子的相数; x_m 为激磁电抗; r'_2 和 x'_2 分别为转子绕组的电阻归算值和等效自感电抗的归算值。电动机转子对于正向旋转磁场的转差率为 s ,对于反向旋转磁场的转差率为 $2-s$ 。

进行幅值控制时,保持两相电压的相位差为 90° ,通过改变控制电压的大小改变电动机的转速,此时,定子绕组正序和负序旋转磁势的幅值^[77]分别为

$$\begin{cases} F_{+s2} = \frac{1}{2}(1 + a_e) F_m \\ F_{-s2} = \frac{1}{2}(1 - a_e) F_m \end{cases} \quad (2-20)$$

式中: $a_e = \frac{U_k}{U_{kn}}$ 为伺服电动机有效信号系数,其中, U_k 为实际控制电压, U_{kn} 为额定控制电压。相应转子的正序和负序磁势幅值分别为



$$\begin{cases} F_{+r2} = \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1} \frac{x_m}{\sqrt{(r_2'/s)^2 + (x_2')^2}} (1 + a_e) F_m \\ F_{-r2} = \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1} \frac{x_m}{\sqrt{[r_2'/(2-s)]^2 + (x_2')^2}} (1 - a_e) F_m \end{cases} \quad (2-21)$$

图 2-5 所示为伺服电动机转子有偏心时的气隙示意图。图中:点 O 为定子内圆几何中心;点 O_1 为转子轴颈外圆几何中心;点 O_2 为振动偏心转子轴颈外圆中心;点 O_3 为转子外圆几何中心,且 O_3 的坐标为 (x, y) ; δ 为气隙长度; e_1 为气隙偏心,同时考虑转子的静偏心 $e_{01} = \sqrt{e_{11}^2 + e_{12}^2}$ 和转动偏心 ε_{01} , 则 $e_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, 且

$$\begin{cases} x = U_1 + e_{11} + \varepsilon_{01} \cos \beta_1 \\ y = U_2 + e_{12} + \varepsilon_{01} \sin \beta_1 \end{cases} \quad (2-22)$$

式中: U_1, U_2 分别为振动偏心在 x 轴和 y 轴方向上的分量, 则振动偏心为 $e_0 = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$; $\beta_1 = (1 - s_1) \omega_s t$ 为伺服电动机转子相对定子的转角, 其中 ω_s 为伺服电动机的同步转速, s_s 为伺服电动机转动滑差率。

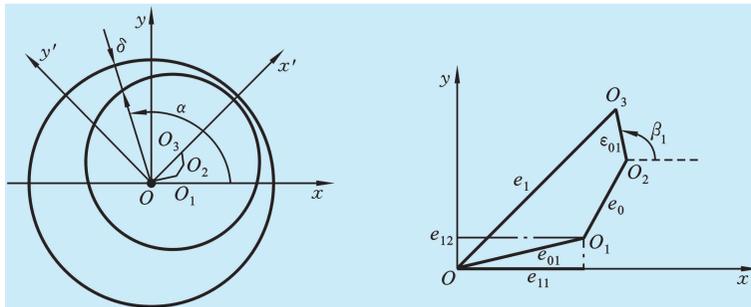


图 2-5 伺服电动机转子有偏心时的气隙示意

由机电分析动力学可知, 伺服电动机气隙磁场能^[58]为

$$\begin{aligned} N_{S2} = & \frac{R_s l_s}{2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{01} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \cos^n(\alpha - \beta_1) [F_{+s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{-s} \cos(\omega_s t + p_s \alpha) \\ & + F_{+r} \cos(\omega_s t - p_s \alpha - \varphi_{s1}) + F_{-r} \cos(\omega_s t + p_s \alpha - \varphi_{s2})]^2 d(p\alpha) \end{aligned} \quad (2-23)$$

式中: R_s 为伺服电动机定子内圆半径; l_s 为转子的有效长度; $\Lambda_s = \frac{\mu_0}{\sigma}$, 为伺服电动机均匀气隙磁导, 其中, μ_0 为空气磁导率, $\sigma = k_{\mu s} \delta_s$, δ_s 为均匀气隙长度, $k_{\mu s}$ 为饱和度, $k_{\mu} = 1 + \frac{\delta_{Fe}}{k_{1s} \delta_s}$, k_{1s} 为平均气隙的计算气隙系数, δ_{Fe} 为铁磁材料当量气隙; $\varepsilon = \frac{e_1}{k_{\mu s} \delta_s}$ 为有效相对偏心; ω_s 为电动机的同步转速, 且 $\omega_s = \frac{2\pi f}{p_s}$, f 为供电电源频率, p_s 为合成磁场磁极对数; φ_{s1} 是转子正序电流滞后于定子正序电流的相位角; φ_{s2} 为转子逆序电流滞后于定子逆序电流的相位角; $F_{+s}, F_{-s}, F_{+r}, F_{-r}$ 分别为伺服电动机定子和转子绕组正、

负序旋转时磁势的幅值,在进行伺服电动机相位控制时分别为 $F_{+s1}, F_{-s1}, F_{+r1}, F_{-r1}$, 进行幅值控制时分别为 $F_{+s2}, F_{-s2}, F_{+r2}, F_{-r2}$ 。

式(2-23)中: $n=0$ 的分量最大,占主导作用; $n \neq 0$ 的各项都是因气隙偏心引起的,而且各项分量所占的比重不同,由于 $\varepsilon \ll 1$,因而随着 n 的增大,该分量数值迅速减小。一般情况下,取前面两项就可以保证其分析精度,这里取其前三项(即 $n=0, 1, 2$)进行研究。

$$N_{s2} = \frac{R_s l_s \Lambda_s}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2\sigma_s^2} \right) + \frac{x}{\sigma_s} \cos\alpha + \frac{y}{\sigma_s} \sin\alpha + \frac{x^2 - y^2}{2\sigma_s^2} \cos 2\alpha + \frac{xy}{\sigma_s^2} \sin 2\alpha \right] \cdot [F_{+s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{-s} \cos(\omega_s t + p_s \alpha) + F_{+r} \cos(\omega_s t - p_s \alpha - \varphi_{s1}) + F_{-r} \cos(\omega_s t + p_s \alpha - \varphi_{s2})] \right\}^2 d(p_s \alpha) \quad (2-24)$$

将式(2-22)代入式(2-24),得

$$N_{s2} = \frac{R_s l_s \Lambda_s}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\left[1 + \frac{(U_1 + e_{11} + \varepsilon_{01} \cos\beta_1)^2 + (U_2 + e_{12} + \varepsilon_{01} \sin\beta_1)^2}{2\sigma_s^2} \right] + \frac{U_1 + e_{11} + \varepsilon_{01} \cos\beta_1}{\sigma_s} \cos\alpha + \frac{U_2 + e_{12} + \varepsilon_{01} \sin\beta_1}{\sigma_s} \sin\alpha + \frac{(U_1 + e_{11} + \varepsilon_{01} \cos\beta_1)^2 - (U_2 + e_{12} + \varepsilon_{01} \sin\beta_1)^2}{2\sigma_s^2} \cos 2\alpha + \frac{(U_1 + e_{11} + \varepsilon_{01} \cos\beta_1)(U_2 + e_{12} + \varepsilon_{01} \sin\beta_1)}{\sigma_s^2} \sin 2\alpha \right] \cdot [F_{+s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{-s} \cos(\omega_s t + p_s \alpha) + F_{+r} \cos(\omega_s t - p_s \alpha - \varphi_{s1}) + F_{-r} \cos(\omega_s t + p_s \alpha - \varphi_{s2})] \right\}^2 d(p_s \alpha) \quad (2-25)$$

伺服电动机单元的总势能 N_5 由弹性势能 N_{51} 和伺服电动机气隙磁场能 N_{52} 组成,即

$$N_5 = N_{51} + N_{52} \quad (2-26)$$

将式(2-17)、式(2-25)代入式(2-26)并整理得

$$N_5 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_5^T (\bar{\mathbf{k}}_{51} + \bar{\mathbf{k}}_{52}) \mathbf{u}_5 + \bar{\mathbf{e}}_5^T (\bar{\mathbf{k}}_{51} + \bar{\mathbf{k}}_{52}) \mathbf{u}_5 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{e}}_5^T (\bar{\mathbf{k}}_{51} + \bar{\mathbf{k}}_{52}) \bar{\mathbf{e}}_5 + (\bar{\mathbf{e}}_5 + \mathbf{u}_5) \bar{\mathbf{k}}_{05} + \frac{p_s R_s l_s \Lambda_s}{2} \int_0^{2\pi} [F_{+s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{-s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{+r} \cos(\omega_s t - p_s \alpha - \varphi_{s1}) + F_{-r} \cos(\omega_s t + p_s \alpha - \varphi_{s2})]^2 d\alpha \quad (2-27)$$

式中: \mathbf{u}_5 为伺服电动机单元广义坐标向量; $\bar{\mathbf{e}}_5$ 为与伺服电动机转子静偏心和转动偏心有关的向量, $\bar{\mathbf{e}}_5 = [e_{11} + \varepsilon_{01} \cos\beta_1 \quad e_{12} + \varepsilon_{01} \sin\beta_1 \quad 0 \quad 0]^T$; $\bar{\mathbf{k}}_{51}$ 为与伺服电动机转子材料参数有关的电动机单元的刚度矩阵; $\bar{\mathbf{k}}_{52}$ 为与伺服电动机转子电磁参数有关的电动机单元的刚度矩阵; $\bar{\mathbf{k}}_{05}$ 为与伺服电动机转子静偏心、振动偏心和转动偏心有关的四阶向量,且



$$(\bar{\mathbf{k}}_{51})_{11} = \int_0^l E_s I_s(x) \left[\frac{\partial^2 \chi_1(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (2-28)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{51})_{12} = (\mathbf{k}_{51})_{21} = \int_0^l E_s I_s(x) \frac{\partial \chi_1(x)}{\partial x} \frac{\partial \chi_2(x)}{\partial x} dx \quad (2-29)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{51})_{22} = \int_0^l E_s I_s(x) \left[\frac{\partial^2 \chi_2(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (2-30)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{51})_{kp} = \int_0^l G_s J_s(x) \frac{\partial \chi_k(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi_p(x)}{\partial x} dx \quad (k, p = 3, 4) \quad (2-31)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{11} = \frac{p_s R_s l_s \Lambda_s}{4\sigma_s^2} \int_0^{2\pi} \left\{ (1 + \cos 2\alpha) [F_{+s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{-s} \cos(\omega_s t + p_s \alpha) + F_{+r} \cos(\omega_s t - p_s \alpha - \varphi_{s1}) + F_{-r} \cos(\omega_s t + p_s \alpha - \varphi_{s2})] \right\}^2 d\alpha \quad (2-32)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{12} = (\mathbf{k}_{52})_{21} = \frac{p_s R_s l_s \Lambda_s}{4\sigma_s^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \sin 2\alpha [F_{+s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{-s} \cos(\omega_s t + p_s \alpha) + F_{+r} \cos(\omega_s t - p_s \alpha - \varphi_{s1}) + F_{-r} \cos(\omega_s t + p_s \alpha - \varphi_{s2})] \right\} d\alpha \quad (2-33)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{22} = \frac{p_s R_s l_s \Lambda_s}{4\sigma_s^2} \int_0^{2\pi} \left\{ (1 - \cos 2\alpha) [F_{+s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{-s} \cos(\omega_s t + p_s \alpha) + F_{+r} \cos(\omega_s t - p_s \alpha - \varphi_{s1}) + F_{-r} \cos(\omega_s t + p_s \alpha - \varphi_{s2})] \right\}^2 d\alpha \quad (2-34)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{kp} = 0 \quad (k, p = 3, 4) \quad (2-35)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{k}}_{51})_{13} &= (\bar{\mathbf{k}}_{51})_{14} = (\bar{\mathbf{k}}_{51})_{23} = (\bar{\mathbf{k}}_{51})_{24} = (\bar{\mathbf{k}}_{51})_{31} = (\bar{\mathbf{k}}_{51})_{32} = (\bar{\mathbf{k}}_{51})_{41} = (\bar{\mathbf{k}}_{51})_{42} \\ &= (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{13} = (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{14} = (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{23} = (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{24} = (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{31} = (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{32} \\ &= (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{41} = (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{42} = 0 \end{aligned} \quad (2-36)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{05})_1 = \frac{p_s R_s l_s \Lambda_s}{2\sigma_s} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos \alpha [F_{+s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{-s} \cos(\omega_s t + p_s \alpha) + F_{+r} \cos(\omega_s t - p_s \alpha - \varphi_{s1}) + F_{-r} \cos(\omega_s t + p_s \alpha - \varphi_{s2})] \right\}^2 d\alpha \quad (2-37)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{05})_2 = \frac{p_s R_s l_s \Lambda_s}{2\sigma_s} \int_0^{2\pi} \left\{ \sin \alpha [F_{+s} \cos(\omega_s t - p_s \alpha) + F_{-s} \cos(\omega_s t + p_s \alpha) + F_{+r} \cos(\omega_s t - p_s \alpha - \varphi_{s1}) + F_{-r} \cos(\omega_s t + p_s \alpha - \varphi_{s2})] \right\}^2 d\alpha \quad (2-38)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{05})_3 = (\bar{\mathbf{k}}_{05})_4 = 0 \quad (2-39)$$

2.1.3 直流电动机单元

直流电动机具有良好的调速特性,较高的启、制动转矩和过载能力,应用较为广泛。对于含直流电动机的机构系统,在系统动力学分析中,建立以电动机横振、扭振

为节点位移的直流电动机单元。在研究直流电动机轴上任一点的绝对加速度时,忽略哥氏加速度和牵连加速度中的刚体运动与弹性变形运动的耦合项;在应变能计算中忽略剪切变形的影响以及横向位移对拉压应变能的影响;伺服电动机转子的长径比较小,将其视为刚体。

同伺服电动机单元的分析方法,可得直流电动机单元的动能为

$$T_{E6} = \frac{1}{2} \int_0^l m_6(x) [\dot{W}_6(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l J_6(x) [\dot{V}_6(x,t)]^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_6^T \bar{\mathbf{m}}_6 \dot{\mathbf{u}}_6 \quad (2-40)$$

式中: $m_6(x)$ 为直流电动机轴的质量分布函数; $J_6(x)$ 为电动机轴的转动惯量分布函数; $W_6(x,t)$, $V_6(x,t)$ 分别为电动机轴的轴线上任一点的横向位移和弹性扭角。

由电机学知识可知,直流电动机负载运行后,气隙磁势 F_g 等于励磁磁势 F_f 和电枢磁势 F_a 之和^[77,78]。直流电动机每一极上的励磁磁势和电枢磁势的幅值分别为

$$F_{fm} = N_f I_f \quad (2-41)$$

$$F_{am} = \frac{S}{2p} N_y i_a \quad (2-42)$$

式中: N_f 为每一磁极上励磁绕组的总匝数; I_f 为直流励磁电流; S 为电枢表面的总元件(导体)数; p 为电动机极对数; N_y 为元件的匝数; i_a 为元件电流。

由机电分析动力学可知,振动偏心时,直流电动机气隙磁场能^[58]为

$$N_{62} = \frac{R_d l_d}{2} \int_0^{2\pi} \Lambda_d \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \cos^n(\alpha - \beta_1) [F_{fm} + F_{am}]^2 d\alpha \quad (2-43)$$

式中: R_d 为直流电动机定子内圆半径; l_d 为转子的有效长度; Λ_d 为直流电动机均匀气隙磁导, $\Lambda_d = \frac{\mu_0}{\sigma_d}$,其中, μ_0 为空气磁导率, $\sigma_d = k_{\mu} \delta_d$, δ_d 为均匀气隙长度, k_{μ} 为饱和度, $k_{\mu d} = 1 + \frac{\delta_{Fed}}{k_{1d} \delta_d}$, k_{1d} 为平均气隙的计算气隙系数, δ_{Fed} 为铁磁材料当量气隙; ε 为有效相对偏心, $\varepsilon = \frac{e_1}{k_{\mu d} \delta_d}$ 。

采用与伺服电动机单元相同的分析方法,可求得直流电动机单元的总势能为

$$N_6 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_6^T (\bar{\mathbf{k}}_{61} + \bar{\mathbf{k}}_{62}) \mathbf{u}_6 + \mathbf{e}_6^T (\bar{\mathbf{k}}_{61} + \bar{\mathbf{k}}_{62}) \mathbf{u}_6 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_6^T (\bar{\mathbf{k}}_{61} + \bar{\mathbf{k}}_{62}) \mathbf{e}_6 + (\mathbf{e}_6 + \mathbf{u}_6) \bar{\mathbf{k}}_{06} + R_d L_d \Lambda_d \pi (F_{fm} + F_{am})^2 \quad (2-44)$$

式中: \mathbf{u}_6 为直流电动机单元广义坐标向量; \mathbf{e}_6 为与直流电动机转子静偏心和转动偏心有关的向量; $\bar{\mathbf{k}}_{61}$ 为与直流电动机转子材料参数有关的电动机单元的刚度矩阵; $\bar{\mathbf{k}}_{62}$ 为与直流电动机转子电磁参数有关的电动机单元的刚度矩阵; $\bar{\mathbf{k}}_{06}$ 为与直流电动机转子静偏心、振动偏心和转动偏心有关的四阶向量,且



$$(\bar{\mathbf{k}}_{61})_{11} = \int_0^l E_6 I_6(x) \left[\frac{\partial^2 \chi_1(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (2-45)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{61})_{12} = (\mathbf{k}_{61})_{21} = \int_0^l E_6 I_6(x) \frac{\partial \chi_1(x)}{\partial x} \frac{\partial \chi_2(x)}{\partial x} dx \quad (2-46)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{61})_{22} = \int_0^l E_6 J_6(x) \left[\frac{\partial^2 \chi_2(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (2-47)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{61})_{kp} = \int_0^l G_6 J_6(x) \frac{\partial \chi_k(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi_p(x)}{\partial x} dx \quad (k, p = 3, 4) \quad (2-48)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{62})_{11} = \frac{\pi R_d l_d \Lambda_d}{2\sigma_d^2} (F_{fm} + F_{am})^2 \quad (2-49)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{62})_{12} = (\mathbf{k}_{62})_{21} = \frac{R_d l_d \Lambda_d}{2\sigma_d^2} (F_{fm} + F_{am})^2 \quad (2-50)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{62})_{22} = \frac{\pi R_d l_d \Lambda_d}{2\sigma_d^2} (F_{fm} + F_{am})^2 \quad (2-51)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{62})_{kp} = 0 \quad (k, p = 3, 4) \quad (2-52)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{k}}_{61})_{13} &= (\bar{\mathbf{k}}_{61})_{14} = (\bar{\mathbf{k}}_{61})_{23} = (\bar{\mathbf{k}}_{61})_{24} = (\bar{\mathbf{k}}_{61})_{31} = (\bar{\mathbf{k}}_{61})_{32} = (\bar{\mathbf{k}}_{61})_{41} \\ &= (\bar{\mathbf{k}}_{61})_{42} = (\bar{\mathbf{k}}_{62})_{13} = (\bar{\mathbf{k}}_{62})_{14} = (\bar{\mathbf{k}}_{62})_{23} = (\bar{\mathbf{k}}_{62})_{24} \\ &= (\bar{\mathbf{k}}_{62})_{31} = (\bar{\mathbf{k}}_{62})_{32} = (\bar{\mathbf{k}}_{62})_{41} = (\bar{\mathbf{k}}_{62})_{42} = 0 \end{aligned} \quad (2-53)$$

$$(\bar{\mathbf{k}}_{06})_1 = (\bar{\mathbf{k}}_{06})_2 = (\bar{\mathbf{k}}_{06})_3 = (\bar{\mathbf{k}}_{06})_4 = 0 \quad (2-54)$$

其中 E_6 为直流电动机轴材料的弹性模量, G_6 为直流电动机轴材料的剪切弹性模量, $I_6(x)$ 为直流电动机轴抗弯截面惯性矩分布函数, $J_6(x)$ 为直流电动机轴极惯性矩分布函数。

2.1.4 电动机单元的运动微分方程

将拉格朗日方程用于电动机单元时可写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{E1}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_1} \right) - \frac{\partial T_{E1}}{\partial \mathbf{u}_1} + \frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{u}_1} = \bar{\mathbf{f}}_1 + \bar{\mathbf{q}}_1 \quad (2-55)$$

式中: $\bar{\mathbf{f}}_1$ 为外加载荷的广义力列阵; $\bar{\mathbf{q}}_1$ 为与该单元相连接的其他单元给予该单元的作用力列阵。

将电动机动能表达式和势能表达式代入式(2-55), 并采用黏滞阻尼理论计入阻尼的影响, 得到电动机单元的运动微分方程为

$$\bar{\mathbf{m}}_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{c}}_1 \dot{\mathbf{u}}_1 + (\bar{\mathbf{k}}_1 + \bar{\mathbf{k}}_{01}) \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{f}}_1 + \bar{\mathbf{q}}_1 - \bar{\mathbf{m}}_1 \ddot{\mathbf{u}}_{1r} - (\bar{\mathbf{k}}_1 + \bar{\mathbf{k}}_{01}) \bar{\mathbf{E}}_0 \quad (2-56)$$

式中: $\bar{\mathbf{c}}_1$ 为该电动机单元的阻尼矩阵; $\ddot{\mathbf{u}}_{1r}$ 为该电动机单元的刚体加速度列阵。

2.2 金属材料梁单元

2.2.1 位移模式

连杆机构中的构件一般为细长件,适宜用梁单元进行有限元模拟。金属材料梁单元简图如图 2-6 所示。

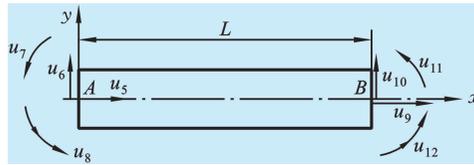


图 2-6 金属材料梁单元简图

图 2-6 所示的金属材料梁单元中性层中轴线上任一点的弹性横向位移 $W_2(\bar{x}, t)$ 和弹性纵向位移 $V_2(\bar{x}, t)$ 可分别表示为

$$\begin{cases} W_2(\bar{x}, t) = \sum_i \phi_i(\bar{x}) u_i(t) & (i = 6, 7, 8, 10, 11, 12) \\ V_2(\bar{x}, t) = \sum_j \phi_j(\bar{x}) u_j(t) & (j = 5, 9) \end{cases} \quad (2-57)$$

式中: $\phi_5(\bar{x}), \phi_6(\bar{x}), \dots, \phi_{12}(\bar{x})$ 为型函数; \bar{x} 为梁单元局部坐标系中的坐标; u_5, u_9 分别为节点 A、B 处的纵向位移; u_6, u_{10} 分别为节点 A、B 处的横向位移; u_7, u_{11} 分别为节点 A、B 处轴线的弹性转角; u_8, u_{12} 分别为节点处轴线的曲率; 也就是说, 梁单元的广义坐标向量可表示为

$$\mathbf{u}_2 = [u_5 \quad u_6 \quad \dots \quad u_{12}]^T$$

由文献[16]可知, 平面弹性连杆机构的梁单元, 其型函数可以选取与弹性运动频率无关的简单位置多项式来模拟, 且其轴向和横向位移函数分别取为位置的线性式和五次多项式^[16], 即型函数可表示为

$$\begin{aligned} \phi_5(\bar{x}) &= 1 - e_2 \\ \phi_6(\bar{x}) &= 1 - 10e_2^3 + 15e_2^4 - 6e_2^5 \\ \phi_7(\bar{x}) &= l_2(e_2 - 6e_2^3 + 8e_2^4 - 3e_2^5) \\ \phi_8(\bar{x}) &= \frac{l_2^2(e_2^2 - 3e_2^3 + 3e_2^4 - e_2^5)}{2} \\ \phi_9(\bar{x}) &= e_2 \\ \phi_{10}(\bar{x}) &= 10e_2^3 - 15e_2^4 + 6e_2^5 \\ \phi_{11}(\bar{x}) &= l_2(-4e_2^3 + 7e_2^4 - 3e_2^5) \\ \phi_{12}(\bar{x}) &= \frac{l_2^2(e_2^3 - 2e_2^4 + e_2^5)}{2} \end{aligned}$$

式中: $e_2 = \frac{\bar{x}}{l_2}$, l_2 为梁单元长度。



2.2.2 梁单元动能

在简化方法中,考虑梁单元动能时假定每个截面处的质量都集中在轴线上,且忽略截面转动的动能,则梁单元的动能表达式可写为

$$T_{E2} = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} m_2(\bar{x}) \cdot [\dot{W}_{2a}(\bar{x}, t)]^2 d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} m_2(\bar{x}) \cdot [\dot{V}_{2a}(\bar{x}, t)]^2 d\bar{x} \quad (2-58)$$

式中: l_2 为梁单元长度; $m_2(\bar{x})$ 为梁单元的质量分布函数,对于等截面梁单元, $m_2(\bar{x}) = \rho_2 A_2$, ρ_2 为梁单元材料密度, A_2 为梁单元横截面积; $\dot{W}_{2a}(\bar{x}, t)$ 为梁单元任意截面 \bar{x} 处的横向绝对速度; $\dot{V}_{2a}(\bar{x}, t)$ 为梁单元任意截面 \bar{x} 处的轴向绝对速度。

将式(2-57)及相关型函数代入式(2-58)中,得

$$T_{E2} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_{2a}^T \bar{\mathbf{m}}_2 \dot{\mathbf{u}}_{2a} \quad (2-59)$$

式中: $\dot{\mathbf{u}}_{2a}$ 为梁单元节点的绝对速度向量; $\bar{\mathbf{m}}_2$ 为梁单元的质量矩阵,且

$$(\bar{\mathbf{m}}_2)_{ij} = \rho_2 A_2 \int_0^{l_2} \phi_i(\bar{x}) \phi_j(\bar{x}) d\bar{x} \quad (i, j = 6, 7, \dots, 12)$$

$$(\bar{\mathbf{m}}_2)_{kp} = \rho_2 A_2 \int_0^{l_2} \phi_k(\bar{x}) \phi_p(\bar{x}) d\bar{x} \quad (k, p = 5, 9)$$

2.2.3 梁单元势能

为引入梁的几何非线性问题,除考虑弯曲变形能和由于梁的纵向位移而产生的拉压变形能外,还考虑由于梁的横向位移而产生的附加拉压变形能,此时梁单元的应变能可表示为

$$N_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\sigma}_2 d\Omega \quad (2-60)$$

式中: Ω 为单元体积; $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 分别为梁单元在局部坐标系中的应变和应力向量,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_2 = [\varepsilon_{2\bar{x}} & \varepsilon_{2\bar{y}} & \varepsilon_{2\bar{z}} & \gamma_{2\bar{y}\bar{z}} & \gamma_{2\bar{z}\bar{x}} & \gamma_{2\bar{x}\bar{y}}]^T \\ \boldsymbol{\sigma}_2 = [\sigma_{2\bar{x}} & \sigma_{2\bar{y}} & \sigma_{2\bar{z}} & \tau_{2\bar{y}\bar{z}} & \tau_{2\bar{z}\bar{x}} & \tau_{2\bar{x}\bar{y}}]^T \end{cases} \quad (2-61)$$

且

$$\varepsilon_{2\bar{x}} = V_2' + \frac{1}{2} (W_2')^2$$

$$\gamma_{2\bar{x}\bar{z}} = W_2'$$

$$\varepsilon_{2\bar{y}} = \varepsilon_{2\bar{z}} = \gamma_{2\bar{x}\bar{y}} = \gamma_{2\bar{y}\bar{z}} = 0$$

式中: V_2' 为由于梁发生纵向位移而产生的拉压应变,且 V_2' 是 V_2 对 \bar{x} 的一阶偏导数; $\frac{1}{2} (W_2')^2$ 为由于梁的横向位移而产生的附加拉压应变,且 W_2' 是 W_2 对 \bar{x} 的一阶偏导数。

将式(2-61)及相关型函数代入式(2-60),得

$$N_2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_2^T \bar{\mathbf{k}}_2 \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} E_2 A_2 \left[V_2' + \frac{1}{2} (W_2')^2 \right] (W_2')^2 dx \quad (2-62)$$

式中:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{2p} &= \int_0^{l_2} E_2 A_2 \bar{\mathbf{g}}_{2p}^T \bar{\mathbf{g}}_2 \bar{\mathbf{k}}_{2a} dx \quad (p = 1, 2, \dots, 8) \\ (\bar{\mathbf{g}}_{2kl})_{(k-4)(l-4)} &= (\bar{\mathbf{g}}_{2kl})_{(l-4)(k-4)} = 1 \\ (\bar{\mathbf{k}}_{2kl})_{ij} &= (\bar{\mathbf{k}}_{2kl})_{ji} = \int_0^{l_2} E_2 A_2 \phi_k' \phi_l' \phi_{(i+4)}' \phi_{(j+4)}' dx \quad (i, j = 2, 3, \dots, 8) \end{aligned}$$

其余各项为零。

2.2.4 梁单元的运动微分方程

将拉格朗日方程用于三维编织复合材料梁单元时可写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{E2}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_2} \right) - \frac{\partial T_{E2}}{\partial \mathbf{u}_2} + \frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{u}_2} = \bar{\mathbf{f}}_2 + \bar{\mathbf{q}}_2 \quad (2-63)$$

式中: $\bar{\mathbf{f}}_2$ 为外加载荷的广义力列阵; $\bar{\mathbf{q}}_2$ 为与该单元相连接的其他单元给予该单元的作用力列阵。

将动能表达式(2-59)和势能表达式(2-62)代入式(2-63)中,并采用黏滞阻尼理论计入阻尼的影响,得到金属材料梁单元的运动微分方程:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}}_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{c}}_2 \dot{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{k}}_2 \mathbf{u}_2 &= \bar{\mathbf{f}}_2 + \bar{\mathbf{q}}_2 - \bar{\mathbf{m}}_2 \ddot{\mathbf{u}}_{2r} + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^8 \mathbf{u}_2^T \bar{\mathbf{g}}_{2p} \bar{\mathbf{k}}_{2p} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \mathbf{u}_2^T \bar{\mathbf{k}}_{2p} \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{g}}_{2p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{u}_2^T \bar{\mathbf{g}}_{2kl} \mathbf{u}_2 \bar{\mathbf{k}}_{2kl} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \bar{\mathbf{g}}_{2kl} \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T \bar{\mathbf{k}}_{2kl} \mathbf{u}_2 \right) \end{aligned} \quad (2-64)$$

式中: $\bar{\mathbf{c}}_2$ 为该梁单元的阻尼矩阵; $\ddot{\mathbf{u}}_{2r}$ 为该梁单元的刚度加速度列阵; ε 表示一小量。

2.3 三维编织复合材料梁单元

纤维增强复合材料是由增强纤维和基体组成的复合材料,纤维一般为碳纤维、硼纤维等,基体一般为聚合物、金属等。三维编织复合材料三维四向形式^[79]的基本纤维结构如图 2-7 所示,分析中可采用图 2-8 所示的几何单胞^[80],其中四束编织纱处于单胞的对角线方向,在单胞中心 O 点相交。各编织纱均与 x 轴成 α 角(称为编织角),在 Oyz 平面内的投影与 y 轴成 β 角。图 2-8 中所画为第一向编织纱的 α 与 β 角。采用层合板类推法分析此种材料的刚度和阻尼特性可知,该材料可视为由四个单向纤维复合材料部分叠合形成,其刚度由各部分刚度按体积分数叠加。

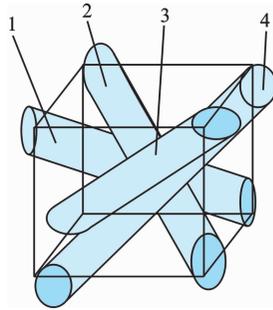


图 2-7 三维编织复合材料的三维四向纤维结构

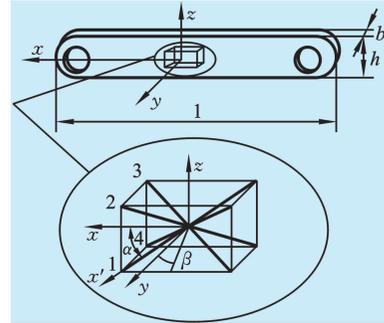


图 2-8 几何单胞

2.3.1 单元位移模式

对于图 2-9 所示的三维编织复合材料梁单元,其中性层中轴线上任一点的弹性

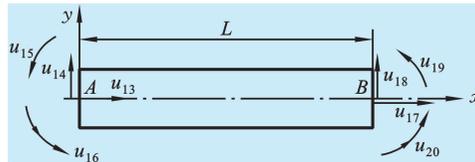


图 2-9 三维编织复合材料梁单元

横向位移 $W_3(\bar{x}, t)$ 和弹性纵向位移 $V_3(\bar{x}, t)$ 可分别表示为^[16]

$$\begin{cases} W_3(\bar{x}, t) = \sum_i \phi_i(\bar{x}) u_i(t) & (i = 14, 15, \dots, 20) \\ V_3(\bar{x}, t) = \sum_j \phi_j(\bar{x}) u_j(t) & (j = 13, 17) \end{cases} \quad (2-65)$$

式中: $\phi_{13}(\bar{x}), \phi_{14}(\bar{x}), \dots, \phi_{20}(\bar{x})$ 为型函数; \bar{x} 为梁单元局部坐标系中的坐标; u_{13}, u_{17} 为节点处的纵向位移, u_{14}, u_{18} 为节点处的横向位移, u_{15}, u_{19} 为节点处轴线的弹性转角, u_{16}, u_{20} 为节点处轴线的曲率, 即该梁单元的广义坐标向量为

$$\mathbf{u}_3 = [u_{13} \quad u_{14} \quad \dots \quad u_{20}]^T$$

三维编织复合材料梁单元型函数可以选取与弹性运动频率无关的简单位置多项式来模拟, 且其轴向和横向位移函数分别取为位置的线性式和五次多项式, 即型函数可表示为

$$\begin{aligned} \phi_{13}(\bar{x}) &= 1 - e_3 \\ \phi_{14}(\bar{x}) &= 1 - 10e_3^3 + 15e_3^4 - 6e_3^5 \\ \phi_{15}(\bar{x}) &= l_3(e_3 - 6e_3^3 + 8e_3^4 - 3e_3^5) \\ \phi_{16}(\bar{x}) &= \frac{l_3^2(e_3^2 - 3e_3^3 + 3e_3^4 - 5e_3^5)}{2} \\ \phi_{17}(\bar{x}) &= e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{18}(\bar{x}) &= 10e_3^3 - 15e_3^4 + 6e_3^5 \\ \phi_{19}(\bar{x}) &= l_3(-4e_3^3 + 7e_3^4 - 3e_3^5) \\ \phi_{20}(\bar{x}) &= \frac{l_3^2(e_3^3 - 2e_3^4 + e_3^5)}{2}\end{aligned}$$

式中: $e_3 = \frac{\bar{x}}{l_3}$; l_3 为梁单元的长度。

2.3.2 单元动能

在简化方法中考虑梁单元动能时,假定每个截面处的质量都集中在轴线上,且忽略截面转动的动能,则梁单元的动能表达式可写为

$$T_{E3} = \frac{1}{2} \int_0^{l_3} m_3(\bar{x}) \cdot [\dot{W}_{3a}(\bar{x}, t)]^2 d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^{l_3} m_3(\bar{x}) \cdot [\dot{V}_{3a}(\bar{x}, t)]^2 d\bar{x} \quad (2-66)$$

式中: l_3 为梁单元长度; $m_3(\bar{x})$ 为梁单元的质量分布函数,对于等截面梁单元, $m_3(\bar{x}) = \rho_3 A_3$, ρ_3 为梁单元材料的平均密度,且 $\rho_3 = \rho_{3f} v_{3f} + \rho_{3m} v_{3m}$, ρ_{3f}, ρ_{3m} 分别为纤维和基体的密度, v_{3f}, v_{3m} 分别为纤维和基体的体积百分比, A_3 为梁单元的横截面积; $\dot{W}_{3a}(\bar{x}, t)$ 为梁单元任意截面处的横向绝对速度; $\dot{V}_{3a}(\bar{x}, t)$ 为梁单元任意截面处的轴向绝对速度。

将式(2-65)及相关型函数代入式(2-66)中,有

$$T_{E3} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_{3a}^T \bar{\mathbf{m}}_3 \dot{\mathbf{u}}_{3a} \quad (2-67)$$

式中: $\dot{\mathbf{u}}_{3a}$ 为梁单元节点处的绝对速度向量; $\bar{\mathbf{m}}_3$ 为梁单元的质量矩阵,且

$$\begin{aligned}(\bar{\mathbf{m}}_3)_{ij} &= \rho_3 A_3 \int_0^{l_3} \phi_i(\bar{x}) \phi_j(\bar{x}) d\bar{x} \quad (i, j = 14, 15, \dots, 20) \\ (\bar{\mathbf{m}}_3)_{kp} &= \rho_3 A_3 \int_0^{l_3} \phi_k(\bar{x}) \phi_p(\bar{x}) d\bar{x} \quad (k, p = 13, 17)\end{aligned}$$

2.3.3 单元势能

为引入梁的几何非线性问题,除考虑弯曲变形能和由于梁的纵向位移而产生的拉压变形能外,还考虑由于梁的横向位移而产生的附加拉压变形能,此时梁单元的应变能可表示为

$$N_3 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_3^T \boldsymbol{\sigma}_3 d\Omega \quad (2-68)$$

式中: Ω 为单元体积; $\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\sigma}_3$ 分别为梁单元在局部坐标系中的应变和应力向量,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \{ \varepsilon_{3\bar{x}} & \varepsilon_{3\bar{y}} & \varepsilon_{3\bar{z}} & \gamma_{3\bar{y}\bar{z}} & \gamma_{3\bar{z}\bar{x}} & \gamma_{3\bar{x}\bar{y}} \}^T \\ \boldsymbol{\sigma}_3 = \{ \sigma_{3\bar{x}} & \sigma_{3\bar{y}} & \sigma_{3\bar{z}} & \tau_{3\bar{y}\bar{z}} & \tau_{3\bar{z}\bar{x}} & \tau_{3\bar{x}\bar{y}} \}^T \end{cases} \quad (2-69)$$

且



$$\begin{cases} \varepsilon_{3\bar{x}} = V'_3 + \frac{1}{2}(W'_3)^2 \\ \gamma_{3\bar{x}\bar{z}} = W'_3 \\ \varepsilon_{3\bar{y}} = \varepsilon_{3\bar{z}} = \gamma_{3\bar{x}\bar{y}} = \gamma_{3\bar{y}\bar{z}} = 0 \end{cases} \quad (2-70)$$

式中： $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 分别为梁单元局部坐标系中的坐标； V'_3 为由于梁的纵向位移而产生的拉压应变，且 V'_3 是 V_3 对 \bar{x} 的一阶偏导数； $\frac{1}{2}(W'_3)^2$ 为由于梁的横向位移而产生的附加拉压应变，且 W'_3 是 W_3 对 \bar{x} 的一阶偏导数。

梁单元中第 j 部分的应变能表示为

$$N_{3j} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \boldsymbol{\varepsilon}_{3j}^T \boldsymbol{\sigma}_{3j} d\Omega_j \quad (2-71)$$

式中： Ω_j 为四分之一单元体积； $\boldsymbol{\varepsilon}_{3j}, \boldsymbol{\sigma}_{3j}$ 为第 j 部分在其正轴坐标系 $Ox'y'z'$ 中的应变和应力向量，

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{3j} = [\varepsilon_{3x'} & \varepsilon_{3y'} & \varepsilon_{3z'} & \gamma_{3y'z'} & \gamma_{3z'x'} & \gamma_{3x'y'}]^T \\ \boldsymbol{\sigma}_{3j} = [\sigma_{3x'} & \sigma_{3y'} & \sigma_{3z'} & \tau_{3y'z'} & \tau_{3z'x'} & \tau_{3x'y'}]^T \end{cases} \quad (2-72)$$

三维编织复合材料每一部分均可视为横观各向同性的，所以第 j 部分在其正轴坐标系中的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}_{3j} = \mathbf{C}_{3j} \boldsymbol{\varepsilon}_{3j} \quad (2-73)$$

$$\mathbf{C}_{3j} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2-74)$$

式中：

$$\begin{aligned} C_{11} &= (1 - \mu_{23}\mu_{23})E_{11}/K, & C_{12} &= (1 + \mu_{23})\mu_{21}E_{11}/K \\ C_{22} &= C_{33} = (1 - \mu_{21}\mu_{12})E_{22}/K, & C_{23} &= (\mu_{23} + \mu_{12}\mu_{21})E_{22}/K \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12}, & K &= 1 - 2\mu_{12}\mu_{21}(1 + \mu_{23}) - \mu_{23}\mu_{23} \end{aligned}$$

以上诸式中，弹性常数 E_{ij}, G_{ij} 和 μ_{ij} 需根据纤维和基体的弹性常数、纤维体积比及复合材料的细观结构参数按复合材料细观力学计算^[81]。

第 j 部分在梁单元局部坐标系 $Oxyz$ 中的应变可由弹性力学的应变转变关系求得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{3j} = \mathbf{L}_{3j} \boldsymbol{\varepsilon}_3 \quad (2-75)$$

式中：应变转换矩阵 \mathbf{L}_{3j} 由梁单元局部坐标系 $Oxyz$ 和第 j 部分的正轴坐标系 $O'x'y'z'$ 之间的方向余弦决定。

将式(2-65)、式(2-70)及相关型函数代入式(2-72)，经整理，得到应变与节点位

移的关系式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \mathbf{S}_3 \mathbf{u}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3a} \mathbf{u}_3 \mathbf{S}_{03} \quad (2-76)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_3 &= [\mathbf{S}_{31} \quad \mathbf{S}_{32} \quad \mathbf{S}_{33} \quad \mathbf{S}_{34} \quad \mathbf{S}_{35} \quad \mathbf{S}_{36}]^T \\ \mathbf{S}_{31} &= [\phi'_{13}(\bar{x}) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \phi'_{17}(\bar{x}) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{S}_{35} &= [0 \quad \phi'_{14}(\bar{x}) \quad \phi'_{15}(\bar{x}) \quad \phi'_{16}(\bar{x}) \quad 0 \quad \phi'_{18}(\bar{x}) \quad \phi'_{19}(\bar{x}) \quad \phi'_{20}(\bar{x})]^T \\ \mathbf{S}_{32} &= \mathbf{S}_{33} = \mathbf{S}_{34} = \mathbf{S}_{36} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{S}_{03} &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ (\bar{\mathbf{k}}_{3a})_{ij} &= \phi'_{(i+12)} \phi'_{(j+12)} \quad (i, j = 2, 3, 4, 6, 7, 8) \\ (\mathbf{S}_{03})_{kp} &= (\mathbf{S}_{03})_{pk} = 0 \quad (k = 1, 5; p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \end{aligned}$$

将式(2-73)、式(2-74)、式(2-75)、式(2-76)代入式(2-71),经整理得第 j 部分的应变能为

$$\begin{aligned} N_{3j} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3j} \mathbf{u}_3 + \frac{1}{4} \int_{\Omega_j} \mathbf{u}_3^T \mathbf{S}_{3j}^T \mathbf{L}_{3j}^T \mathbf{C}_{3j} \mathbf{L}_{3j} \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3a} \mathbf{u}_3 \mathbf{S}_{03} \, d\Omega_j \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{03}^T \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3a}^T \mathbf{u}_3 \mathbf{L}_{3j}^T \mathbf{C}_{3j} \mathbf{L}_{3j} \mathbf{S}_{3j} \mathbf{u}_3 \, d\Omega_j \\ &\quad + \frac{1}{8} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{03}^T \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3a}^T \mathbf{u}_3 \mathbf{L}_{3j}^T \mathbf{C}_{3j} \mathbf{L}_{3j} \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3a} \mathbf{u}_3 \mathbf{S}_{03} \, d\Omega_j \end{aligned} \quad (2-77)$$

这里

$$\bar{\mathbf{k}}_{3j} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{3j}^T \mathbf{L}_{3j}^T \mathbf{C}_{3j} \mathbf{L}_{3j} \mathbf{S}_{3j} \, d\Omega_j$$

由于单元势能为四个单向纤维部分的势能之和,因而单元势能可表示为

$$\begin{aligned} N_3 &= \sum_{j=1}^4 N_{3j} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_3 \mathbf{u}_3 + \sum_{j=1}^4 \left(\frac{1}{4} \int_{\Omega_j} \mathbf{u}_3^T \mathbf{S}_{3j}^T \mathbf{L}_{3j}^T \mathbf{C}_{3j} \mathbf{L}_{3j} \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3a}^T \mathbf{u}_3 \mathbf{S}_{03} \, d\Omega_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{03}^T \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3a}^T \mathbf{u}_3 \mathbf{L}_{3j}^T \mathbf{C}_{3j} \mathbf{L}_{3j} \mathbf{S}_{3j} \mathbf{u}_3 \, d\Omega_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{03}^T \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3a}^T \mathbf{u}_3 \mathbf{L}_{3j}^T \mathbf{C}_{3j} \mathbf{L}_{3j} \mathbf{u}_3^T \bar{\mathbf{k}}_{3a} \mathbf{u}_3 \mathbf{S}_{03} \, d\Omega_j \right) \end{aligned} \quad (2-78)$$

其中单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{k}}_3 = \bar{\mathbf{k}}_{31} + \bar{\mathbf{k}}_{32} + \bar{\mathbf{k}}_{33} + \bar{\mathbf{k}}_{34} \quad (2-79)$$

2.3.4 单元阻尼模型

根据定义,比阻尼容量(SDC) ψ ^[82]可表示为

$$\psi = \frac{\Delta W}{W_m} \quad (2-80)$$

式中: ΔW 为任一个应力周期内的耗散能量; W_m 为此周期内的最大应变能。



三维编织复合材料梁单元可视为由复合材料部分叠合而成,各部分的单位能量耗散应分为六个分量,即

$$\Delta W_j = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \Delta W_4 + \Delta W_5 + \Delta W_6 \quad (2-81)$$

根据比阻尼容量的定义,式(2-81)中的每一项可表示为

$$\Delta W_i = \frac{1}{2} \psi_i \varepsilon_i \sigma_i \quad (2-82)$$

式中: ψ_1 为 0° 单向梁弯曲时的比阻尼容量; ψ_2, ψ_3 为 90° 单向梁弯曲时的比阻尼容量, $\varphi_2 = \varphi_3$; ψ_4 为横向剪切比阻尼容量; ψ_5, ψ_6 是纵向剪切比阻尼容量, $\psi_5 = \psi_6$ 。这些 ψ_i 值由实验确定或根据有关资料选取。

考虑式(2-82),梁单元第 j 部分的耗散能量可写为

$$\Delta W_j = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{3j}^T \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\sigma}_{3j} d\Omega \quad (2-83)$$

式中: $\boldsymbol{\psi}$ 为阻尼矩阵,且

$$\boldsymbol{\psi} = \text{diag} [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4 \quad \psi_5 \quad \psi_6] \quad (2-84)$$

令 $\boldsymbol{Q}_j = \boldsymbol{S}_3^T \boldsymbol{L}_j^T \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{H}_j \boldsymbol{L}_j \boldsymbol{S}_3$,则式(2-83)可写为

$$\Delta W_j = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{Q}_j \boldsymbol{u} d\Omega = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}_{\dot{q}_j} \boldsymbol{u} \quad (2-85)$$

式中:

$$\boldsymbol{K}_{\dot{q}_j} = \int_{\Omega} \boldsymbol{Q}_j d\Omega$$

因此,梁单元的总耗散能量为

$$\Delta W = \sum_{j=1}^4 \Delta W_j = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}_{\dot{q}} \boldsymbol{u} \quad (2-86)$$

这样,根据式(2-80)即可求出三维编织复合材料梁单元的比阻尼容量。对于小阻尼线性系统,其各阶模态的阻尼率 ξ_r 为

$$\xi_r = \frac{\psi_r}{4\pi} \quad (2-87)$$

2.3.5 梁单元的运动微分方程

拉格朗日方程用于三维编织复合材料梁单元时可写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{E3}}{\partial \dot{\boldsymbol{u}}_3} \right) - \frac{\partial T_{E3}}{\partial \boldsymbol{u}_3} + \frac{\partial N_3}{\partial \boldsymbol{u}_3} = \bar{\boldsymbol{f}}_3 + \bar{\boldsymbol{q}}_3 \quad (2-88)$$

式中: $\bar{\boldsymbol{f}}_3$ 为外加载荷的广义力列阵; $\bar{\boldsymbol{q}}_3$ 为与该单元相连接的其他单元给予该单元的作用力列阵。

将动能表达式(2-67)和势能表达式(2-78)代入式(2-88)中,并采用黏滞阻尼理论计入阻尼的影响,得到三维编织复合材料梁单元的运动微分方程为

$$\begin{aligned} \bar{m}_3 \ddot{u}_3 + \bar{c}_3 \dot{u}_3 + \bar{k}_3 u_3 = \bar{f}_3 + \bar{q}_3 - \bar{m}_3 \ddot{u}_{3r} + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^8 u_3^T \bar{g}_{3p} \bar{k}_{3p} u_3 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 u_3^T \bar{k}_{3p} u_{3p} \bar{g}_{3p} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l u_3^T \bar{g}_{3kl} u_3 \bar{k}_{3kl} u_3 + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \bar{g}_{3kl} u_3 u_3^T \bar{k}_{3kl} u_3 \right) \quad (2-89) \end{aligned}$$

式中： \bar{c}_3 为该梁单元的阻尼矩阵； \ddot{u}_{3r} 为该梁单元的刚度加速度列阵； $p = 1, 2, \dots, 8, k, l = 14, 15, \dots, 20$ ，且 $l \geq k$ ； ε 表示一小量； $\bar{k}_{3p}, \bar{k}_{3kl}, \bar{g}_{3kl}$ 皆为 8×8 阶矩阵； \bar{g}_3, \bar{g}_{3p} 皆为八阶向量。且有

$$\begin{aligned} \bar{g}_3 &= S_{3j}^T L_{3j}^T C_{3j} L_{3j} S_{03} \quad (j = 2, 3, \dots, 8) \\ (\bar{g}_{3p})_p &= 1 \\ (\bar{k}_{3a})_{ij} &= \phi'_{i+12} \phi'_{j+12} \quad (i, j = 2, 3, \dots, 8) \\ \bar{k}_{3p} &= \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega_j} \bar{g}_{3p}^T \bar{g}_3 \bar{k}_{3a} d\Omega_j \quad (p = 1, 2, \dots, 8; j = 2, 3, \dots, 8) \\ (\bar{g}_{3kl})_{(k-12)(l-12)} &= (\bar{g}_{3kl})_{(l-12)(k-12)} = 1 \\ (\bar{k}_{3kl})_{mn} &= (\bar{k}_{3kl})_{nm} = \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega_j} S_{03}^T L_{3j}^T C_{3j} L_{3j} S_{03} \phi'_k \phi'_l \phi'_{m+12} \phi'_{n+12} d\Omega_j \quad (m, n = 2, 3, \dots, 8) \end{aligned}$$

其余各项为零。

2.4 对称叠层复合材料梁单元

在工程实际中应用的纤维增强复合材料大部分是以层合板的形式出现的，材料形态多是由复合材料片黏结得到的层状的板、壳等。而对称叠层复合材料是在复合材料层合板中广泛应用的一类，它的几何特性和材料特性关于中性面对称。对称叠层复合材料结构如图 2-10 所示。

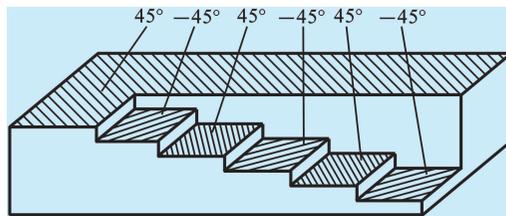


图 2-10 对称叠层复合材料 $([\pm 45^\circ]_{3a})$

2.4.1 位移模式

对于图 2-11 所示的对称叠层复合材料梁单元，其中性层轴线上任一点的横向位移 $W_4(\bar{x}, t)$ 和纵向位移 $V_4(\bar{x}, t)$ 可分别表示为



$$\begin{cases} W_4(\bar{x}, t) = \sum_i \phi_i(\bar{x}) u_i(t) & (i = 22, 23, \dots, 28) \\ V_4(\bar{x}, t) = \sum_j \phi_j(\bar{x}) u_j(t) & (j = 21, 25) \end{cases} \quad (2-90)$$

式中: $\phi_{21}(\bar{x}), \phi_{22}(\bar{x}), \dots, \phi_{28}(\bar{x})$ 为型函数; \bar{x} 为梁单元局部坐标系中的坐标; u_{21}, u_{25} 为节点处的纵向位移, u_{22}, u_{26} 为节点处的横向位移, u_{23}, u_{27} 为节点处轴线的弹性转角, u_{24}, u_{28} 为节点处轴线的曲率, 即该梁单元的广义坐标向量为

$$\mathbf{u}_4 = [u_{21} \quad u_{22} \quad \dots \quad u_{28}]^T$$

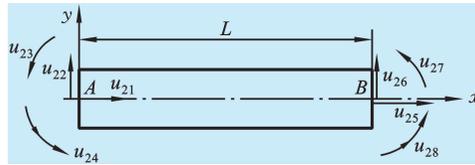


图 2-11 对称叠层复合材料梁单元

对称叠层复合材料梁单元型函数可以选取与弹性运动频率无关的简单位置多项式来模拟, 且其轴向和横向位移函数分别取为位置的线性式和五次多项式, 即型函数可表示为

$$\begin{aligned} \phi_{21}(\bar{x}) &= 1 - e_4 \\ \phi_{22}(\bar{x}) &= 1 - 10e_4^3 + 15e_4^4 - 6e_4^5 \\ \phi_{23}(\bar{x}) &= l_4(e_4 - 6e_4^3 + 8e_4^4 - 3e_4^5) \\ \phi_{24}(\bar{x}) &= \frac{l_4^2(e_4^2 - 3e_4^3 + 3e_4^4 - 5e_4^5)}{2} \\ \phi_{25}(\bar{x}) &= e_4 \\ \phi_{26}(\bar{x}) &= 10e_4^3 - 15e_4^4 + 6e_4^5 \\ \phi_{27}(\bar{x}) &= l_4(-4e_4^3 + 7e_4^4 - 3e_4^5) \\ \phi_{28}(\bar{x}) &= \frac{l_4^2(e_4^3 - 2e_4^4 + e_4^5)}{2} \end{aligned}$$

式中: $e_4 = \frac{\bar{x}}{l_4}$; l_4 为梁单元的长度。

2.4.2 单元动能

在简化方法中, 考虑梁单元动能时假定每个截面处的质量都集中在轴线上, 且忽略截面转动的动能, 则梁单元的动能表达式可写为

$$T_{E4} = \frac{1}{2} \int_0^{l_4} m_4(\bar{x}) \cdot [\dot{W}_{4a}(\bar{x}, t)]^2 d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^{l_4} m_4(\bar{x}) \cdot [\dot{V}_{4a}(\bar{x}, t)]^2 d\bar{x} \quad (2-91)$$

式中: l_4 为梁单元长度; $m_4(\bar{x})$ 为梁单元的质量分布函数, 对于等截面梁单元,

$m_4(\bar{x}) = \rho_4 A_4$, ρ_4 为梁单元材料的平均密度, 且 $\rho_4 = \sum_{k=1}^l \rho_4^{(k)} \frac{t^{(k)}}{h}$, 其中 $\rho_4^{(k)}$ 为第 k 层材料的平均密度, 且 $\rho_4 = \rho_{4f} v_{4f} + \rho_{4m} v_{4m}$, ρ_{4f} 、 ρ_{4m} 分别为第 k 层纤维和基体的密度, v_{4f} 、 v_{4m} 分别为第 k 层纤维和基体的体积百分比, l 为层数, t 为单层厚度, h 为每层的厚度, A_4 为梁单元横截面积; $\dot{W}_{4a}(\bar{x}, t)$ 为梁单元任意截面处的横向绝对速度; $\dot{V}_{4a}(\bar{x}, t)$ 为梁单元任意截面处的轴向绝对速度。

将式(2-90)及相关型函数代入式(2-91)中有

$$T_{E4} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_{4a}^T \bar{\mathbf{m}}_4 \dot{\mathbf{u}}_{4a} \quad (2-92)$$

式中: $\dot{\mathbf{u}}_{4a}$ 为梁单元节点的绝对速度向量; $\bar{\mathbf{m}}_4$ 为梁单元的质量矩阵, 且

$$(\bar{\mathbf{m}}_4)_{ij} = \rho_4 A_4 \int_0^l \phi_i(\bar{x}) \phi_j(\bar{x}) d\bar{x} \quad (i, j = 22, 23, \dots, 28)$$

$$(\bar{\mathbf{m}}_4)_{kp} = \rho_4 A_4 \int_0^l \phi_k(\bar{x}) \phi_p(\bar{x}) d\bar{x} \quad (k, p = 21, 25)$$

2.4.3 单元势能

为引入梁的几何非线性问题, 除考虑弯曲变形能和由于梁的纵向位移而产生的拉压变形能外, 还考虑由于梁的横向位移而产生的附加拉压变形能, 此时梁单元的应变能可表示为

$$N_4 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_4^T \boldsymbol{\sigma}_4 d\Omega \quad (2-93)$$

式中: Ω 为单元体积; $\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_4$ 分别为梁单元在局部坐标系中的应变和应力向量。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_4 = \{ \varepsilon_{4\bar{x}} & \varepsilon_{4\bar{y}} & \varepsilon_{4\bar{z}} & \gamma_{4\bar{y}\bar{z}} & \gamma_{4\bar{z}\bar{x}} & \gamma_{4\bar{x}\bar{y}} \}^T \\ \boldsymbol{\sigma}_4 = \{ \sigma_{4\bar{x}} & \sigma_{4\bar{y}} & \sigma_{4\bar{z}} & \tau_{4\bar{y}\bar{z}} & \tau_{4\bar{z}\bar{x}} & \tau_{4\bar{x}\bar{y}} \}^T \end{cases} \quad (2-94)$$

且

$$\varepsilon_{4\bar{x}} = V'_4 + \frac{1}{2} (W'_4)^2$$

$$\gamma_{4\bar{x}\bar{z}} = W'_4$$

$$\varepsilon_{4\bar{y}} = \varepsilon_{4\bar{z}} = \gamma_{4\bar{x}\bar{y}} = \gamma_{4\bar{y}\bar{z}} = 0$$

式中: V'_4 为由于梁的纵向位移而产生的拉压应变, 且 V'_4 是 V_4 对 \bar{x} 的一阶偏导数; $\frac{1}{2} (W'_4)^2$ 为由于梁的横向位移而产生的附加拉压应变, 且 W'_4 是 W_4 对 \bar{x} 的一阶偏导数。

梁单元中第 j 层的应变能表示为

$$W_{4j} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \boldsymbol{\varepsilon}_{4j}^T \boldsymbol{\sigma}_{4j} d\Omega_j \quad (2-95)$$

式中: Ω_j 为第 j 层的体积; $\boldsymbol{\varepsilon}_{4j}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_{4j}$ 为第 j 层在单层材料主轴方向的应变和应力向量, 且



$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{4j} = [\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3]^T \\ \boldsymbol{\sigma}_{4j} = [\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3]^T \end{cases} \quad (2-96)$$

对称叠层复合材料梁单元中每一层都可看成是正交各向异性的单层,在平面应力状态下,第 j 层在其材料主轴方向的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}_{4j} = \mathbf{C}_{4j} \boldsymbol{\varepsilon}_{4j} \quad (2-97)$$

式中: \mathbf{C}_{4j} 为弹性矩阵,且

$$\mathbf{C}_{4j} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (2-98)$$

其中, $Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$, $Q_{12} = \frac{E_1\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$, $Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$, $Q_{66} = G_{12}$, 这里 E_1, E_2 分别是单向板沿纤维方向和垂直于纤维方向上的弹性模量, G_{12} 是单向板在平面内的剪切模量, ν_{12}, ν_{21} 分别是主(轴向)泊松比和次泊松比。

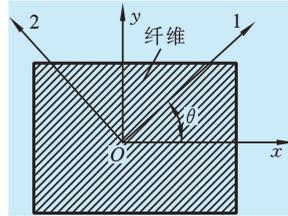


图 2-12 梁单元坐标系与纤维坐标系的转换关系

图 2-12 为对称叠层复合材料梁单元坐标系与纤维坐标系的转换关系示意图, O_{xy} 为梁单元坐标系, O_{12} 为第 k 层纤维坐标系, 1 轴沿纤维方向(材料主轴), 2 轴垂直于纤维方向。 θ 为 x 轴与 1 轴的夹角(纤维铺设角), 第 j 层纤维应变分量在梁单元坐标系与纤维坐标系之间的转换关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{4j} = \mathbf{L}_{4j} \boldsymbol{\varepsilon}_4 \quad (2-99)$$

式中:

$$\mathbf{L}_{4j} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2-100)$$

其中 $m = \cos\theta_0$, $n = \sin\theta_0$, θ_0 为 x 轴和 1 轴的夹角。

将式(2-100)及相关型函数代入式(2-94)得应变与节点位移的关系式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_4 = \mathbf{S}_4 \mathbf{u}_4 + \frac{1}{2} \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4a} \mathbf{u}_4 \mathbf{S}_{04} \quad (2-101)$$

式中:

$$\mathbf{S}_4 = [\mathbf{S}_{41} \quad \mathbf{S}_{42} \quad \mathbf{S}_{43}]^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{41} &= [\phi'_{21}(\bar{x}) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \phi'_{25}(\bar{x}) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{S}_{42} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{S}_{43} &= [0 \quad \phi'_{22}(\bar{x}) \quad \phi'_{23}(\bar{x}) \quad \phi'_{24}(\bar{x}) \quad 0 \quad \phi'_{26}(\bar{x}) \quad \phi'_{27}(\bar{x}) \quad \phi'_{28}(\bar{x})]^T \\ \mathbf{S}_{04} &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ (\bar{\mathbf{k}}_{4a})_{ij} &= \phi'_{i+20} \phi'_{j+20} \quad (i, j = 2, 3, \dots, 8) \\ (\mathbf{S}_{04})_{kp} &= (\mathbf{S}_{04})_{pk} = 0 \quad (k = 1, 5; p = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned}$$

将式(2-97)至式(2-100)代入式(2-93),经整理得第 j 层的应变能为

$$\begin{aligned} N_{4j} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4j} \mathbf{u}_4 + \frac{1}{4} \int_{\Omega_j} \mathbf{u}_4^T \mathbf{S}_{4j}^T \mathbf{L}_{4j}^T \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4a} \mathbf{u}_4 \mathbf{S}_{04} d\Omega_j \\ &+ \frac{1}{4} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{04}^T \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4a}^T \mathbf{u}_4 \mathbf{L}_{4j}^T \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{S}_{4j} \mathbf{u}_4 d\Omega_j \\ &+ \frac{1}{8} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{04}^T \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4a}^T \mathbf{u}_4 \mathbf{L}_{4j}^T \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4a} \mathbf{u}_4 \mathbf{S}_{04} d\Omega_j \end{aligned} \quad (2-102)$$

这里

$$\bar{\mathbf{k}}_{4j} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_4^T \mathbf{L}_{4j}^T \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{S}_4 d\Omega_j$$

单元势能之和为

$$\begin{aligned} N_4 &= \sum_{j=1}^l N_{4j} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_4 \mathbf{u}_4 + \sum_{j=1}^l \left(\frac{1}{4} \int_{\Omega_j} \mathbf{u}_4^T \mathbf{S}_{4j}^T \mathbf{L}_{4j}^T \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4a}^T \mathbf{u}_4 \mathbf{S}_{04} d\Omega_j \right. \\ &+ \frac{1}{4} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{04}^T \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4a}^T \mathbf{u}_4 \mathbf{L}_{4j}^T \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{S}_{4j} \mathbf{u}_4 d\Omega_j \\ &\left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{04}^T \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4a}^T \mathbf{u}_4 \mathbf{L}_{4j}^T \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4a} \mathbf{u}_4 \mathbf{S}_{04} d\Omega_j \right) \end{aligned} \quad (2-103)$$

其中单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{k}}_4 = \sum_{j=1}^l \bar{\mathbf{k}}_{4j} \quad (2-104)$$

2.4.4 单元阻尼模型

这里,材料的阻尼用损耗因子来表达。定义材料的阻尼损耗因子为^[82]

$$\psi = \frac{\Delta W}{2\pi W} \quad (2-105)$$

式中: ΔW 为任一个应力周期内的耗散能量; W 为此周期内的最大应变能。

根据 Adams R. D. 和 Bacon D. G. C. 提出的复合材料层合板的阻尼单元模型^[83],复合材料层合板的每一层每单位面积单元的耗散能量 $\delta(\Delta W)$ 可分解为与直接应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 和 γ_{12} 有关的三个分量,即

$$\delta(\Delta W)_j = \delta(\Delta W_1) + \delta(\Delta W_2) + \delta(\Delta W_{12}) \quad (2-106)$$



式中： ΔW_1 为由纵向正应变 ε_1 引起的耗散能； ΔW_2 为由横向正应变 ε_2 引起的耗散能； ΔW_{12} 为由切应变 γ_{12} 引起的耗散能。

根据阻尼损耗因子的定义，考虑切应变 γ_{12} 引起的耗散能，则式(2-106)可表示为

$$\delta(\Delta W)_j = \pi\psi_1\varepsilon_1\sigma_1 + \pi\psi_2\varepsilon_2\sigma_2 + \pi\psi_{12}\gamma_{12}\tau_{12} + \pi\psi_{13}\gamma_{13}\tau_{13} \quad (2-107)$$

根据式(2-88)、式(2-107)，叠层复合材料梁单元第 k 层耗散能可表示为

$$\Delta W_j = \pi \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_j^T \boldsymbol{\psi}_j \boldsymbol{\sigma}_j d\Omega \quad (2-108)$$

式中： $\boldsymbol{\psi}_j = \text{diag}[\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_{13} \ \psi_{12}]$ ； ψ_1 为轴向阻尼损耗因子， ψ_2 为横向阻尼损耗因子， ψ_{12} 为横向截面内的剪切损耗因子， ψ_{13} 为纵向截面内的剪切损耗因子。

将式(2-91)、式(2-93)代入式(2-108)，整理得

$$\Delta W_j = \pi \int_{\Omega} \mathbf{u}_4^T \mathbf{S}_4^T \mathbf{L}_{4j}^T \boldsymbol{\psi}_j \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{S}_4 \mathbf{u}_4 d\Omega$$

叠层复合材料梁单元的总耗散能为

$$\Delta W = \sum_{j=1}^l \pi \int_{\Omega} \mathbf{u}_4^T \mathbf{S}_4^T \mathbf{L}_{4j}^T \boldsymbol{\psi}_j \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{S}_4 \mathbf{u}_4 d\Omega \quad (2-109)$$

式中： $\boldsymbol{\psi}_j$ 为第 j 层的阻尼损耗因子矩阵； Ω 为单元的第 j 层体积。

单元在大小为 $f = p \sin \omega t$ 的激振力激励下，其稳态响应可表示为^[84]

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_4 \sin(\omega t - \alpha) \quad (2-110)$$

假定弹性材料产生应变时，体内的黏滞阻尼力与速度的一次方成正比，则该阻尼力表示为

$$\mathbf{f}_c = \bar{\mathbf{c}}_4 \dot{\mathbf{x}} \quad (2-111)$$

式中： $\bar{\mathbf{c}}_4$ 是单元的阻尼矩阵。

单元的等效阻尼力在一个周期内所做的功为

$$W_d = \int_0^T \mathbf{f}_c^T \dot{\mathbf{x}} dt \quad (2-112)$$

将式(2-110)、式(2-111)代入式(2-112)得

$$W_d = \dot{\mathbf{u}}_4^T \omega^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - \alpha) \bar{\mathbf{c}}_4^T dt \dot{\mathbf{u}}_4 = \pi \omega \dot{\mathbf{u}}_4^T \bar{\mathbf{c}}_4^T \dot{\mathbf{u}}_4 \quad (2-113)$$

式中： ω 为激振力的频率。

根据等效黏滞阻尼力在一个振动周期内所做的功和单元在振动周期内的耗散能相等的原则^[84]，由式(2-109)和式(2-113)可求得单元阻尼矩阵为

$$\bar{\mathbf{c}}_4^T = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^l \int_{\Omega} \mathbf{S}_4^T \mathbf{L}_{4j}^T \boldsymbol{\psi}_j \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{S}_4 d\Omega \quad (2-114)$$

显然，式(2-114)为对称矩阵，即 $\bar{\mathbf{c}}_4^T = \bar{\mathbf{c}}_4$ 。

2.4.5 梁单元的运动微分方程

将拉格朗日方程用于对称叠层复合材料梁单元时可写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_4}{\partial \dot{\mathbf{u}}_4} \right) - \frac{\partial T_4}{\partial \mathbf{u}_4} + \frac{\partial N_4}{\partial \mathbf{u}_4} = \bar{\mathbf{f}}_4 + \bar{\mathbf{q}}_4 \quad (2-115)$$

式中： $\bar{\mathbf{f}}_4$ 为外加载荷的广义力列阵； $\bar{\mathbf{q}}_4$ 为与该单元相连接的其他单元给予该单元的作用力列阵。

将动能表达式(2-92)和势能表达式(2-103)代入式(2-115)中,并采用黏滞阻尼理论计入阻尼的影响,得到对称叠层复合材料梁单元的运动微分方程为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}}_4 \ddot{\mathbf{u}}_4 + \bar{\mathbf{c}}_4 \dot{\mathbf{u}}_4 + \bar{\mathbf{k}}_4 \mathbf{u}_4 = & \bar{\mathbf{f}}_4 + \bar{\mathbf{q}}_4 - \bar{\mathbf{m}}_4 \ddot{\mathbf{u}}_{4r} + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^8 \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{g}}_{4p} \bar{\mathbf{k}}_{4p} \mathbf{u}_4 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4p} \mathbf{u}_4 \bar{\mathbf{g}}_{4p} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{g}}_{4kl} \mathbf{u}_4 \bar{\mathbf{k}}_{4kl} \mathbf{u}_4 + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \bar{\mathbf{g}}_{4kl} \mathbf{u}_4 \mathbf{u}_4^T \bar{\mathbf{k}}_{4kl} \mathbf{u}_4 \right) \end{aligned} \quad (2-116)$$

式中： $\ddot{\mathbf{u}}_{4r}$ 为该梁单元的刚度加速度列阵； $p = 1, 2, \dots, 8, k, l = 22, 23, \dots, 28$,且 $l \geq k$ ； ε 表示一小量； $\bar{\mathbf{k}}_{4a}, \bar{\mathbf{k}}_{4p}, \bar{\mathbf{k}}_{4kl}, \bar{\mathbf{g}}_{4kl}$ 皆为 8×8 阶矩阵； $\bar{\mathbf{g}}_4, \bar{\mathbf{g}}_{4p}$ 皆为 8 阶向量,且有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_4 &= \mathbf{S}_{4j}^T \mathbf{L}_{4j}^T \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{S}_{04} \quad (j = 2, 3, \dots, 8) \\ (\bar{\mathbf{g}}_{4p})_p &= 1 \\ (\bar{\mathbf{k}}_{4a})_{ij} &= \phi'_{i+20} \phi'_{j+20} \quad (i, j = 2, 3, \dots, 8) \\ \bar{\mathbf{k}}_{4p} &= \sum_{j=1}^l \int_{\Omega_j} \bar{\mathbf{g}}_{4p}^T \bar{\mathbf{g}}_4 \bar{\mathbf{k}}_{4a} d\Omega_j \quad (p = 1, 2, \dots, 8; j = 2, 3, \dots, 8) \\ (\bar{\mathbf{g}}_{4kl})_{(k-20)(l-20)} &= (\bar{\mathbf{g}}_{4kl})_{(l-20)(k-20)} = 1 \quad (k, l = 22, 23, \dots, 28) \\ (\bar{\mathbf{k}}_{4kl})_{mn} &= (\bar{\mathbf{k}}_{4kl})_{nm} = \sum_{j=1}^l \int_{\Omega_j} \mathbf{S}_{04}^T \mathbf{L}_4^T \mathbf{C}_{4j} \mathbf{L}_{4j} \mathbf{S}_{04} \phi'_k \phi'_l \phi'_{m+20} \phi'_{n+20} d\Omega_j \quad (m, n = 2, 3, \dots, 8) \end{aligned}$$

其余各项为零。

2.5 连杆机构振动方程

运动弹性动力学(KED)分析中采用“瞬时结构假定”,即将运动的连杆机构的形状和所受载荷瞬时“冻结”起来,从而借用结构分析的方法分析。应用有限单元法建立弹性连杆机构振动方程的一般过程是:首先,根据研究目的和机构的特点,将连杆机构划分为若干单元,当需要考虑驱动电动机的机电耦合作用时,即进行“完全动力学分析”时,要考虑相应的电动机单元;然后,对各单元进行分析和建模,通过协调矩阵把局部坐标转为系统广义坐标;最后,进行叠加,组合系统模型。本节分别以金属材料构件、三维编织复合材料构件、对称叠层复合材料构件的弹性四连杆机构、电动机-弹性四连杆机构系统和混合驱动五杆机构系统为例,介绍建立振动方程的方法和过程。

2.5.1 弹性四连杆机构的振动方程

以图 2-13 所示的弹性四杆机构为研究对象。这里:当曲柄、连杆、摇杆均为金属

材料构件时,则该四连杆机构为金属材料四杆机构;当曲柄、连杆、摇杆均为三维编织复合材料构件时,则该四杆机构为三维编织复合材料四杆机构;当曲柄、连杆、摇杆均为对称叠层复合材料构件时,则该四杆机构为对称叠层复合材料四杆机构。当然,四杆机构也可由不同材料的杆件组成。对于各种材料的杆件,其单元分析的方法分别见前面各节的相应介绍。对于各种形式的弹性四连杆机构,均可按下面的方法建立其动力学模型。

2.5.1.1 连杆机构各构件单元数的确定

首先,将弹性四连杆机构的各个构件划分为一定数目的梁单元,使力学模型转化为离散模型。由于单元的类型和单元数目的多少直接影响着计算精度,一般来说,单元划分越细,节点设置越多,计算结果越精确,但计算耗时也就越多。所以在划分单元时必须兼顾计算精度与计算量,在满足精度要求下,尽可能减少单元数目。对于平面弹性连杆机构的梁单元,其型函数可以选取与弹性运动频率无关的简单位置多项式来模拟,并且其轴向和横向位移函数分别取为位置的线性式和五次多项式比较合适^[16]。不计频率影响所带来的位形和曲率误差则可通过限制无量纲参数 λ ($\lambda = I_e \left(\frac{\rho A \omega_N^2}{EJ} \right)^{\frac{1}{4}}$) 的取值范围 $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ 来加以控制,通常取 $\lambda_{\min} = 1.5, \lambda_{\max} = 2.5$ 。对于定长梁单元,为保证计算曲率和弯曲应力产生的误差小于 1%,可使单元长度满足下式:

$$\lambda_{\min} \left(\frac{EJ}{\rho A \omega_N^2} \right)^{\frac{1}{4}} \leq I_e \leq \lambda_{\max} \left(\frac{EJ}{\rho A \omega_N^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2-117)$$

式中: I_e 为定长梁单元长度; EJ 为抗弯刚度; ρ 为材料密度; A 为单元横截面面积; ω_N 为主动件角速度 ω 的 N 倍圆频率 ($\omega_N = N\omega$), N 为应考虑的高次谐波次数,一般可取 10 ~ 15。

为保证简单而不失一般性,这里在对弹性四连杆机构进行有限元分析时,将曲柄作为一个单元,将摇杆和连杆分为两个单元。

2.5.1.2 连杆机构有限元分析

图 2-13 所示为弹性四连杆机构有限元分析示意。图中,4,5, ..., 9 为节点编号,其中节点 6 为连杆的中点,节点 8 为摇杆的中点;②,③, ..., ⑥ 为单元编号;(2), (3), (4) 为构件编号; $U_7, U_8, U_{11}, U_{12}, U_{15}, U_{16}, U_{19}, U_{20}$ 为弹性位移, $U_5, U_9, U_{10}, U_{13}, U_{17}, U_{18}, U_{21}, U_{23}$ 表示弹性转角, $U_6, U_{14}, U_{22}, U_{24}$ 表示曲率。则该四杆机构系统采用系统编号的广义坐标向量可表示为

$$\mathbf{U} = [U_5 \quad U_6 \quad \cdots \quad U_{24}]^T$$

2.5.1.3 坐标转换矩阵的确定

由于连杆和摇杆是随着曲柄的转动而运动的,为研究方便,需要采用两种坐标系,即单元坐标系和系统坐标系。如图 2-14 所示,坐标系原点为点 O ,与梁单元中心线始终平行的坐标系称为单元坐标系,也称局部坐标系,它随梁单元一起运动,因此

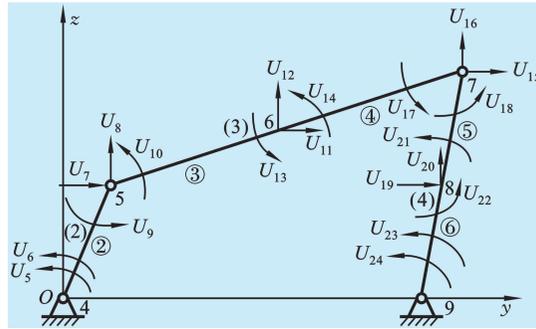


图 2-13 四连杆机构有限元分析示意
(2)一曲柄;(3)一连杆;(4)一摇杆

也称运动坐标系,规定 x 轴的正方向为正,把 x 轴逆时针转过 90° 后所指的方向为 y 轴的正方向,转角取逆时针方向为正。利用单元坐标来分析单元节点变形和节点力间的关系比较方便。但对于弹性连杆机构,虽然节点采用了附属于每个单元的局部坐标系,对不同方向的梁单元导出的基本方程具有统一形式,但由于各单元位置不同,各单元坐标不统一,不便于研究整体结构,所以需要采用统一的系统坐标系。采用统一的系统坐标系也是为了能够由梁单元运动方程“组装”出系统的运动方程,这种“组装”并不是把单元坐标系下的单元方程简单地叠加,而是必须把单元方程式转换到一个固定的整体坐标系中,即必须将方程转化到静止的整体坐标系(如图 2-14 中的坐标系 OXY ,亦称总体坐标系)中。下面说明坐标转换的关系。

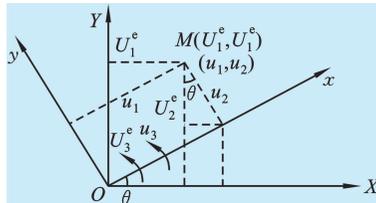


图 2-14 单元坐标系和系统坐标系

假设广义坐标列阵 $\bar{\mathbf{u}} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T$ 是定义在与刚体梁单元平行的局部坐标系 Oyz 上的,其中 u_1, u_2, u_3, u_4 分别为任意一点 M 相对于坐标 Oyz 的轴向、横向位移、转角和曲率。假设一广义坐标列阵 $\bar{\mathbf{u}}$ 在整体坐标下的坐标列阵为 $\bar{\mathbf{U}}^e = [U_1^e \quad U_2^e \quad U_3^e \quad U_4^e]^T$,它是 M 点相对于总体坐标系 OYZ 的轴向、横向位移、转角和曲率(见图 2-14,两曲率坐标未标出)。

由图 2-14 可知,在任意点 M 处的两组坐标有



$$\begin{cases} U_1^e = u_1 C - u_2 S \\ U_2^e = u_1 S + u_2 C \\ U_3^e = u_3 \\ U_4^e = u_4 \end{cases} \quad (2-118)$$

式中: $S = \sin \theta, C = \cos \theta$ 。

进行反求,可解得

$$\begin{cases} u_1 = U_1^e C + U_2^e S \\ u_2 = -U_1^e S + U_2^e C \\ u_3 = U_3^e \\ u_4 = U_4^e \end{cases} \quad (2-119)$$

写成矩阵形式,有

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ U_4^e \end{bmatrix} \quad (2-120)$$

可简写为

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}^e \quad (2-121)$$

式中: $\bar{\mathbf{u}} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T$; $\bar{\mathbf{U}}^e = [U_1^e \quad U_2^e \quad U_3^e \quad U_4^e]^T$; $\bar{\mathbf{R}}$ 为坐标转换矩阵,且

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-122)$$

同样也可以把式(2-118)写成矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ U_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2-123)$$

或

$$\bar{\mathbf{U}}^e = \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{u}} \quad (2-124)$$

显然矩阵 $\bar{\mathbf{R}}$ 是一正交矩阵, $\bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{I}$, \mathbf{I} 为单位矩阵。

上面分析了单元坐标和系统坐标之间的关系。因为一个梁单元有两个节点坐标,同样可设另一个节点的局部坐标为 $\hat{\mathbf{u}} = [u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8]^T$,系统的广义坐标为 $\hat{\mathbf{U}}^e = [U_5^e \quad U_6^e \quad U_7^e \quad U_8^e]^T$,同理可知 $\bar{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}$ 。所以梁单元的单元坐标和系统坐标之间

的关系为

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{U}^e \quad (2-125)$$

式中: $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_8]^T$

$$\mathbf{U}^e = [U_1^e \quad U_2^e \quad \cdots \quad U_8^e]^T$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-126)$$

若图 2-13 所示四连杆机构中的曲柄、连杆和摇杆与 y 轴之间的夹角分别为 θ_1 , θ_2 和 θ_3 , \mathbf{R}_i 表示第 i 个单元的转换矩阵, 由式(2-118)、式(2-126)可得四连杆机构各单元的转换矩阵为

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C_i & S_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_i & C_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_i & S_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_i & C_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-127)$$

式中: $S_2 = \sin\theta_1$; $C_2 = \cos\theta_1$; $S_3 = S_4 = \sin\theta_2$; $C_3 = C_4 = \cos\theta_2$; $S_5 = S_6 = \sin\theta_3$; $C_5 = C_6 = \cos\theta_3$ 。

2.5.1.4 坐标协调矩阵的确定

为了进行系统分析, 可用一个整数矩阵——模型组成矩阵 \mathbf{I}_u 来表示局部编号与系统编号的对应关系, 即

$$\mathbf{I}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 0 \\ 15 & 16 & 18 & 0 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 0 & 0 & 23 & 24 \end{bmatrix} \quad (2-128)$$

这里, 矩阵 \mathbf{I}_u 是一个 5×8 矩阵, 其行数表示单元的总数, 列数表示单元广义坐标个



数。其含义为:第 i 行的 8 个数字即为第 i 个单元的局部编号 1 ~ 8 相对应的系统编号。若系统编号为零,表示未设此广义坐标,即该坐标值为零,如 $\mathbf{U}_3^e = [U_{11} \ U_{12} \ U_{13} \ U_{14} \ U_{15} \ U_{16} \ U_{17} \ 0]^T$,则第 i 个单元的局部编号 1 ~ 8 相对应的系统编号的坐标协调矩阵 \mathbf{B}_i 可分别表示为

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-129)$$



$$\mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-133)$$

2.5.1.5 连杆机构振动方程

设第 i 个单元坐标与整体坐标间的转换矩阵为 \mathbf{R}_i , 第 i 个单元局部编号与系统编号间的坐标协调矩阵为 \mathbf{B}_i , 则四杆机构各单元(单元②、③、④、⑤、⑥)中的第 i 个单元以整体编号的系统坐标为未知量的单元运动微分方程可表示为

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_i^e \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_i^e \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_i^e \mathbf{U} \\ & = \mathbf{F}_i^e + \mathbf{Q}_i^e - \mathbf{M}_i^e \ddot{\mathbf{U}}_r + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T \mathbf{G}_{ip} \mathbf{K}_{\mu ip} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\mu p} \mathbf{U} \mathbf{G}_{ip} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{U}^T \mathbf{G}_{ikl} \mathbf{U} \mathbf{K}_{\mu k l} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{G}_{ikl} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\mu k l} \mathbf{U} \right) \end{aligned} \quad (2-134)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^e &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{R}_i^T \bar{\mathbf{m}}_j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_i, & \mathbf{C}_i^e &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{R}_i^T \bar{\mathbf{c}}_j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_i \\ \mathbf{K}_i^e &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{R}_i^T \bar{\mathbf{k}}_j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_i, & \mathbf{F}_i^e &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{R}_i^T \bar{\mathbf{f}}_j \\ \mathbf{Q}_i^e &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{R}_i^T \bar{\mathbf{q}}_j, & \mathbf{G}_{ip} &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{R}_i^T \bar{\mathbf{g}}_{jp} \\ \mathbf{K}_{\mu ip} &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{R}_i^T \bar{\mathbf{k}}_{jp} \mathbf{R}_i \mathbf{B}_i, & \mathbf{G}_{ikl} &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{R}_i^T \bar{\mathbf{g}}_{jkl} \mathbf{R}_i \mathbf{B}_i \\ \mathbf{K}_{\mu k l} &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{R}_i^T \bar{\mathbf{k}}_{jkl} \mathbf{R}_i \mathbf{B}_i \end{aligned}$$

其中, $\bar{\mathbf{m}}_j, \bar{\mathbf{k}}_j, \bar{\mathbf{f}}_j, \bar{\mathbf{q}}_j, \bar{\mathbf{g}}_{jp}, \bar{\mathbf{k}}_{jp}, \bar{\mathbf{g}}_{jkl}, \bar{\mathbf{k}}_{jkl}$ 分别为式(2-62)、式(2-89)、式(2-116)中的矩阵或向量, 且 $j=2, 3, 4$, 当第 i 个单元材料为金属材料时取 $j=2$, 当第 i 个单元材料为三维编织复合材料时取 $j=3$, 当第 i 个单元材料为对称叠层复合材料时取 $j=4$ 。

把所有单元以整体编号的系统坐标为未知量的单元运动微分方程叠加起来, 得到系统的运动微分方程为

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{01}) \mathbf{U} \\ & = \mathbf{F} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_r - (\mathbf{K}_1^e + \mathbf{K}_{01}^e) \mathbf{E}_0 \\ & \quad + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T \mathbf{G}_p \mathbf{K}_{\mu p} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\mu p} \mathbf{U} \mathbf{G}_p + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{U}^T \mathbf{G}_{kl} \mathbf{U} \mathbf{K}_{\mu k l} \mathbf{U} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{G}_{kl} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\mu k l} \mathbf{U} \right) \end{aligned} \quad (2-135)$$

式中:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \sum_{i=2}^6 \mathbf{M}_i^e, & \mathbf{C} &= \sum_{i=2}^6 \mathbf{C}_i^e, & \mathbf{K} &= \sum_{i=2}^6 \mathbf{K}_i^e, & \mathbf{F} &= \sum_{i=2}^6 \mathbf{F}_i^e \\
 \mathbf{G}_p &= \sum_{i=2}^6 \mathbf{G}_{ip}, & \mathbf{K}_{\mu p} &= \sum_{i=2}^6 \mathbf{K}_{\mu ip}, & \mathbf{G}_{kl} &= \sum_{i=2}^6 \mathbf{G}_{ikl}, & \mathbf{K}_{\mu kl} &= \sum_{i=2}^6 \mathbf{K}_{\mu ikl}
 \end{aligned}$$

值得注意的是,单元运动微分方程叠加起来后单元间的作用力 \mathbf{Q}_i^e 相互抵消了。同时由于在该弹性四连杆机构中还存在曲柄与连杆间轴承座的集中质量 m_{01} 及连杆与摇杆间轴承座的集中质量 m_{02} ,因而在利用以上参数建立系统的动态方程时,应将 m_{01} 和 m_{02} 叠加到系统质量矩阵 \mathbf{M} 中去,即将集中质量 m_{01} 叠加到 $(\mathbf{M})_{7,7}$ 和 $(\mathbf{M})_{8,8}$ 中,将集中质量 m_{02} 叠加到 $(\mathbf{M})_{15,15}$ 和 $(\mathbf{M})_{16,16}$ 中。

2.5.2 电动机-弹性四连杆机构系统振动方程

为了使分析方便,这里将电动机输出轴与连杆机构的曲柄按直接连接处理,系统简图如图 2-15 所示。这里:当曲柄、连杆、摇杆均为金属材料构件时,则该系统为电动机-金属材料四连杆机构系统;当曲柄、连杆、摇杆均为三维编织复合材料构件时,则该四连杆机构为电动机-三维编织复合材料四连杆机构系统;当曲柄、连杆、摇杆均为对称叠层复合材料构件时,则该四连杆机构为电动机-对称叠层复合材料四连杆机构系统;当构件中含有复合材料构件时,则该四连杆机构为电动机-含复合材料构件的四连杆机构系统。无论是哪一种形式的电动机-弹性四连杆机构系统,均可按下面的方法建立其动力学模型。

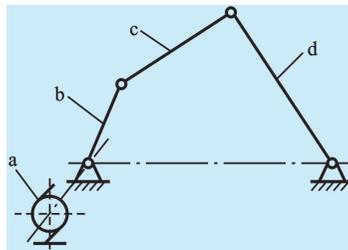


图 2-15 电动机-弹性四连杆机构系统简图

a—三相交流电动机;b—曲柄;c—连杆;d—摇杆

根据 2.5.2 节建立振动方程的步骤,为保证简便而不失一般性,在对该系统进行有限元分析时,将电动机单元和曲柄各作为一个单元,将摇杆和连杆各分为两个单元,以 1,2...表示节点编号,以 ①,②...表示单元编号,以 (1),(2)...表示构件编号, $U_1, U_2, U_7, U_8, U_{11}, U_{12}, U_{15}, U_{16}, U_{19}, U_{20}$ 为弹性位移, $U_5, U_9, U_{10}, U_{13}, U_{17}, U_{18}, U_{21}, U_{23}$ 为弹性转角, U_3, U_4 为弹性扭角, $U_6, U_{14}, U_{22}, U_{24}$ 为曲率。节点 6 为连杆的中点,节点 8 为摇杆的中点,如图 2-13、图 2-16 所示。

这样该四杆机构系统采用系统编号的广义坐标向量可表示为

$$\mathbf{U} = [U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_{24}]^T$$

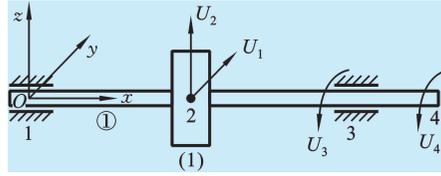


图 2-16 电动机单元分析示意图

设第 i 个单元坐标与整体坐标间的转换矩阵为 R_i , 第 i 个单元局部编号与系统编号间的坐标协调矩阵为 B_i , 则单元①(电动机单元)以整体编号的系统坐标为未知量的单元运动微分方程为

$$M_1^e \ddot{U} + C_1^e \dot{U} + (K_1^e + K_{01}^e) U = F_1^e + Q_1^e - M_1^e \ddot{U}_r - (K_1^e + K_{01}^e) E_0 \quad (2-136)$$

式中: U, \ddot{U}, \ddot{U}_r 分别为系统在整体坐标系中的广义坐标向量、加速度向量和刚体加速度向量, 且

$$M_1^e = B_1^T R_1^T \bar{m}_1 R_1 B_1, \quad C_1^e = B_1^T R_1^T \bar{c}_1 R_1 B_1, \quad K_1^e = B_1^T R_1^T \bar{k}_1 R_1 B_1$$

$$K_{01}^e = B_1^T R_1^T \bar{k}_{01} R_1 B_1, \quad F_1^e = B_1^T R_1^T \bar{f}_1, \quad Q_1^e = B_1^T R_1^T \bar{q}_1, \quad E_0 = R_1 B_1 \bar{E}_0$$

四杆机构各单元(单元②、③、④、⑤、⑥)中的第 i 个单元以整体编号的系统坐标为未知量的单元运动微分方程可表示为

$$M_i^e \ddot{U} + C_i^e \dot{U} + K_i^e U = F_i^e + Q_i^e - M_i^e \ddot{U}_r + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^8 U^T G_{ip} K_{\mu ip} U + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 U^T K_{\mu p} U G_{ip} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l U^T G_{ikl} U K_{\mu k l} U + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l G_{ikl} U U^T K_{\mu k l} U \right) \quad (2-137)$$

式中:

$$M_i^e = B_i^T R_i^T \bar{m}_j R_i B_i, \quad C_i^e = B_i^T R_i^T \bar{c}_j R_i B_i$$

$$K_i^e = B_i^T R_i^T \bar{k}_j R_i B_i, \quad F_i^e = B_i^T R_i^T \bar{f}_j$$

$$Q_i^e = B_i^T R_i^T \bar{q}_j, \quad G_{ip} = B_i^T R_i^T \bar{g}_{jp}$$

$$K_{\mu ip} = B_i^T R_i^T \bar{k}_{jp} R_i B_i, \quad G_{ikl} = B_i^T R_i^T \bar{g}_{jkl} R_i B_i$$

$$K_{\mu k l} = B_i^T R_i^T \bar{k}_{jkl} R_i B_i$$

其中, $\bar{m}_j, \bar{k}_j, \bar{f}_j, \bar{q}_j, \bar{g}_{jp}, \bar{k}_{jp}, \bar{g}_{jkl}, \bar{k}_{jkl}$ 分别为式(2-62)、式(2-89)、式(2-116)中的矩阵和向量, 且 $j=2, 3, 4$, 当第 i 个单元材料为金属材料时取 $j=2$, 当第 i 个单元材料为三维编织复合材料时取 $j=3$, 当第 i 个单元材料为对称叠层复合材料时取 $j=4$ 。

把所有单元以整体编号的系统坐标为未知量的单元运动微分方程叠加起来, 得到系统的运动微分方程为

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + (K + K_{01}) U$$

$$= F - M \ddot{U}_r - (K_1^e + K_{01}^e) E_0 + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^8 U^T G_p K_{\mu p} U + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 U^T K_{\mu p} U G_p \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_k \sum_l U^T G_{kl} U K_{\mu kl} U + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l G_{kl} U U^T K_{\mu kl} U \quad (2-138)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^6 \mathbf{M}_i^e, \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{C}_i^e, \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{K}_i^e, \quad \mathbf{K}_{01} = \mathbf{K}_{01}^e, \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}_i^e \\ \mathbf{G}_p &= \sum_{i=2}^6 \mathbf{G}_{ip}, \quad \mathbf{K}_{\mu p} = \sum_{i=2}^6 \mathbf{K}_{\mu ip}, \quad \mathbf{G}_{kl} = \sum_{i=2}^6 \mathbf{G}_{ikl}, \quad \mathbf{K}_{\mu kl} = \sum_{i=2}^6 \mathbf{K}_{\mu ikl} \end{aligned}$$

值得注意的是,单元运动微分方程叠加起来后单元间的作用力 \mathbf{Q}_i^e 相互抵消了。同时由于在该弹性四连杆机构中还存在曲柄与连杆间轴承座的集中质量 m_{01} 及连杆与摇杆间轴承座的集中质量 m_{02} ,因而在利用以上参数建立系统的动态方程时,应将 m_{01} 和 m_{02} 叠加到系统质量矩阵 \mathbf{M} 中去,即将集中质量 m_{01} 叠加到 $(\mathbf{M})_{7,7}$ 和 $(\mathbf{M})_{8,8}$ 中,将集中质量 m_{02} 叠加到 $(\mathbf{M})_{15,15}$ 和 $(\mathbf{M})_{16,16}$ 中。

需要说明的是,由于阻尼是机构的重要的动力学特性之一,因而为了更准确地分析机构系统的弹性动力学行为,在建模中计入阻尼的影响是必要的。引起能量耗散的原因主要有以下几种:①材料的内摩擦作用(它使机械能量逐渐转化为热能消失在周围的介质中),这是能量耗散的主要原因;②节点、支座连接间的摩擦阻力,主要是由构件之间或构件与支座间的相对运动所产生的。此外,通过支座基础会散失一部分能量;③周围介质对振动的阻尼力,使振动衰减的因素统称为阻尼力。机构系统的阻尼力分布形式和特征很复杂,这里,三维编织复合材料构件的阻尼力可按 2.3.4 节的方法确定,对称叠层复合材料构件的阻尼力可按 2.4.4 节的方法确定,金属材料构件所受到的阻尼力的影响采用黏滞阻尼理论来近似地估计^[85],即认为阻尼力与弹性变形速度成正比,这里也是采用这一方法来计入阻尼影响的。

若在电动机单元中不考虑电动机转子的转动偏心,则系统运动微分方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{01})\mathbf{U} \\ = \mathbf{F} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_r + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T \mathbf{G}_p \mathbf{K}_{\mu p} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\mu p} \mathbf{U} \mathbf{G}_p \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{U}^T \mathbf{G}_{kl} \mathbf{U} \mathbf{K}_{\mu kl} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{G}_{kl} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\mu kl} \mathbf{U} \right) \quad (2-139) \end{aligned}$$

根据式(2-139)的推导过程可知, \mathbf{K}_{01} , $(\mathbf{K}_1^e + \mathbf{K}_{01}^e) \mathbf{E}_0$ 是考虑电动机影响后引入的,其中 \mathbf{K}_{01} 和 \mathbf{K}_{01}^e 不仅与系统的结构参数有关,而且还与电磁参数有关,为机电耦合项; $-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_r$ 为系统的自激惯性力项,它不仅与系统的运动参数有关,而且还与系统的结构参数和电磁参数有关(详见 4.2 节),其中包含有机电耦合项; ε 后面括号中的各项都是考虑连杆机构构件的几何非线性后引入的,其中不仅包含系统广义坐标向量 \mathbf{U} 的平方项,也包含系统广义坐标向量 \mathbf{U} 的立方项; \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{C} 分别为系统动力学方程的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵; \mathbf{F} 为作用于系统的外力向量。显然,该方程为非线性机电耦合动力学方程。



由于电磁参数对电动机轴的振动有着直接的影响,而电动机轴又与连杆机构直接相连,因而其振动也直接影响连杆机构的动态特性;反之亦然。也就是说,电动机-弹性连杆机构系统存在着复杂的机电耦合关系,而式(2-56)则较好地体现了这种复杂的机电耦合关系。

2.5.3 混合驱动五杆机构系统动力学模型

混合驱动五杆机构中,一个输入运动由常速电动机实现,以提供主要的动力,另外一个输入运动由可控电动机实现,以调节运动输出的机构,具有较好的输出柔性。此类机构能够实现给定轨迹、速度和加速度,在数控设备、机器人及自动化生产线等方面有很好的应用前景。而双可控电动机驱动五杆机构虽具有更好的输出柔性,但也具有系统承载能力不强、控制更复杂等不足。

以图 2-17 所示的含伺服电动机和三相交流电动机的混合驱动五杆机构系统为研究对象,针对电动机转子偏心导致的不均匀气隙磁场,分析其实际运行状态的机电耦合关系,建立以电动机横振、扭振为节点位移的电动机单元,应用有限单元法建立含电动机电磁参数和弹性连杆机构结构参数的系统非线性机电耦合动力学模型。

建立系统的整体坐标系,并且定义系统在整体坐标系中的弹性位移向量为 \mathbf{u} 。设 \mathbf{R}_i 为第 i 个单元坐标与整体坐标间的转换矩阵, \mathbf{B}_i 为第 i 个单元局部编号与系统编号间的坐标协调矩阵。

为了不失一般性,将五杆机构两连杆分为两个单元,双曲柄分别当做一个单元。以③,④,⋯,⑧为单元编号, $U_{11}, U_{12}, U_{15}, U_{16}, U_{19}, U_{20}, U_{23}, U_{24}, U_{27}, U_{28}$ 为弹性位移, $U_9, U_{13}, U_{14}, U_{17}, U_{21}, U_{22}, U_{25}, U_{29}, U_{30}, U_{31}$ 为弹性转角, $U_{10}, U_{18}, U_{26}, U_{32}$ 为曲率。伺服电动机单元和三相交流电动机单元编号分别为①和②,如图 2-18 所示。可得

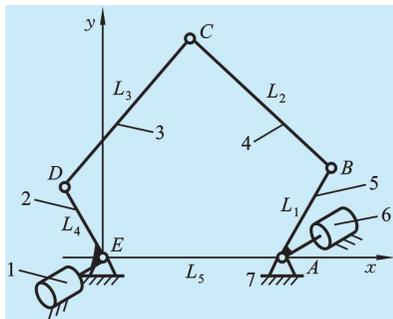


图 2-17 混合驱动五杆机构系统简图

1—三相交流电动机;2—曲柄;3、4—连杆;5—曲柄;

6—伺服电动机(或直流电动机);7—机架

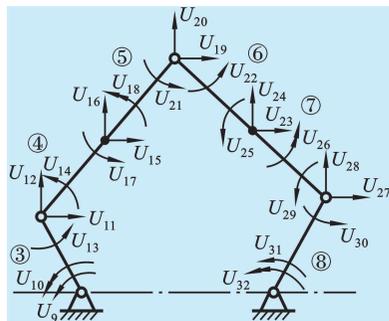


图 2-18 机构计算分析示意

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-140)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta_1 & \cos\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\beta_1 & \cos\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-141)$$

$$\mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} \cos\beta_2 & -\sin\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta_2 & \cos\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta_2 & -\sin\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\beta_2 & \cos\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-142)$$

$$\mathbf{R}_6 = \mathbf{R}_7 = \begin{bmatrix} \cos\beta_3 & -\sin\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta_3 & \cos\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta_3 & -\sin\beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\beta_3 & \cos\beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-143)$$



$$\mathbf{R}_8 = \begin{bmatrix} \cos\beta_4 & -\sin\beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta_4 & \cos\beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta_4 & -\sin\beta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\beta_4 & \cos\beta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-144)$$

其中, β_1 和 β_4 分别为连杆 L_1 和 L_4 与水平位置之间的夹角。

协调矩阵 \mathbf{B}_1 和 \mathbf{B}_2 是 4×32 阶矩阵, $\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \dots, \mathbf{B}_7$ 和 \mathbf{B}_8 是 8×24 阶矩阵, 且

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_1)_{11} &= (\mathbf{B}_1)_{22} = (\mathbf{B}_1)_{33} = (\mathbf{B}_1)_{44} = 1 \\ (\mathbf{B}_2)_{15} &= (\mathbf{B}_2)_{26} = (\mathbf{B}_2)_{37} = (\mathbf{B}_2)_{48} = 1 \\ (\mathbf{B}_3)_{3,9} &= (\mathbf{B}_3)_{4,10} = (\mathbf{B}_3)_{5,11} = (\mathbf{B}_3)_{6,12} = (\mathbf{B}_3)_{7,13} = 1 \\ (\mathbf{B}_4)_{1,11} &= (\mathbf{B}_4)_{2,12} = (\mathbf{B}_4)_{3,14} = (\mathbf{B}_4)_{5,15} = (\mathbf{B}_4)_{6,16} = (\mathbf{B}_4)_{7,17} = (\mathbf{B}_4)_{8,18} = 1 \\ (\mathbf{B}_5)_{1,15} &= (\mathbf{B}_5)_{2,16} = (\mathbf{B}_5)_{3,17} = (\mathbf{B}_5)_{4,18} = (\mathbf{B}_5)_{5,19} = (\mathbf{B}_5)_{6,20} = (\mathbf{B}_5)_{7,21} = 1 \\ (\mathbf{B}_6)_{1,19} &= (\mathbf{B}_6)_{2,20} = (\mathbf{B}_6)_{3,21} = (\mathbf{B}_6)_{3,22} = (\mathbf{B}_6)_{5,23} = (\mathbf{B}_6)_{6,24} = (\mathbf{B}_6)_{7,25} = \\ &(\mathbf{B}_6)_{8,26} = 1 \\ (\mathbf{B}_7)_{1,23} &= (\mathbf{B}_7)_{2,24} = (\mathbf{B}_7)_{3,25} = (\mathbf{B}_7)_{4,26} = (\mathbf{B}_7)_{5,27} = (\mathbf{B}_7)_{6,28} = (\mathbf{B}_7)_{7,29} = 1 \\ (\mathbf{B}_8)_{1,27} &= (\mathbf{B}_8)_{2,28} = (\mathbf{B}_8)_{3,30} = (\mathbf{B}_8)_{7,31} = (\mathbf{B}_8)_{8,32} = 1 \end{aligned}$$

矩阵其余各元素均为零。

若采用线性黏性阻尼模型, 此时阻尼率可通过实验利用分量分析法求得。由第二类拉格朗日方程, 有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial V}{\partial u_i} = \mathbf{F} + \mathbf{Q} \quad (2-145)$$

并将式(2-3)、式(2-9)、式(2-15)、式(2-27)、式(2-59)及式(2-62)代入上式, 得到计入系统阻尼影响时混合驱动五杆机构系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_0)\mathbf{u} &= \mathbf{F} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_r - (\mathbf{K}_{11}^e + \mathbf{K}_{12}^e + \mathbf{K}_{21}^e + \mathbf{K}_{22}^e)\mathbf{e} - \mathbf{k}_0 \\ &+ \varepsilon \left(\sum_{n=1}^8 \mathbf{u}^T \mathbf{G}_n \mathbf{K}_n \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 \mathbf{u}^T \mathbf{K}_n \mathbf{u} \mathbf{G}_n \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \mathbf{u}^T \mathbf{G}_{gl} \mathbf{u} \mathbf{K}_{gl} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \mathbf{G}_{gl} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{gl} \mathbf{u} \right) \\ &(k, l = 2, 3, 4, 6, 7, 8) \end{aligned} \quad (2-146)$$

式中: \mathbf{F} 为外载荷广义力向量; $\ddot{\mathbf{u}}_r$ 为系统在整体坐标系中的刚体加速度列阵; ε 为小

参数;且

$$\begin{aligned}
 M &= B_1^T R_1^T \bar{m}_5 R_1 B_1 + B_2^T R_2^T \bar{m}_1 R_2 B_2 + \sum_{i=3}^n B_i^T R_i^T \bar{m}_2 R_i B_i \\
 K &= K_{11}^e + K_{21}^e + \sum_{i=3}^n B_i^T R_i^T \bar{k}_2 R_i B_i \\
 K_0 &= K_{12}^e + K_{22}^e \\
 K_{11}^e &= B_1^T R_1^T \bar{k}_{51} R_1 B_1 \\
 K_{12}^e &= B_1^T R_1^T \bar{k}_{52} R_1 B_1 \\
 K_{21}^e &= B_2^T R_2^T \bar{k}_{11} R_2 B_2 \\
 K_{22}^e &= B_2^T R_2^T \bar{k}_{12} R_2 B_2 \\
 e &= B_1^T R_1^T \bar{e}_1 + B_2^T R_2^T \bar{e}_2 \\
 \bar{e}_1 &= [e_{11} + \varepsilon_{01} \cos \beta_1 \quad e_{12} + \varepsilon_{01} \sin \beta_1 \quad 0 \quad 0]^T \\
 \bar{e}_2 &= [e_{21} + \varepsilon_{02} \cos \beta_4 \quad e_{22} + \varepsilon_{02} \sin \beta_4 \quad 0 \quad 0]^T \\
 k_0 &= B_1^T R_1^T \bar{k}_{05} + B_2^T R_2^T \bar{k}_{01} \\
 G_n &= \sum_{i=3}^N B_i^T R_i^T \bar{g}_n, \quad (\bar{g}_n)_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \\
 K_n &= \sum_{i=3}^N B_i^T R_i^T \int_0^L EA \bar{g}_n^T \bar{g} \bar{K}_a dx R_i B_i \\
 \bar{g} &= \left[-\frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \\
 (\bar{K}_a)_{ij} &= \gamma'_i \gamma'_j \quad (i, j = 2, 3, \dots, 8) \\
 G_{gl} &= \sum_{i=3}^N B_i^T R_i^T \bar{G}_{gl} R_i B_i \\
 (\bar{G}_{gl})_{gl} &= (\bar{G}_{gl})_{lg} = 1 \quad (k, l = 2, 3, \dots, 8) \\
 K_{gl} &= \sum_{i=3}^N B_i^T R_i^T \bar{K}_{gl} R_i B_i \\
 (\bar{K}_{gl})_{ij} &= (\bar{K}_{gl})_{ji} = \int_0^L EA \gamma'_g \gamma'_i \gamma'_i \gamma'_j dx \quad (i, j = 2, 3, \dots, 8)
 \end{aligned}$$

其中, N 为机构系统单元数量(本书取 $N=8$), \bar{K}_a 、 \bar{K}_{gl} 、 \bar{G}_{gl} 皆为 8×8 阶矩阵, \bar{g} 、 \bar{g}_n 皆为 8 阶向量, 其余各项为零。同理, 可得到由连杆机构及直流电动机和三相交流电动机组成的机构系统动态方程。

系统动态模型不仅包含三相交流电动机的电磁参数, 还包含机电系统中应用最为广泛、电磁状态较为复杂的伺服电动机的电磁参数, 因而此模型能比较真实地反映此类机构系统的动态性能, 具有较为普遍的使用意义。

由系统动态模型(式(2-122))的推导过程可知: K_0 、 K_{12}^e 和 K_{22}^e 是与系统电磁参数和电动机结构参数有关的刚度矩阵, K_0 和 $(K_{12}^e + K_{22}^e)e$ 是考虑电动机影响后引入的,



为机电耦合项; $-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_r$ 为系统的自激惯性力项,它不仅与系统的运动参数有关,还与系统的结构参数和电磁参数有关(见第3章); ε 后面括号中的各项是考虑连杆机构构件的几何非线性后引入的,其中不仅包含系统广义坐标向量 \mathbf{u} 的平方项,也包含 \mathbf{u} 的立方项,有关因电磁参数引入的非线性项,将在第3章中描述。这样,所建系统的动态模型即为多自由度非线性机电耦合动态力学方程。在此基础上,即可进一步研究系统的非线性振动特性。

第3章 连杆机构系统非线性振动分析

在振动理论中,激励一般可以分为以下两类^[86]。

(1) 作为系统运动微分方程的非齐次项出现的外激励。在外激励作用下系统的振动为强迫振动或受迫振动。

(2) 作为系统运动微分方程的变系数(即依赖于时间的系数)而出现的参数激励。若参数激励仅仅是恢复力的线性部分,则称之为线性参数激励;若参数激励是恢复力的非线性部分,则称之为非线性参数激励。在参数激励情况下系统的振动称为参数振动。

随着研究的不断深入,国内外学者^[8,28-41,87-95]在机构弹性动力学的研究领域已取得许多重要成果。他们在研究中所考虑的系统所受到的激励都为外激励,如外载荷、自激惯性力、副反力等,未见有关参数激励的报道。然而在高速轻型机电传动系统的运行中时常出现一些人们未曾料及的现象,如驱动电动机的电磁谐波有时会引起被驱动机构的强烈振动,在一定条件下系统将出现参数共振与强迫振动相耦合的振动等,其根本原因在于人们对该类机构系统非线性动态特性的研究还不够全面和深入,对系统机电耦合等深层次问题也没有作详细探讨。

第2章应用有限单元法建立了电动机-弹性四连杆机构系统和混合驱动五杆机构系统的耦合动力学方程,在该耦合动力学方程中显含广义坐标向量的平方项和立方项,其中电磁参数激励和柔性构件的大几何变形这一非线性因素是产生平方非线性振动特征的主要原因,柔性构件大几何变形的非线性因素是产生立方非线性振动特征的主要原因。在第2章所建立的耦合动力学方程的基础上,本章主要介绍系统在电磁参数激励下的参激振动机理及电磁参数激励和外激励联合作用下的参、强耦合振动机理,并采用非线性分析的近似方法——多尺度法对电动机-弹性四连杆机构系统和混合驱动五杆机构系统在电磁参数激励和自激惯性力(或外力)共同作用下的非线性振动进行深入分析。

3.1 系统的自激惯性力分析

3.1.1 连杆机构运动分析

3.1.1.1 四连杆机构运动分析

在图3-1所示的四连杆机构中,各构件的长度分别表示为 L_1, L_2, L_3, L_4 ,各构件的角位置分别表示为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$,各构件的角速度分别表示为 $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$,各构件的角

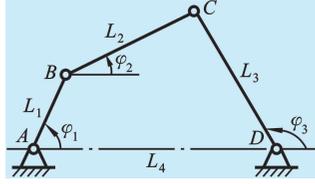


图 3-1 连杆机构示意

加速度分别表示为 $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_3$ 。根据该机构的几何关系可得

$$\varphi_2 = 2\arctan \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b - c} \quad (3-1)$$

$$\varphi_3 = \arctan \frac{d + \sqrt{d^2 + e^2 - f^2}}{e - f} \quad (3-2)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \dot{\varphi}_1 \quad (3-3)$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \dot{\varphi}_1 \quad (3-4)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \ddot{\varphi}_1 - \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \dot{\varphi}_1^2 - \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{L_3}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \dot{\varphi}_3^2 \quad (3-5)$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \ddot{\varphi}_1 + \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{L_2}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \dot{\varphi}_2^2 - \frac{\cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \dot{\varphi}_3^2 \quad (3-6)$$

式中：

$$\begin{aligned} a &= 2L_1 L_2 \sin\varphi_1 \\ b &= 2L_2 (L_1 \cos\varphi_1 - L_4) \\ c &= L_1^2 + L_2^2 + L_4^2 - L_3^2 - 2L_1 L_4 \cos\varphi_1 \\ d &= 2L_1 L_3 \sin\varphi_1 \\ e &= 2L_3 (L_1 \cos\varphi_1 - L_4) \\ f &= L_2^2 - L_1^2 - L_3^2 - L_4^2 + 2L_1 L_4 \cos\varphi_1 \end{aligned}$$

3.1.1.2 五连杆机构运动分析

对于如图 3-2 所示的五杆机构系统,可知

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_2 &= \dot{\beta}_3 = (1 - g^2)^{-\frac{1}{2}} (e\dot{\beta}_1 + f\dot{\beta}_4) \\ \ddot{\beta}_2 &= \ddot{\beta}_3 = [ge^2(1 - g^2)^{-\frac{3}{2}} + e_1(1 - g^2)^{-\frac{1}{2}}] \dot{\beta}_1^2 \\ &\quad + [gf^2(1 - g^2)^{-\frac{3}{2}} + f_2(1 - g^2)^{-\frac{1}{2}}] \dot{\beta}_4^2 \\ &\quad + [2gef(1 - g^2)^{-\frac{3}{2}} + (e_2 + f_1)(1 - g^2)^{-\frac{1}{2}}] \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4 \end{aligned} \quad (3-7)$$

$$+ e(1 - g^2)^{-\frac{1}{2}} \ddot{\beta}_1 + f(1 - g^2)^{-\frac{1}{2}} \ddot{\beta}_4 \quad (3-8)$$

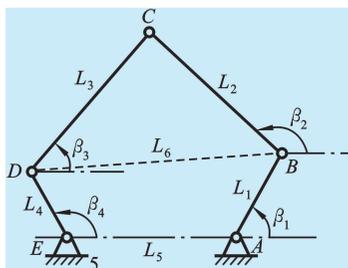


图 3-2 五杆机构示意

式中:

当 $\tan \frac{d-b}{c-a} \geq 0$ 时,

$$\begin{cases} \beta_2 = 180^\circ - (\theta_3 - \theta_1) \\ \beta_3 = \theta_1 + \theta_2 \end{cases} \quad (3-9)$$

当 $\tan \frac{d-b}{c-a} < 0$ 时,

$$\begin{cases} \beta_2 = 180^\circ - (\theta_3 + \theta_1) \\ \beta_3 = \theta_2 - \theta_1 \end{cases} \quad (3-10)$$

且

$$\begin{cases} \theta_1 = \cos^{-1} \frac{(c-a)^2 + L_6^2 - (d-b)^2}{2L_6(c-a)} \\ \theta_2 = \cos^{-1} \frac{L_3^2 + L_6^2 - L_2^2}{2L_3L_6} \\ \theta_3 = \cos^{-1} \frac{L_2^2 + L_6^2 + L_3^2}{2L_2L_6} \end{cases} \quad (3-11)$$

$$\begin{aligned} e = & \frac{-L_1L_5\sin\beta_1 - 2L_1^2\sin\beta_1\cos\beta_1 + L_1L_4\sin(\beta_1 + \beta_4)}{L_6(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)} \\ & + \frac{[(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2 + L_6^2 - (L_1\sin\beta_1 - L_4\sin\beta_4)^2]L_1\sin\beta_1}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \end{aligned} \quad (3-12)$$

$$\begin{aligned} e_1 = & \frac{-L_1L_5\cos\beta_1 - 2L_1^2\cos\beta_1 + L_1L_4\cos(\beta_1 + \beta_4)}{L_6(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)} \\ & + \frac{[-L_1L_5\sin\beta_1 - 2L_1^2\sin\beta_1\cos\beta_1 + L_1L_4\sin(\beta_1 + \beta_4)]L_1\sin\beta_1}{L_6(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{[-2L_5L_1\sin\beta_1 - 4L_1^2\sin\beta_1\cos\beta_1 + 2L_1L_4\sin(\beta_1 + \beta_4)]L_1\sin\beta_1}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \\
 & + \frac{[(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2 + L_6^2 - (L_1\sin\beta_1 - L_4\sin\beta_4)^2]L_1\cos\beta_1}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \\
 & + \frac{2L_1^2\sin^2\beta_1[(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2 + L_6^2 - (L_1\sin\beta_1 - L_4\sin\beta_4)^2]}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^3} \quad (3-13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_2 = & \frac{L_1L_4\cos(\beta_1 + \beta_4)}{L_6(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)} \\
 & - \frac{[-L_1L_5\sin\beta_1 - 2L_1^2\sin\beta_1\cos\beta_1 + L_1L_4\sin(\beta_1 + \beta_4)]L_4\sin\beta_4}{L_6(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \\
 & + \frac{2(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)L_4\sin\beta_4 - 2(L_1\sin\beta_1 - L_4\sin\beta_4)L_1L_4\sin\beta_1\cos\beta_4}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \\
 & - \frac{2L_1L_4\sin\beta_1\sin\beta_4[(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2 + L_6^2 - (L_1\sin\beta_1 - L_4\sin\beta_4)^2]}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^3} \quad (3-14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f = & \frac{L_5L_4\sin\beta_4 + L_1L_4\cos\beta_1\sin\beta_4 - L_4^2\cos\beta_4\sin\beta_4 + L_1L_4\sin\beta_1\sin\beta_4 - L_4^2\sin\beta_4\sin\beta_4}{L_6(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)} \\
 & - \frac{[(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2 + L_6^2 - (L_1\sin\beta_1 - L_4\sin\beta_4)^2]L_4\sin\beta_4}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \quad (3-15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_1 = & \frac{L_1L_4(\cos\beta_1\sin\beta_4 - \sin\beta_1\sin\beta_4)}{L_6^2(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \\
 & + \frac{(L_5L_4\sin\beta_4 + L_1L_4\cos\beta_1\sin\beta_4 - L_4^2\cos\beta_4\sin\beta_4 + L_1L_4\sin\beta_1\sin\beta_4 - L_4^2\sin^2\beta_4)L_1\sin\beta_1}{L_6(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \\
 & + \frac{[-2L_5L_1\sin\beta_1 - 4L_1^2\sin\beta_1\cos\beta_1 + 2L_1L_4\sin(\beta_1 + \beta_4)]L_1\sin\beta_1}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \\
 & + \frac{[(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2 + L_6^2 - (L_1\sin\beta_1 - L_4\sin\beta_4)^2]L_1\cos\beta_1}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2} \\
 & + \frac{2L_1^2\sin^2\beta_1[(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2 + L_6^2 - (L_1\sin\beta_1 - L_4\sin\beta_4)^2]}{(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^3} \quad (3-16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 = & \frac{L_5L_4\cos\beta_4 + L_1L_4\cos(\beta_1 - \beta_4) - L_4^2\cos 2\beta_4 - 2L_4^2\sin\beta_4\cos\beta_4}{L_6(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)} \\
 & - \frac{(L_5L_4\sin\beta_4 + L_1L_4\cos\beta_1\sin\beta_4 - L_4^2\cos\beta_4\sin\beta_4 + L_1L_4\sin\beta_1\sin\beta_4 - L_4^2\sin^2\beta_4)L_4\sin\beta_4}{L_6(L_5 + L_1\cos\beta_1 - L_4\cos\beta_4)^2}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{2(L_5 + L_1 \cos\beta_1 - L_4 \cos\beta_4)L_4 \sin\beta_4 - 2(L_1 \sin\beta_1 - L_4 \sin\beta_4)L_1 L_4 \sin\beta_1 \cos\beta_4}{(L_5 + L_1 \cos\beta_1 - L_4 \cos\beta_4)^2}$$

$$- \frac{2L_1 L_4 \sin\beta_1 \sin\beta_4 [(L_5 + L_1 \cos\beta_1 - L_4 \cos\beta_4)^2 + L_6^2 - (L_1 \sin\beta_1 - L_4 \sin\beta_4)^2]}{(L_5 + L_1 \cos\beta_1 - L_4 \cos\beta_4)^3} \quad (3-17)$$

$$g = \frac{(L_5 + L_1 \cos\beta_1 - L_4 \cos\beta_4)^2 + L_6^2 - (L_1 \sin\beta_1 - L_4 \sin\beta_4)^2}{2L_6(L_5 + L_1 \cos\beta_1 - L_4 \cos\beta_4)} \quad (3-18)$$

3.1.2 连杆机构系统的刚体加速度

3.1.2.1 四连杆机构运动分析

以图 2-15 所示电动机-弹性四连杆机构系统为研究对象,对应于该系统的广义坐标向量,系统的刚体加速度向量可表示为

$$\ddot{\mathbf{U}}_r = [0 \quad 0 \quad \ddot{\varphi}_1 \quad \ddot{\varphi}_1 \quad \ddot{\varphi}_1 \quad 0 \quad \ddot{X}_5 \quad \ddot{Y}_5 \quad \ddot{\varphi}_1 \quad \ddot{\varphi}_2 \quad \ddot{X}_6 \quad \ddot{Y}_6$$

$$\ddot{\varphi}_2 \quad 0 \quad \ddot{X}_7 \quad \ddot{Y}_7 \quad \ddot{\varphi}_2 \quad \ddot{\varphi}_3 \quad \ddot{X}_8 \quad \ddot{Y}_8 \quad \ddot{\varphi}_3 \quad 0 \quad \ddot{\varphi}_3 \quad 0]^T \quad (3-19)$$

式中: \ddot{X}_i 、 \ddot{Y}_i 分别为节点 i 处沿 x 、 y 轴方向的加速度。

显然,系统刚体加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_r$ 可表示为电动机转子瞬时角速度的平方 $\dot{\varphi}_1^2$ 和瞬时角加速度 $\ddot{\varphi}_1$ 的函数^[16],即

$$\ddot{\mathbf{U}}_r = \mathbf{U}_\omega \dot{\varphi}_1^2 + \mathbf{U}_\varepsilon \ddot{\varphi}_1 \quad (3-20)$$

式中: \mathbf{U}_ω 、 \mathbf{U}_ε 是与机构几何尺寸及位置有关的 24 阶系数列阵。

通过对机构系统进行刚体运动分析,得

$$(\mathbf{U}_\omega)_7 = -L_1 \cos\varphi_1$$

$$(\mathbf{U}_\omega)_8 = -L_1 \sin\varphi_1$$

$$(\mathbf{U}_\omega)_{10} = -\frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3) \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{L_2^2 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_2 L_3 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

$$(\mathbf{U}_\omega)_{11} = -L_1 \cos\varphi_1 - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{2L_2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} \cos\varphi_2$$

$$+ \frac{1}{2} L_2 \left[\frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3) \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{L_2^2 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} \right. \\ \left. + \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_2 L_3 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \right] \sin\varphi_2$$

$$(\mathbf{U}_\omega)_{12} = -L_1 \sin\varphi_1 - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{2L_2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} \sin\varphi_2$$

$$- \frac{1}{2} L_2 \left[\frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3) \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{L_2^2 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_2 L_3 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \Big] \cos \varphi_2 \\
 (\mathbf{U}_\omega)_{13} = & - \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3) \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{L_2^2 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_2 L_3 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \\
 (\mathbf{U}_\omega)_{15} = & - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)} \cos \varphi_3 - \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \sin \varphi_3 \\
 & + \left[\frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{L_3 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \right] \sin \varphi_3 \\
 (\mathbf{U}_\omega)_{16} = & - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)} \sin \varphi_3 + \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \cos \varphi_3 \\
 & - \left[\frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{L_3 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \right] \cos \varphi_3 \\
 (\mathbf{U}_\omega)_{17} = & - \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3) \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{L_2^2 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_2 L_3 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \\
 (\mathbf{U}_\omega)_{18} = & \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 L_3 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{L_3^2 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \\
 (\mathbf{U}_\omega)_{19} = & - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2L_3 \sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)} \cos \varphi_3 - \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \sin \varphi_3 \\
 & + \left[\frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{2L_2 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{2L_3 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \right] \sin \varphi_3 \\
 (\mathbf{U}_\omega)_{20} = & - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{2L_3 \sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)} \sin \varphi_3 + \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \cos \varphi_3 \\
 & - \left[\frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{2L_2 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{2L_3 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \right] \cos \varphi_3 \\
 (\mathbf{U}_\omega)_{21} = & \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 L_3 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{L_3^2 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)} \\
 (\mathbf{U}_\omega)_{23} = & \frac{L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 L_3 \sin^3(\varphi_2 - \varphi_3)} - \frac{L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{L_3^2 \sin^3(\varphi_3 - \varphi_2)}
 \end{aligned}$$

\mathbf{U}_ω 的其他各项为零。

通过对机构系统进行刚体运动分析,得

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_3 & = (\mathbf{U}_\varepsilon)_4 = (\mathbf{U}_\varepsilon)_5 = 1 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_7 & = -L_1 \sin \varphi_1 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_8 & = L_1 \cos \varphi_1 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_9 & = 1 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{10} & = \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{11} &= -L_1 \sin \varphi_1 - \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \sin \varphi_2 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{12} &= L_1 \cos \varphi_1 + \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \cos \varphi_2 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{13} &= \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{15} &= -\frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \sin \varphi_3 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{16} &= \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \cos \varphi_3 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{17} &= \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{L_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{18} &= \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{19} &= -\frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \sin \varphi_3 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{20} &= \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \cos \varphi_3 \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{21} &= \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \\
 (\mathbf{U}_\varepsilon)_{23} &= \frac{L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}
 \end{aligned}$$

\mathbf{U}_ε 的其他各项为零。

3.1.2.2 五连杆机构运动分析

系统动态方程中,刚体加速度列阵 $\ddot{\mathbf{u}}_r$ 可通过其他的刚体运动分析得到,它的元素与广义坐标 \mathbf{u} 的各元素相对应的刚体加速度或角速度有关。

对于图 2-18 所示混合驱动五杆机构系统,机构单元及两电动机单元对应的广义坐标向量为 \mathbf{u} ,系统的刚体加速度向量可表示为

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{u}}_r = & [\ddot{X}_2 \quad \ddot{Y}_2 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{X}_6 \quad \ddot{Y}_6 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \ddot{\theta}_3 \quad 0 \quad \ddot{X}_{10} \quad \ddot{Y}_{10} \quad \ddot{\theta}_3 \quad \ddot{\theta}_4 \quad \ddot{X}_{11} \quad \ddot{Y}_{11} \\
 & \ddot{\theta}_4 \quad 0 \quad \ddot{X}_{12} \quad \ddot{Y}_{12} \quad \ddot{\theta}_4 \quad \ddot{\theta}_5 \quad \ddot{X}_{13} \quad \ddot{Y}_{13} \quad \ddot{\theta}_5 \quad 0 \quad \ddot{X}_{14} \quad \ddot{Y}_{14} \quad \ddot{\theta}_5 \quad \ddot{\theta}_6 \quad \ddot{\theta}_6 \quad 0]^T
 \end{aligned} \tag{3-21}$$

式中: \ddot{X}_i 、 \ddot{Y}_i 为第 i 个节点沿 x 、 y 方向的刚体加速度; $\ddot{\theta}_j$ 为第 j 根杆的角加速度。并假设

$$\ddot{\mathbf{u}}_r = [\ddot{U}_{r1} \quad \ddot{U}_{r2} \quad \cdots \quad \ddot{U}_{r32}]^T$$

其中,



$$\begin{aligned}
 \ddot{U}_{r1} &= 0, & \ddot{U}_{r2} &= 0, & \ddot{U}_{r3} &= \ddot{\beta}_1, & \ddot{U}_{r4} &= \ddot{\beta}_1, & \ddot{U}_{r5} &= 0 \\
 \ddot{U}_{r6} &= 0, & \ddot{U}_{r7} &= \ddot{\beta}_4, & \ddot{U}_{r8} &= \ddot{\beta}_4, & \ddot{U}_{r9} &= \ddot{\beta}_4, & \ddot{U}_{r10} &= 0 \\
 \ddot{U}_{r11} &= -(L_4 \cos \beta_4) \ddot{\beta}_4^2 - (L_4 \sin \beta_4) \ddot{\beta}_4 \\
 \ddot{U}_{r12} &= (-L_4 \sin \beta_4) \ddot{\beta}_4^2 - (L_4 \cos \beta_4) \ddot{\beta}_4 \\
 \ddot{U}_{r13} &= \ddot{\beta}_4, & \ddot{U}_{r14} &= \ddot{\beta}_3 \\
 \ddot{U}_{r15} &= -L_1 \dot{\beta}_1^2 \cos \beta_1 - \frac{1}{2} L_2 \dot{\beta}_2^2 \cos \beta_2 \\
 \ddot{U}_{r16} &= -L_1 \dot{\beta}_1^2 \sin \beta_1 - \frac{1}{2} L_2 \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_2 \\
 \ddot{U}_{r17} &= \ddot{\beta}_3, & \ddot{U}_{r18} &= 0 \\
 \ddot{U}_{r19} &= -L_1 \dot{\beta}_1^2 \cos \beta_1 - L_2 \dot{\beta}_2^2 \cos \beta_2 \\
 \ddot{U}_{r20} &= -L_1 \dot{\beta}_1^2 \sin \beta_1 - L_2 \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_2 \\
 \ddot{U}_{r21} &= \ddot{\beta}_3, & \ddot{U}_{r22} &= \ddot{\beta}_2 \\
 \ddot{U}_{r23} &= -L_4 \dot{\beta}_4^2 \cos \beta_4 - \frac{1}{2} L_2 \dot{\beta}_3^2 \cos \beta_3 \\
 \ddot{U}_{r24} &= -L_4 \dot{\beta}_4^2 \sin \beta_4 - \frac{1}{2} L_3 \dot{\beta}_3^2 \sin \beta_3 \\
 \ddot{U}_{r25} &= \ddot{\beta}_2, & \ddot{U}_{r26} &= 0 \\
 \ddot{U}_{r27} &= -(L_1 \cos \beta_1) \dot{\beta}_1^2 - (L_1 \sin \beta_1) \ddot{\beta}_1 \\
 \ddot{U}_{r28} &= (-L_1 \sin \beta_1) \dot{\beta}_1^2 - (L_1 \cos \beta_1) \ddot{\beta}_1 \\
 \ddot{U}_{r29} &= \ddot{\beta}_2, & \ddot{U}_{r30} &= \ddot{\beta}_1 \\
 \ddot{U}_{r31} &= \ddot{\beta}_1, & \ddot{U}_{r32} &= 0
 \end{aligned}$$

由此可知, $\ddot{\mathbf{u}}_r$ 的元素与广义坐标 \mathbf{u} 的各元素相对应的刚体加速度或角速度有关, 可把 $\ddot{\mathbf{u}}_r$ 表示为双电动机转子瞬时角速度的平方 $\dot{\beta}_1^2, \dot{\beta}_4^2$, 角速度的乘积 $\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4$ 和瞬时角加速度 $\ddot{\beta}_1, \ddot{\beta}_4$ 的函数, 即

$$\ddot{\mathbf{u}}_r = \mathbf{u}_{\omega 1} \dot{\beta}_1^2 + \mathbf{u}_{\omega 2} \dot{\beta}_4^2 + \mathbf{u}_{\omega 3} \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4 + \mathbf{u}_{\varepsilon 1} \ddot{\beta}_1 + \mathbf{u}_{\varepsilon 2} \ddot{\beta}_4$$

式中: $\mathbf{u}_{\omega 1}, \mathbf{u}_{\omega 2}, \mathbf{u}_{\omega 3}, \mathbf{u}_{\varepsilon 1}, \mathbf{u}_{\varepsilon 2}$ 是与机构几何尺寸及位置有关的 32 阶系数列阵, 可以通过对机构系统进行刚体运动分析得到。

3.1.3 系统的自激惯性力

3.1.3.1 四连杆机构系统的自激惯性力

为保证简便而不失一般性, 这里分析电动机转子仅存在振动偏心的情况。由式

(2-7) 可得电动机气隙磁场能为

$$N_{12} = \frac{R_1 L_{01} A_0}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_1^2 + u_2^2}{2\sigma^2} \right) + \frac{u_1}{\sigma} \cos\alpha + \frac{u_2}{\sigma} \sin\alpha + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2\sigma^2} \cos 2\alpha + \frac{u_1 u_2}{\sigma^2} \sin 2\alpha \right] \cdot [F_{1m} \cos(\omega_0 t - \alpha) + F_{2m} \cos(\varphi_1 + s\omega_0 t - \alpha - \phi)]^2 \right\} d\alpha \quad (3-22)$$

将式(3-22)中的节点位移 u_1 、 u_2 用广义坐标列阵 U 中相对应的位移来替换, 则电动机的气隙磁场能 N_{12} 可表示为

$$N_{12} = \frac{R_1 L_{01} A_0}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\left(1 + \frac{U_1^2 + U_2^2}{2\sigma^2} \right) + \frac{U_1}{\sigma} \cos\alpha + \frac{U_2}{\sigma} \sin\alpha + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2\sigma^2} \cos 2\alpha + \frac{U_1 U_2}{\sigma^2} \sin 2\alpha \right] \cdot [F_{1m} \cos(\omega_0 t - \alpha) + F_{2m} \cos(\varphi_1 + s\omega_0 t - \alpha - \phi)]^2 \right\} d\alpha \quad (3-23)$$

式中: U_1 、 U_2 分别为广义坐标列阵 U 的第一、二坐标, 它表示电动机转子的弹性位移。

由电机学知识可知, 电磁转矩 T_e 可表示为^[96]

$$T_e = \frac{\partial N_{12}}{\partial \varphi_1} \quad (3-24)$$

将式(3-23)代入式(3-24)中, 整理得

$$T_e = \frac{g_{21}}{J_0} + \frac{g_{21}}{2\sigma^2 J_0} (U_1^2 + U_2^2) - \left[\frac{g_{22}}{4\sigma^2 J_0} (U_1^2 - U_2^2) - \frac{g_{23}}{2\sigma^2} U_1 U_2 \right] \sin \Omega_0 t + \left[\frac{g_{23}}{4\sigma^2 J_0} (U_1^2 - U_2^2) + \frac{g_{22}}{2\sigma^2 J_0} U_1 U_2 \right] \cos \Omega_0 t \quad (3-25)$$

式中:

$$\begin{aligned} g_{21} &= \pi R_1 L_{01} A_0 F_{1m} F_{2m} \sin \phi \\ g_{22} &= \pi R_1 L_{01} A_0 (F_{1m} F_{2m} \cos \phi + F_{2m}^2 \cos 2\phi) \\ g_{23} &= \pi R_1 L_{01} A_0 (F_{1m} F_{2m} \sin \phi + F_{2m}^2 \sin 2\phi) \\ \Omega_0 &= 2\omega_0 \end{aligned} \quad (3-26)$$

转子铜耗转矩 T_{Cu} 为^[96]

$$T_{Cu} = s T_e \quad (3-27)$$

式中: s 为转差率。

根据材料力学知识, 电动机负载转矩 T_r 可表示为^[16]

$$T_r = E_2 I_2 U_6 \quad (3-28)$$

式中: E_2 为曲柄材料的弹性模量; I_2 为曲柄根部的截面惯性矩; U_6 为广义坐标向量 U 的第六坐标, 它表示曲柄根部弹性变形的曲率。

这样, 电动机转子作定轴转动的动力学方程可表示为

$$J_0 \ddot{\varphi}_1 = T_e - T_{Cu} - T_r - T_{i0} \quad (3-29)$$

式中: J_0 为电动机轴(含转子)的转动惯量; T_{i0} 为电动机的空载制动转矩, 相对于 T_r 而言为一小量, 可忽略。



将式(3-25)、式(3-27)、式(3-28)代入式(3-29)中,并整理得

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{(1-s)g_{21}}{J_0} - \frac{E_2 I_2}{J_0} U_6 + \varepsilon \left\{ \frac{(1-s)g_{21}}{2\sigma^2 J_0} (U_1^2 + U_2^2) + (1-s) \left[\frac{g_{23}}{4\sigma^2 J_0} (U_1^2 - U_2^2) + \frac{g_{22}}{2\sigma^2 J_0} U_1 U_2 \right] \cos \Omega_0 t - (1-s) \left[\frac{g_{22}}{4\sigma^2 J_0} (U_1^2 - U_2^2) - \frac{g_{23}}{2\sigma^2} U_1 U_2 \right] \sin \Omega_0 t \right\} \quad (3-30)$$

若将式(3-30)中含有弹性位移 U_1 、 U_2 、 U_6 的项用系统广义坐标 \mathbf{U} 表示,则式(3-30)可表示为

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{(1-s)g_{21}}{J_0} + \mathbf{U}_{\varepsilon 1}^T \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\varepsilon 1} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\varepsilon 2} \mathbf{U} \cos \Omega_0 t + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\varepsilon 3} \mathbf{U} \sin \Omega_0 t \quad (3-31)$$

式中: $\mathbf{K}_{\varepsilon 1}$ 、 $\mathbf{K}_{\varepsilon 2}$ 、 $\mathbf{K}_{\varepsilon 3}$ 均为 24×24 阶矩阵, $\mathbf{U}_{\varepsilon 1}$ 为 24 阶向量,且

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_{\varepsilon 1})_6 &= -\frac{E_2 I_2}{J_0}, & (\mathbf{K}_{\varepsilon 1})_{11} &= (\mathbf{K}_{\varepsilon 1})_{22} = \frac{(1-s)g_{21}}{2\sigma^2 J_0} \\ (\mathbf{K}_{\varepsilon 2})_{11} &= \frac{(1-s)g_{23}}{4\sigma^2 J_0}, & (\mathbf{K}_{\varepsilon 2})_{22} &= -\frac{(1-s)g_{23}}{4\sigma^2 J_0}, & (\mathbf{K}_{\varepsilon 2})_{21} &= (\mathbf{K}_{\varepsilon 2})_{12} = \frac{(1-s)g_{22}}{2\sigma^2 J_0} \\ (\mathbf{K}_{\varepsilon 3})_{11} &= -\frac{(1-s)g_{23}}{4\sigma^2 J_0}, & (\mathbf{K}_{\varepsilon 3})_{22} &= \frac{(1-s)g_{23}}{4\sigma^2 J_0}, & (\mathbf{K}_{\varepsilon 3})_{21} &= (\mathbf{K}_{\varepsilon 3})_{12} = \frac{(1-s)g_{22}}{2\sigma^2 J_0} \end{aligned}$$

$\mathbf{K}_{\varepsilon 1}$ 、 $\mathbf{K}_{\varepsilon 2}$ 、 $\mathbf{K}_{\varepsilon 3}$ 和 $\mathbf{U}_{\varepsilon 1}$ 的其余各项均为零。

系统的自激惯性力可表示为

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_r \quad (3-32)$$

将式(3-20)代入式(3-32)中,得到系统的自激惯性力为

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{M}\mathbf{U}_\omega \dot{\varphi}_1^2 - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon \ddot{\varphi}_1 \quad (3-33)$$

考虑到系统稳定运转时电动机转子的瞬时角速度 $\dot{\varphi}_1$ 为连杆机构系统位置的周期函数,则 $-\mathbf{M}\mathbf{U}_\omega \dot{\varphi}_1^2$ 可展成如下形式的傅里叶级数:

$$-\mathbf{M}\mathbf{U}_\omega \dot{\varphi}_1^2 = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{Dk} \quad (3-34)$$

式中: N 为傅里叶级数的项数; \mathbf{F}_{Dk} 为傅里叶级数的第 k 阶简谐项列阵,且

$$(\mathbf{F}_{Dk})_i = Q_{Dki} \cos(k\Omega_1 t + \varphi_{ki})$$

式中: Ω_1 为电动机转速; Q_{Dki} 为幅值; φ_{ki} 为相应的相位角。

将式(3-31)、式(3-34)代入式(3-33),在小量前加上小项标志符号 ε ,整理得系统的自激惯性力为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{Dk} + \varepsilon \left[-\frac{(1-s)g_{21}}{J_0} \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}_{\varepsilon 1}^T \mathbf{U} - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\varepsilon 1} \mathbf{U} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\varepsilon 2} \mathbf{U} \cos(\Omega_0 t) - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{\varepsilon 3} \mathbf{U} \sin(\Omega_0 t) \right] \quad (3-35) \end{aligned}$$

由式(3-35)可知,系统的自激惯性力不仅与系统的转速有关,而且还与电磁参数

有关,不过,与电磁参数有关的部分相对整个惯性力而言为一小量。

3.1.3.2 五连杆机构系统的自激惯性力

混合驱动五杆机构系统自激惯性力可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 - \varepsilon(\mathbf{M}\mathbf{u}_{e1}\mathbf{k}_{e1}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{u}_{e1}\mathbf{u}^T\mathbf{k}_{e2}\mathbf{u} + \lambda_1\mathbf{M}\mathbf{u}_{e1} \\ & + \mathbf{M}\mathbf{u}_{e2}\mathbf{k}_{e1}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{u}_{e2}\mathbf{u}^T\mathbf{k}_{e2}\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{M}\mathbf{u}_{e2}) \end{aligned} \quad (3-36)$$

且

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_1)_i = \sum_{k=1}^m F_{1ki} \cos(k\nu_1 t + \tau_{1ki}) \\ (\mathbf{F}_2)_i = \sum_{k=1}^m F_{2ki} \cos(k\nu_2 t + \tau_{2ki}) \\ (\mathbf{F}_3)_i = \sum_{k=1}^m F_{3ki} \cos(k\nu_3 t + \tau_{3ki}) \end{cases} \quad (3-37)$$

式中: m 为傅里叶级数的项数; ν_1 为机构系统的执行点 C (见图3-2)实现固定轨迹时的伺服电动机转子的工作频率; ν_2 为三相交流电动机转子的转动频率; ν_3 为 ν_1 和 ν_2 的最小公倍数; $F_{1ki}, F_{2ki}, F_{3ki}$ 为幅值; $\tau_{1ki}, \tau_{2ki}, \tau_{3ki}$ 为相应的相位角。

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \frac{\varepsilon_{01}e_{11}}{J_{50}}(-g_1 \sin\beta_1 - g_2 \sin\beta_1 + g_3 \cos\beta_1) \\ & + \frac{\varepsilon_{01}e_{12}}{J_{50}}(g_1 \cos\beta_1 - g_2 \cos\beta_1 - g_3 \sin\beta_1) + \frac{\varepsilon_{01}^2}{J_{50}}[g_3 \cos 2\beta_1 - g_2 \sin 2\beta_1] \\ & + \frac{g'_1}{J_{50}} + \frac{(e_{11} + \varepsilon_{01} \cos\beta_1)^2}{2J_{50}}(g'_1 + g'_2) + \frac{(e_{12} + \varepsilon_{01} \sin\beta_1)^2}{2J_{50}}(g'_1 - g'_2) \\ & + \frac{1}{J_{50}}[-\varepsilon_{01}(e_{12} + \varepsilon_{01} \sin\beta_1) \sin\beta_1 + \varepsilon_{01}(e_{11} + \varepsilon_{01} \cos\beta_1) \cos\beta_1]g_3 \\ & + \frac{1}{J_{50}}(e_{11} + \varepsilon_{01} \cos\beta_1)(e_{12} + \varepsilon_{01} \sin\beta_1)g'_3 \end{aligned} \quad (3-38)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & \frac{\varepsilon_{02}e_{21}}{J_{10}}(-h_1 \sin\beta_4 - h_2 \sin\beta_4 + h_3 \cos\beta_4) \\ & + \frac{\varepsilon_{02}e_{22}}{J_{10}}(h_1 \cos\beta_4 - h_2 \cos\beta_4 - h_3 \sin\beta_4) + \frac{\varepsilon_{02}^2}{J_{10}}[h_3 \cos(2\beta_4) - h_2 \sin(2\beta_4)] \\ & + \frac{h'_1}{J_{10}} + \frac{(e_{21} + \varepsilon_{02} \cos\beta_4)^2}{2J_{10}}(h'_1 + h'_2) + \frac{(e_{22} + \varepsilon_{02} \sin\beta_4)^2}{2J_{10}}(h'_1 - h'_2) \\ & + \frac{1}{J_{10}}[-\varepsilon_{02}(e_{22} + \varepsilon_{02} \sin\beta_4) \sin\beta_4 + \varepsilon_{02}(e_{21} + \varepsilon_{02} \cos\beta_4) \cos\beta_4]h_3 \\ & + \frac{1}{J_{10}}(e_{21} + \varepsilon_{02} \cos\beta_4)(e_{22} + \varepsilon_{02} \sin\beta_4)h'_3 \end{aligned} \quad (3-39)$$

其中:当 $p=1$ 时,



$$g_1 = \frac{\pi p_s R_s l_s \Lambda_s}{4\omega_s^2} \{ F_{+s}^2 + F_{-s}^2 + F_{+r}^2 + F_{-r}^2 + 2F_{+s}F_{-s}\cos(2\omega_s t) + 2F_{+s}F_{+r}\cos\varphi_{s1} \\ + 2F_{+s}F_{-r}\cos[\beta_1 + (1 + s_s)\omega_s t - \varphi_{s2}] + 2F_{-s}F_{+r}\cos[\beta_1 + (1 + s_s)\omega_s t - \varphi_{s1}] \\ + 2F_{-s}F_{-r}\cos\varphi_{s2} + 2F_{+r}F_{-r}\cos(2\beta_1 + 2s_s\omega_s t - \varphi_{s1} - \varphi_{s2}) \} \quad (3-40)$$

$$g_2 = \frac{\pi p_s R_s l_s \Lambda_s}{2} \left\{ \frac{1}{2}F_{+s}^2\cos(2\omega_s t) + \frac{1}{2}F_{-s}^2\cos(2\omega_s t) \right. \\ + \frac{1}{2}F_{+r}^2\cos(2\beta_1 + 2s_s\omega_s t - 2\varphi_{s1}) + \frac{1}{2}F_{-r}^2\cos(2\beta_1 + 2s_s\omega_s t - 2\varphi_{s2}) \\ + F_{+s}F_{-s} + F_{+s}F_{+r}\cos[\beta_1 + (1 + s_s)\omega_s t - \varphi_{s1}] + F_{+s}F_{-r}\cos(-\varphi_{s2}) \\ \left. + F_{-s}F_{+r}\cos(-\varphi_{s1}) + F_{-s}F_{-r}\cos[\beta_1 + (1 + s_s)\omega_s t - \varphi_{s2}] + F_{+r}F_{-r}\cos(\varphi_{s1} - \varphi_{s2}) \right\} \quad (3-41)$$

$$g_3 = \frac{\pi p_s R_s l_s \Lambda_s}{2} \left\{ \frac{1}{2}F_{+s}^2\sin(2\omega_s t) - \frac{1}{2}F_{-s}^2\sin(2\omega_s t) \right. \\ + \frac{1}{2}F_{+r}^2\sin(2\beta_1 + 2s_s\omega_s t - 2\varphi_{s1}) - \frac{1}{2}F_{-r}^2\sin(2\beta_1 + 2s_s\omega_s t - 2\varphi_{s2}) \\ + F_{+s}F_{+r}\sin[\beta_1 + (1 + s_s)\omega_s t - \varphi_{s1}] - F_{+s}F_{-r}\sin(-\varphi_{s2}) \\ \left. - F_{-s}F_{+r}\sin(-\varphi_{s1}) - F_{-s}F_{-r}\sin[\beta_1 + (1 + s_s)\omega_s t - \varphi_{s2}] - F_{+r}F_{-r}\sin(\varphi_{s1} - \varphi_{s2}) \right\} \quad (3-42)$$

当 $p \neq 1$ 时, $g_2 = g_3 = 0$;

$$\begin{cases} h_1 = \frac{\pi R_1 l_{01} \Lambda_0}{2} [F_{1m}^2 + F_{2m}^2 + 2F_{1m}F_{2m}\cos\varphi_1] \\ h_2 = \frac{\pi R_{01} l_{01} \Lambda_0}{4} [F_{1m}^2\cos(2\omega_0 t) + F_{2m}^2\cos(2\omega_0 t - 2\varphi_1) + 2F_{1m}F_{2m}\cos(2\omega_0 t - \varphi_1)] \\ h_3 = \frac{\pi R_{01} l_{01} \Lambda_0}{4} [F_{1m}^2\sin(2\omega_0 t) + F_{2m}^2\sin(2\omega_0 t - 2\varphi_1) + 2F_{1m}F_{2m}\sin(2\omega_0 t - \varphi_1)] \end{cases}$$

3.2 系统的参激振动机理

3.2.1 四连杆机构系统的参激振动机理

将式(3-35)代入式(2-139)中,整理得

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + (K + K_{01})U = F + \sum_{k=1}^N F_{Dk} + \varepsilon \left[-\frac{(1-s)g_{21}}{J_0}MU_\varepsilon - MU_\varepsilon U_{\varepsilon 1}^T U \right. \\ \left. - MU_\varepsilon U^T K_{\varepsilon 1} U - MU_\varepsilon U^T K_{\varepsilon 2} U \cos(\Omega_0 t) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon\mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\varepsilon 3}\mathbf{U}\sin(\Omega_0 t) + \sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T\mathbf{G}_p\mathbf{K}_{\mu p}\mathbf{U} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\mu p}\mathbf{U}\mathbf{G}_p + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{U}^T\mathbf{G}_{kl}\mathbf{U}\mathbf{K}_{\mu kl}\mathbf{U} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{G}_{kl}\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\mu kl}\mathbf{U} \quad (3-43)
 \end{aligned}$$

根据式(2-139)的推导过程可知,式(3-43)中的 \mathbf{K}_{01} 为机电耦合矩阵,且可表示为

$$\mathbf{K}_{01} = \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}\cos(\Omega_0 t) + \mathbf{K}_{13}\sin(\Omega_0 t) \quad (3-44)$$

式中: $\mathbf{K}_{11}, \mathbf{K}_{12}, \mathbf{K}_{13}$ 分别为与电磁参数相关的 24×24 阶矩阵,且

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{K}_{11})_{11} &= (\mathbf{K}_{11})_{22} = -2g_{11} \\
 (\mathbf{K}_{12})_{11} &= -g_{12}, \quad (\mathbf{K}_{12})_{12} = (\mathbf{K}_{12})_{21} = g_{13}, \quad (\mathbf{K}_{12})_{22} = g_{12} \\
 (\mathbf{K}_{13})_{11} &= -g_{13}, \quad (\mathbf{K}_{13})_{12} = (\mathbf{K}_{13})_{21} = -g_{12}, \quad (\mathbf{K}_{13})_{22} = g_{13}
 \end{aligned}$$

其中, g_{11}, g_{12}, g_{13} 参见式(2-9)。

将式(3-44)代入式(3-43)中,整理得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} &= \mathbf{F} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{Dk} + \varepsilon \left[-\frac{(1-s)g_{21}}{J_0}\mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon\mathbf{U}_{\varepsilon 1}^T\mathbf{U} \right. \\
 & - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon\mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\varepsilon 1}\mathbf{U} - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon\mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\varepsilon 2}\mathbf{U}\cos(\Omega_0 t) - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon\mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\varepsilon 3}\mathbf{U}\sin(\Omega_0 t) \\
 & - \mathbf{K}_{11}\mathbf{U} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{U}\cos(\Omega_0 t) - \mathbf{K}_{13}\mathbf{U}\sin(\Omega_0 t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} \\
 & + \sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T\mathbf{G}_p\mathbf{K}_{\mu p}\mathbf{U} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\mu p}\mathbf{U}\mathbf{G}_p + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{U}^T\mathbf{G}_{kl}\mathbf{U}\mathbf{K}_{\mu kl}\mathbf{U} \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{G}_{kl}\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\mu kl}\mathbf{U} \right] \quad (3-45)
 \end{aligned}$$

由式(3-45)可得知,三相交流电动机-弹性连杆机构系统为非线性参激振动系统,该系统同时受到电磁参数激励和外激励的作用,其中外激励部分为

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{Dk} \quad (3-46)$$

它是由外力和自激惯性力导致的。

电磁参数激励部分为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1 &= -\mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon\mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\varepsilon 2}\mathbf{U}\cos(\Omega_0 t) - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon\mathbf{U}^T\mathbf{K}_{\varepsilon 3}\mathbf{U}\sin(\Omega_0 t) \\
 & - \mathbf{K}_{12}\mathbf{U}\cos(\Omega_0 t) - \mathbf{K}_{13}\mathbf{U}\sin(\Omega_0 t) \quad (3-47)
 \end{aligned}$$

由于式(3-47)中含有系统广义坐标列阵 \mathbf{U} 的平方项,因而该电磁参数激励是非线性的,在非线性的电磁参数激励的作用下系统将出现参激振动现象。显然,根据式(3-45)的推导过程可知,电磁参数激励是电动机转子振动偏心时不均匀气隙的气隙磁场导致的。



3.2.2 五连杆机构系统的参激振动机理

对于混合驱动五杆机构系统,设

$$-(\mathbf{K}_{11}^e + \mathbf{K}_{12}^e + \mathbf{K}_{21}^e + \mathbf{K}_{22}^e)\mathbf{e} - \mathbf{k}_0 = \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_7 + \mathbf{F}_8 \quad (3-48)$$

由式(2-8)至式(2-39)可知

$$\begin{cases} \mathbf{F}_4 = [a_1 & a_2 & \cdots & a_n]^T \\ \mathbf{F}_5 = [b_1 & b_2 & \cdots & b_n]^T \\ \mathbf{F}_6 = [c_1 & c_2 & \cdots & c_n]^T \\ \mathbf{F}_7 = [d_1 & d_2 & \cdots & d_n]^T \\ \mathbf{F}_8 = [f_1 & f_2 & \cdots & f_n]^T \end{cases} \quad (3-49)$$

其中, $\mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5, \dots, \mathbf{F}_8$ 为 n 阶向量,且

$$\begin{aligned} a_1 &= -[(\bar{\mathbf{k}}_{51})_{11} + (\bar{\mathbf{k}}_{11})_{11}](e_{11} + e_{21} + \varepsilon_{01}\cos\beta_1) - (\bar{\mathbf{k}}_{51})_{12}(e_{12} + e_{22} + \varepsilon_{01}\sin\beta_1) \\ a_2 &= -(\bar{\mathbf{k}}_{51})_{21}(e_{11} + e_{21} + \varepsilon_{01}\cos\beta_1) - [(\bar{\mathbf{k}}_{51})_{22} + (\bar{\mathbf{k}}_{11})_{22}](e_{12} + e_{22} + \varepsilon_{01}\sin\beta_1) \\ b_1 &= -[(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{11} + (\bar{\mathbf{k}}_{11})_{11}]\varepsilon_{02}\cos\beta_4 - (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{12}\varepsilon_{02}\sin\beta_4 \\ b_2 &= -(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{21}\varepsilon_{02}\cos\beta_4 - [(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{22} + (\bar{\mathbf{k}}_{11})_{22}]\varepsilon_{02}\sin\beta_4 \\ c_1 &= -(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{11}e_{11} - (\bar{\mathbf{k}}_{52})_{12}e_{12} - (\bar{\mathbf{k}}_{05})_1 \\ c_2 &= -(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{21}e_{11} - [(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{22} + (\bar{\mathbf{k}}_{12})_{22}]e_{12} + (\bar{\mathbf{k}}_{05})_2 \\ d_1 &= -(\bar{\mathbf{k}}_{12})_{11}e_{11} - (\bar{\mathbf{k}}_{12})_{12}e_{12} - (\bar{\mathbf{k}}_{01})_1 \\ d_2 &= -(\bar{\mathbf{k}}_{12})_{21}e_{11} - (\bar{\mathbf{k}}_{12})_{22}e_{12} - (\bar{\mathbf{k}}_{01})_2 \\ f_1 &= -[(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{11} + (\bar{\mathbf{k}}_{12})_{11}](\varepsilon_{01}\cos\beta_1 + e_{21} + \varepsilon_{02}\cos\beta_4) \\ &\quad - [(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{12} + (\bar{\mathbf{k}}_{12})_{12}](\varepsilon_{01}\sin\beta_1 + e_{22} + \varepsilon_{02}\sin\beta_4) \\ f_2 &= -[(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{21} + (\bar{\mathbf{k}}_{12})_{21}](\varepsilon_{01}\cos\beta_1 + e_{21} + \varepsilon_{02}\cos\beta_4) \\ &\quad - [(\bar{\mathbf{k}}_{52})_{22} + (\bar{\mathbf{k}}_{12})_{22}](\varepsilon_{01}\sin\beta_1 + e_{22} + \varepsilon_{02}\sin\beta_4) \end{aligned}$$

$\mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5, \dots, \mathbf{F}_8$ 其他各元素为零。

可见 $\mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5, \dots, \mathbf{F}_8$ 为周期函数,则可分别将其展开成如下形式的傅里叶级数:

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_4)_i = \sum_{k=1}^m F_{4ki} \cos(k\nu_4 t + \tau_{4ki}) \\ (\mathbf{F}_5)_i = \sum_{k=1}^m F_{5ki} \cos(k\nu_5 t + \tau_{5ki}) \\ (\mathbf{F}_6)_i = \sum_{k=1}^m F_{6ki} \cos(k\nu_6 t + \tau_{6ki}) \\ (\mathbf{F}_7)_i = \sum_{k=1}^m F_{7ki} \cos(k\nu_7 t + \tau_{7ki}) \\ (\mathbf{F}_8)_i = \sum_{k=1}^m F_{8ki} \cos(k\nu_8 t + \tau_{8ki}) \end{cases} \quad (3-50)$$

式中: $\nu_1, \nu_2, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ 为伺服电动机定子绕组旋转磁场转动频率, 且 $\nu_1 = \nu_4, \nu_2 = \nu_5$; ν_7 为三相交流电动机定子绕组旋转磁场转动频率; ν_8 为 ν_1, ν_2, ν_6 和 ν_7 的最小公倍数; $F_{4ki}, F_{5ki}, \dots, F_{8ki}$ 为幅值, $\tau_{4ki}, \tau_{5ki}, \dots, \tau_{8ki}$ 为相应的相位角。

再假设机构系统受到单频周期外激励, 为便于统一计算, 将其表示为

$$(\mathbf{F}_0)_i = \sum_{k=1}^m F_{9ki} \cos(kv_9 t + \tau_{9ki}) \quad (3-51)$$

将式(3-37)、式(3-48)和式(3-50)代入式(2-146)中, 整理得

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_0)\mathbf{u} = & \sum_{f=1}^9 \mathbf{F}_f + \varepsilon \left[-\mathbf{M}\mathbf{u}_{\varepsilon 1} \mathbf{k}_{\varepsilon 1} \mathbf{u} - \mathbf{M}\mathbf{u}_{\varepsilon 1} \mathbf{u}^T \mathbf{k}_{\varepsilon 2} \mathbf{u} - \lambda_1 \mathbf{M}\mathbf{u}_{\varepsilon 1} - \mathbf{M}\mathbf{u}_{\varepsilon 2} \mathbf{k}_{\varepsilon 1} \mathbf{u} \right. \\ & - \mathbf{M}\mathbf{u}_{\varepsilon 2} \mathbf{u}^T \mathbf{k}_{\varepsilon 2} \mathbf{u} - \lambda_2 \mathbf{M}\mathbf{u}_{\varepsilon 2} + \sum_{n=1}^8 \mathbf{u}^T \mathbf{G}_n \mathbf{K}_n \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 \mathbf{u}^T \mathbf{K}_n \mathbf{u} \mathbf{G}_n \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \mathbf{u}^T \mathbf{G}_{gl} \mathbf{u} \mathbf{K}_{gl} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \mathbf{G}_{gl} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{gl} \mathbf{u} \right] \\ & (g, l = 2, 3, \dots, 8) \end{aligned} \quad (3-52)$$

从式(3-52) ε 后括号中的各项可看出, 系统动态方程具有除由连杆机构构件的几何非线性引起的非线性项外, 还含有由电磁参数引起的非线性项, 在非线形电磁参数激励的作用下系统将出现参激振动现象。

3.3 参激振动的耦合研究

3.3.1 四连杆机构系统参激振动的耦合

对式(3-45)作线性变换

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\mathbf{U}} = \boldsymbol{\phi} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\mathbf{U}} = \boldsymbol{\phi} \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{cases} \quad (3-53)$$

式中: $\boldsymbol{\phi}$ 为正则模态矩阵; $\boldsymbol{\eta}$ 为相应的模态坐标列阵。

将式(3-53)代入式(3-45)中, 并左乘 $\boldsymbol{\phi}^T$, 整理得系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_{00} \boldsymbol{\eta} = & \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{0Dk} + \varepsilon \left[-\frac{(1-s)g_{21}}{J_0} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_{\varepsilon} - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_{\varepsilon} \mathbf{U}_{\varepsilon 1}^T \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} \right. \\ & - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_{\varepsilon} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\varepsilon 1} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_{\varepsilon} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\varepsilon 2} \boldsymbol{\eta} \cos(\Omega_0 t) - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_{\varepsilon} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\varepsilon 3} \boldsymbol{\eta} \sin(\Omega_0 t) \\ & - \mathbf{K}_{011} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{K}_{012} \boldsymbol{\eta} \cos(\Omega_0 t) - \mathbf{K}_{013} \boldsymbol{\eta} \sin(\Omega_0 t) - \mathbf{C}_0 \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ & + \sum_{p=1}^8 \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{G}_{0p} \mathbf{K}_{0\mu p} \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\mu p} \boldsymbol{\eta} \mathbf{G}_{0p} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{G}_{0kl} \boldsymbol{\eta} \mathbf{K}_{0\mu kl} \boldsymbol{\eta} \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{G}_{0kl} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\mu kl} \boldsymbol{\eta} \right] \end{aligned} \quad (3-54)$$



式中:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{00} &= \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{C}_0 = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{K}_{0\varepsilon 1} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\phi} \\
 \mathbf{K}_{0\varepsilon 2} &= \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{\varepsilon 2} \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{K}_{0\varepsilon 3} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{\varepsilon 3} \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{K}_{011} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{11} \boldsymbol{\phi} \\
 \mathbf{K}_{012} &= \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{12} \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{K}_{013} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{13} \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{K}_{0p} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_p \boldsymbol{\phi} \\
 \mathbf{K}_{0kl} &= \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{kl} \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{G}_{0kl} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}_{kl} \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{G}_{0p} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}_{0p}, \quad \mathbf{F}_{0Dk} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{F}_{Dk}
 \end{aligned}$$

由于 \mathbf{K}_{00} 与机构运动位置有关, 因而 \mathbf{K}_{00} 可表示为

$$\mathbf{K}_{00} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \tag{3-55}$$

式中: \mathbf{K}_0 为 \mathbf{K}_{00} 在一个运动周期内的平均值, 是常量矩阵; \mathbf{K}_1 为时变量矩阵。

将式(3-55)代入式(3-54)中, 得

$$\begin{aligned}
 \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{0Dk} + \varepsilon \left[-\frac{(1-s)g_{21}}{J_0} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}_{\varepsilon 1}^T \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} \right. \\
 &\quad - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\varepsilon 1} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\varepsilon 2} \boldsymbol{\eta} \cos(\Omega_0 t) - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\varepsilon 3} \boldsymbol{\eta} \sin(\Omega_0 t) \\
 &\quad - \mathbf{K}_{011} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{K}_{012} \boldsymbol{\eta} \cos(\Omega_0 t) - \mathbf{K}_{013} \boldsymbol{\eta} \sin(\Omega_0 t) - \mathbf{C}_0 \dot{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\eta} \\
 &\quad + \sum_{p=1}^8 \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{G}_{0p} \mathbf{K}_{0\mu p} \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\mu p} \boldsymbol{\eta} \mathbf{G}_{0p} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{G}_{0kl} \boldsymbol{\eta} \mathbf{K}_{0\mu kl} \boldsymbol{\eta} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{G}_{0kl} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0\mu kl} \boldsymbol{\eta} \right] \tag{3-56}
 \end{aligned}$$

利用多尺度法, 引入 $n+1$ 个不同尺度的时间变量 T_m 作为独立的自变量, 且

$$T_m = \varepsilon^m t \quad (m = 0, 1, \dots, n) \tag{3-57}$$

则 $\boldsymbol{\eta}$ 可表示为这 $n+1$ 个自变量 T_m 和 ε 的函数, 即

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\eta}_0(T_0, T_1, \dots, T_n) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}_1(T_0, T_1, \dots, T_n) + \varepsilon^2 \boldsymbol{\eta}_2(T_0, T_1, \dots, T_n) + \dots \\
 &\quad + \varepsilon^n \boldsymbol{\eta}_n(T_0, T_1, \dots, T_n) \tag{3-58}
 \end{aligned}$$

因而关于 t 的导数可变成关于 T_m 的偏导数的展开式, 即

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{cases} \tag{3-59}$$

式中: $D_r = \frac{\partial}{\partial T_r}, r = 1, 2, \dots, n, n$ 为系统的自由度数。

取 $\boldsymbol{\eta}$ 的近似一次解, 得

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0(T_0, T_1) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}_1(T_0, T_1) \tag{3-60}$$

则 $\boldsymbol{\eta}$ 中各元素 η_r 可表示为

$$\eta_r = \eta_{r0} + \eta_{r1} \tag{3-61}$$

将式(3-59)、式(3-60)代入式(3-56), 并使 ε 同阶项的系数相等, 得 ε^0 阶为

$$D_0^2 \boldsymbol{\eta}_0 + \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{0Dk} \quad (3-62)$$

ε^1 阶为

$$\begin{aligned} D_0^2 \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\eta}_1 = & -\frac{(1-s)g_{21}}{J_0} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}_{\varepsilon 1}^T \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}_0^T \mathbf{K}_{0\varepsilon 1} \boldsymbol{\eta}_0 \\ & - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}_0^T \mathbf{K}_{0\varepsilon 2} \boldsymbol{\eta}_0 \cos(\Omega_0 t) - \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}_0^T \mathbf{K}_{0\varepsilon 3} \boldsymbol{\eta}_0 \sin(\Omega_0 t) - \mathbf{K}_{011} \boldsymbol{\eta}_0 \\ & - \mathbf{K}_{012} \boldsymbol{\eta}_0 \cos(\Omega_0 t) - \mathbf{K}_{013} \boldsymbol{\eta}_0 \sin(\Omega_0 t) - 2D_0 \left(D_1 \boldsymbol{\eta}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\eta}_0 \right) - \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\eta}_0 \\ & + \sum_{p=1}^8 \boldsymbol{\eta}_0^T \mathbf{G}_{0p} \mathbf{K}_{0\mu p} \boldsymbol{\eta}_0 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \boldsymbol{\eta}_0^T \mathbf{K}_{0\mu p} \boldsymbol{\eta}_0 \mathbf{G}_{0p} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \boldsymbol{\eta}_1^T \mathbf{G}_{0kl} \boldsymbol{\eta}_0 \mathbf{K}_{0\mu kl} \boldsymbol{\eta}_0 \\ & + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{G}_{0kl} \boldsymbol{\eta}_0 \boldsymbol{\eta}_0^T \mathbf{K}_{0\mu kl} \boldsymbol{\eta}_0 \end{aligned} \quad (3-63)$$

式(3-63)的一阶近似解可表示为

$$\boldsymbol{\eta}_{r0} = A_r(T_1) \exp(i\omega_r T_0) + \sum_{k=1}^N B_{rk} \exp(ik\Omega_1 T_0) + Q_r \exp(i\Omega_2 T_0) + c_r \quad (3-64)$$

式中： ω_r 为系统在一个运动周期内第 r 阶固有频率的平均值； N 为自激惯性力傅里叶展开式所截取的项数； Ω_2 为 \mathbf{F}_0 的激励频率； c_r 为式(3-40)右侧前几项的共轭函数；此外，还有

$$A_r(T_1) = \frac{1}{2} a_r \exp i\theta_r \quad (3-65)$$

$$B_{rk} = B_{0rk} \exp i\varphi_{rk} \quad (3-66)$$

$$Q_r = \frac{Q_{0r}}{2(\omega_r^2 - \Omega_2^2)} \exp i\gamma_r \quad (3-67)$$

其中， $r=1, 2, \dots, n$ (n 为系统的自由度数)， a_r 和 θ_r 为待求量， Q_{0r} 、 γ_r 分别为 \mathbf{F}_0 中第 r 行元素的幅值和相角；且

$$B_{0rk} = \frac{F_{0Drk}}{2(\omega_r^2 - k^2 \Omega_1^2)} \quad (3-68)$$

且 F_{0Drk} 、 φ_{0rk} 分别为 \mathbf{F}_{0Dk} 中第 r 行元素的幅值和相角。

对于多自由度非线性系统，其一阶近似非线性系统标准方程的右侧各直接展开表达式的频率成分，定义为频率因子。一个频率因子多次出现时，以出现一次计算^[97]。

将式(3-64)代入式(3-63)即可得到系统的频率因子，系统的频率因子可分为以下几类。

- (1) 包含电磁参数激励频率 Ω_0 项的主共振频率因子，即

$$\Omega_0$$



(2) 包含电磁参数激励频率 Ω_0 项的组合共振频率因子, 即

$$\Omega_0 \pm k\Omega_1, \Omega_0 \pm \Omega_2, \Omega_0 \pm \omega_i, \Omega_0 \pm \Omega_2 \pm k\Omega_1, \Omega_0 \pm k\Omega_1 \pm \omega_i$$

$$\Omega_0 \pm \Omega_2 \pm \omega_i, \Omega_0 \pm (k \pm p)\Omega_1, \Omega_0 \pm 2\Omega_2, \Omega_0 \pm 2\omega_i, \Omega_0 \pm \omega_i \pm \omega_j$$

(3) 不包含电磁参数激励频率 Ω_0 项的组合共振频率因子, 即

$$\Omega_2 \pm k\Omega_1, \Omega_2 \pm 2k\Omega_1, 2\Omega_2 \pm k\Omega_1, \Omega_2 \pm k\Omega_1 \pm \omega_i, 2k\Omega_1 \pm \omega_i$$

$$2\Omega_2 \pm \omega_i, k\Omega_1 \pm \omega_i, \Omega_2 \pm \omega_i, k\Omega_1 \pm \omega_i \pm \omega_j, \Omega_2 \pm \omega_i \pm \omega_j$$

(4) 不包含电磁参数激励频率 Ω_0 项的超谐共振频率因子, 即

$$(k \pm p)\Omega_1, 2\Omega_2, (k \pm p \pm l)\Omega_1, 3\Omega_2$$

(5) 内共振频率因子, 即

$$2\omega_i, \omega_i \pm \omega_j, 3\omega_i, \omega_i \pm 2\omega_j, \omega_i \pm \omega_j \pm \omega_m$$

式中: i, j, m 为系统固有频率的阶数, $i, j, m = 1, 2, \dots, 24 (i \neq j \neq m)$; k, p, l 为系统自激惯性力傅里叶级数的项数, $k, p, l = 1, 2, \dots, N$, 其中, N 为系统自激惯性力傅里叶级数的最高截取项。

根据频率因子中所含频率成分的不同, 可按如下方式定义: 第(1)类频率因子定义为参激振动频率因子, 当该类频率因子与系统的某阶固有频率相等或近似相等时, 就会出现非线性参数激励下的共振现象; 第(3)、(4)类频率因子定义为强迫振动频率因子, 当该类频率因子与系统的某阶固有频率相等或近似相等时, 就会出现外激励下的共振现象; 第(5)类频率因子定义为内共振频率因子, 当该类频率因子与系统的某阶固有频率相等或近似相等时, 就会激发系统的内共振现象; 第(2)类频率因子中同时包含电磁参数激励频率成分和外力激励频率成分的频率因子, 定义为非线性参激振动和强迫振动相耦合的频率因子, 当该类频率因子与系统的某阶固有频率相等或近似相等时, 就会出现非线性参数激励与外激励相耦合的共振现象。若系统同时出现非线性参数激励下的共振现象和外激励下的共振现象, 则此时系统出现非线性参数激励和外激励共同作用下的参、强共振现象。

3.3.2 五连杆机构系统参激振动的耦合

对于混合驱动五杆机构系统, 式(3-52)可简化为

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{\eta} = \sum_{f=1}^9 \boldsymbol{F}_{0f} + \boldsymbol{\varepsilon} \left[-\boldsymbol{K}_{00} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{u}_{\varepsilon 1} \boldsymbol{k}_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{u}_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{k}_{\varepsilon 2} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} - \lambda_1 \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{u}_{\varepsilon 1} \right.$$

$$\left. - \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{u}_{\varepsilon 2} \boldsymbol{k}_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{u}_{\varepsilon 2} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{k}_{\varepsilon 2} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} - \lambda_2 \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{u}_{\varepsilon 2} + \sum_{n=1}^8 \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{G}_{0n} \boldsymbol{K}_{0n} \boldsymbol{\eta} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{K}_{0n} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{G}_{0n} + \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{G}_{0gl} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{K}_{0gl} \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \boldsymbol{G}_{0gl} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{K}_{0gl} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{C}_0 \dot{\boldsymbol{\eta}} \right]$$

$$(g, l = 2, 3, \dots, 8) \quad (3-69)$$

式中:

$$\boldsymbol{\omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_0 = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{F}, \quad \sum_{j=1}^8 \mathbf{F}_{0j} = \sum_{j=1}^8 \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{F}_j$$

$$\mathbf{K}_{011}^e + \mathbf{K}_{012}^e + \mathbf{K}_{021}^e + \mathbf{K}_{022}^e = \boldsymbol{\phi}^T (\mathbf{K}_{11}^e + \mathbf{K}_{12}^e + \mathbf{K}_{21}^e + \mathbf{K}_{22}^e)$$

$$\mathbf{k}_{00} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{k}_0, \quad \mathbf{K}_{00} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{G}_{0n} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}_n, \quad \mathbf{M}_0 = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M}$$

$$\mathbf{K}_{0n} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_n \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{G}_{0gl} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{G}_{gl} \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{K}_{0gl} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{gl} \boldsymbol{\phi}$$

且 ζ_n 、 ω_n 分别为系统在一个运动周期内的第 n 阶正则振型阻尼比和固有频率均值, ζ_n 可通过实验求得。

式(3-69)也可写成

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_r + \boldsymbol{\omega}_r^2 \boldsymbol{\eta}_r = & \sum_{j=1}^9 \mathbf{F}_{0j} + \varepsilon \left[-2\zeta_r \boldsymbol{\omega}_r \dot{\boldsymbol{\eta}}_r - \boldsymbol{\xi} \mathbf{K}_{00} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{u}_{\varepsilon 1} \mathbf{k}_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} \right. \\ & - \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{u}_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k}_{\varepsilon 2} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} - \lambda_1 \boldsymbol{\xi} \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{\varepsilon 1} - \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{u}_{\varepsilon 2} \mathbf{k}_{\varepsilon 1} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} \\ & - \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{u}_{\varepsilon 2} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k}_{\varepsilon 2} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\eta} - \lambda_2 \boldsymbol{\xi} \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{\varepsilon 2} + \sum_{n=1}^8 \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{G}_{0n} \mathbf{K}_{0n} \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0n} \boldsymbol{\eta} \mathbf{G}_{0n} \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{G}_{0gl} \boldsymbol{\eta} \mathbf{K}_{0gl} \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \boldsymbol{\xi} \mathbf{G}_{0gl} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K}_{0gl} \boldsymbol{\eta} \right] \\ & (g, l = 2, 3, \dots, 8; r = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3-70)$$

式中: $\boldsymbol{\xi}$ 为 n 阶向量, 且 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 r 个元素为 1, 其余各元素为零。可见, 这是一个二阶微分方程组, 它由 n 个方程组成, 其中 n 为系统的自由度。可知, 系统受到多频激励共同的作用。

对式(3-70)进行简化得

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_r + \boldsymbol{\omega}_r^2 \boldsymbol{\eta}_r = & \sum_{j=1}^9 \mathbf{F}_{0j} + \varepsilon \left(-2\zeta_r \boldsymbol{\omega}_r \dot{\boldsymbol{\eta}}_r - \lambda_1 \boldsymbol{\xi} \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{\varepsilon 1} - \lambda_2 \boldsymbol{\xi} \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{\varepsilon 2} \right. \\ & \left. - \sum_s \alpha_s \boldsymbol{\eta}_s + \sum_{s,t} \delta_{st} \boldsymbol{\eta}_s \boldsymbol{\eta}_t + \sum_{s,t,u} v_{stu} \boldsymbol{\eta}_s \boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_u \right) \\ & (g, l = 2, 3, \dots, 8; r, s, t, u = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3-71)$$

式中:



$$\left\{ \begin{aligned} \sum_s \alpha_s \eta_s &= \xi K_{00} \eta + \xi \phi^T M u_{\varepsilon 1} k_{\varepsilon 1} \phi \eta + \xi \phi^T M u_{\varepsilon 2} k_{\varepsilon 1} \phi \eta \\ \sum_{s,t} \delta_{st} \eta_s \eta_t &= \sum_{n=1}^8 \xi \eta^T G_{0n} K_{0n} \eta + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 \xi \eta^T K_{0n} \eta G_{0n} + \xi \phi^T M u_{\varepsilon 1} \phi^T \eta^T k_{\varepsilon 2} \phi \eta \\ &\quad + \xi \phi^T M u_{\varepsilon 2} \phi^T \eta^T k_{\varepsilon 2} \phi \eta \\ \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \eta_s \eta_t \eta_u &= \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \xi \eta^T G_{0gl} \eta K_{0gl} \eta + \frac{1}{2} \sum_g \sum_l \xi G_{0gl} \eta \eta^T K_{0gl} \eta \end{aligned} \right. \quad (3-72)$$

式中： α_s 、 δ_{st} 、 ν_{stu} 分别为对应 η_s 、 $\eta_s \eta_t$ 、 $\eta_s \eta_t \eta_u$ 项的系数。

利用多尺度法分析可知，使 ε 同次幂的系数之和为零，得

$$D_0^2 \eta_{r0} + \omega_r^2 \eta_{r0} = \sum_{f=1}^9 F_{0fr} \quad (3-73)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 \eta_{r1} + \omega_r^2 \eta_{r1} &= -2D_0 D_1 \eta_{r0} - 2\zeta_r \omega_r D_0 \eta_{r0} - \lambda_1 \xi M_0 u_{\varepsilon 1} - \lambda_2 \xi M_0 u_{\varepsilon 2} \\ &\quad - \sum_s \alpha_s \eta_{s0} + \sum_{s,t} \delta_{st} \eta_{s0} \eta_{t0} + \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \eta_{s0} \eta_{t0} \eta_{u0} \end{aligned} \quad (3-74)$$

先求方程(3-73)的解，得

$$\eta_{r0} = A_r(T_1) \exp(i\omega_r T_0) + \sum_{f=1}^9 \sum_{k=1}^m [A_{fkr} \exp(ik\nu_f T_0)] + CC \quad (3-75)$$

式中：

$$A_r = \frac{1}{2} a_r \exp i\theta_r \quad (3-76)$$

$$\Lambda_{prk} = \Gamma_{prk} \exp i\tau_{pki}, \quad (p = 1, 2, \dots, 9) \quad (3-77)$$

其中， $\Gamma_{prk} = \frac{F_{0prk}}{2(\omega_r^2 - k^2 \nu_p^2)}$ ， a_r 和 θ_r 是待求量。

将式(3-75)代入式(3-74)可知，对于混合驱动五杆机构系统，可以同时存在多个共振条件，也就是说，可以同时存在主共振、超谐共振、次谐共振和组合共振，等等。这些共振频率组合为

$$\begin{aligned} \omega_s &\approx \omega_t + \omega_u \quad (\text{内共振}) \\ \omega_r &\approx \nu_p \quad (\text{主共振}) \\ \omega_r &\approx \frac{1}{3} \nu_p \quad (\text{次谐共振}) \\ \omega_r &\approx \frac{1}{2} \nu_p \quad (\text{次谐共振}) \\ \omega_r &\approx k\nu_p \quad (k \neq 1) \quad (\text{超谐共振}) \\ \omega_r &\approx |\pm j\nu_p \pm k\nu_q| \quad (\text{组合共振}) \\ \omega_r &\approx |\pm 2j\nu_p \pm k\nu_q| \quad (\text{组合共振}) \end{aligned}$$

式中： $p = 1, 2, \dots, 9$ ； $q = 1, 2, \dots, 9$ ； $j = 1, 2, \dots, m$ ； $k = 1, 2, \dots, m$ ，并且，当 $p = q$ 时 $j \neq k$ ，当 $j = k$ 时 $p \neq q$ 。可知，两自由度连杆机构是一个多频振动系统，系统共振特性不仅

与系统外激励有关,而且还与驱动控制电动机转子转动频率(Ω_1 和 Ω_2)和电动机定子绕组旋转磁场的旋转频率($2\omega_{01}$ 和 $2\omega_{02}$)有关。对于多频激励,可以同时存在多于一个的共振条件,这就是说,可以同时存在超谐波共振和次谐波共振,或者同时存在超谐波共振和组合共振,等等,这时机构系统就产生多重共振,或者说联合共振。

3.4 共振分析

3.4.1 电动机-四连杆机构系统共振分析

对于连杆机构系统而言,由于高阶谐和分量的衰减作用,系统高阶振型的共振效应不很明显,只剩下前几阶的共振效应,特别是当前几阶固有频率分布较稀疏时,第一阶振型会占主要地位^[16]。为保证简单且不失一般性,这里在分析系统非线性特性时仅考虑机构的前两阶振动模态。

若系统无外力作用,则有

$$F_0 = 0 \quad (3-78)$$

将式(3-78)代入式(3-62),得

$$D_0^2 \eta_0 + K_0 \eta_0 = \sum_{k=1}^N F_{0Dk} \quad (3-79)$$

式(3-79)的解可表示为

$$\eta_0 = A_r(T_1) \exp(i\omega_r T_0) + \sum_{k=1}^N B_{rk} \exp(ik\Omega_1 T_0) + c_r \quad (3-80)$$

式中: $A_r(T_1)$, B_{rk} , c_r 的含义参见式(3-64)。

3.4.1.1 主共振分析

主共振包括电磁参数激励下的主共振和外力作用下的主共振,电磁参数激励下的主共振的频率因子为 Ω_0 ,外力 $F_0 = H \cos(\Omega_2 t)$ 作用下的主共振频率因子为 Ω_2 ,其中 H 为一小量,且 $H = \varepsilon h$ 。

这里在不考虑外力的情况下对系统存在内共振情形($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足主共振条件 $\Omega_0 \approx \omega_2$ 时的电磁参数激励下的主共振情况进行分析。

引进调谐参数 σ_1, σ_2 ,使

$$\begin{cases} \Omega_0 = \omega_2 + \varepsilon \sigma_1 \\ \omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon \sigma_2 \end{cases} \quad (3-81)$$

将式(3-80)、式(3-81)分别代入式(3-63),得到消除前两阶长期项的条件:

$$\begin{aligned} & 3b_{1111} A_1^2 \bar{A}_1 + 2b_{1122} A_1 A_2 \bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (6b_{1111} A_1 B_{1k} \bar{B}_{1k} + 2b_{1112} A_1 B_{1k} \bar{B}_{2k} \\ & + 2b_{1112} A_1 \bar{B}_{1k} B_{2k} + 6b_{1122} A_1 B_{2k} \bar{B}_{2k}) - b_{1011} A_1 - ib_{1041} (D_1 A_1 + b_{1051} A_1) \\ & + b_{112} \bar{A}_1 A_2 \exp(i\sigma_1 T_1) - E_{101} \bar{A}_1 \exp i(\sigma_1 + \sigma_2) T_1 \end{aligned}$$



$$= 0 \quad (3-82)$$

$$\begin{aligned} & 2b_{2112}A_1\bar{A}_1A_2 + 3b_{2222}A_2^2\bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (2b_{2112}A_2B_{1k}\bar{B}_{1k} + 2b_{2122}A_2B_{1k}\bar{B}_{2k} \\ & + 2b_{2122}A_2\bar{B}_{1k}B_{2k} + 6b_{2222}A_2B_{2k}\bar{B}_{2k}) - b_{2012}A_2 - ib_{2042}(D_1A_2 + b_{2051}A_2) \\ & + b_{211}A_1^2\exp(-i\sigma_2T_1) + \left[2E_{2011}A_1\bar{A}_1 + 2E_{2022}A_2\bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N 2E_{2011}B_{1k}\bar{B}_{1k} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^N E_{2012}(B_{1k}\bar{B}_{2k} + \bar{B}_{1k}B_{2k}) + \sum_{k=1}^N 2E_{2022}B_{2k}\bar{B}_{2k} \right] \exp(i\sigma_1T_1) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-83)$$

式中: $b_{1011}, b_{1041}, b_{1051}, b_{2012}, b_{2042}, b_{2051}, b_{rmm}, b_{rnmf} (r, m, n, f = 1, 2), E_{101}, E_{2011}, E_{2012}, E_{2022}$ 可通过式(3-83)中的矩阵或向量求得。

将式(3-41)、式(3-42)代入式(3-48)、式(3-49),整理得

$$\begin{aligned} & 3b_{1111}a_1^3 + 2b_{1122}a_1a_2^2 + \sum_{k=1}^N [6b_{1111}a_1B_{01k}^2 + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k}\exp i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \\ & + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k}\exp i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + 2b_{1122}a_1B_{02k}^2] - b_{1011}a_1 \\ & - ib_{1041}(a'_1 + b_{1051}a_1) + b_{1041}a_1\theta'_1 + b_{112}a_1a_2\exp i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1) \\ & - E_{101}a_1\exp\{-i[2\theta_1 - (\sigma_1 + \sigma_2)T_1]\} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-84)$$

$$\begin{aligned} & 2b_{2112}a_1^2a_2 + 3b_{2222}a_2^3 + \sum_{k=1}^N [2b_{2112}a_2B_{01k}^2 + 2b_{2122}a_2B_{01k}B_{02k}\exp i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \\ & + 2b_{2122}a_2B_{01k}B_{02k}\exp i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + 6b_{2222}a_2B_{02k}^2] \\ & - b_{2012}a_2 - ib_{2042}(a'_2 + b_{2051}a_2) + b_{2042}a_2\theta'_2 + b_{211}a_1^2\exp[-i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1)] \\ & + 2(E_{2011}a_1^2 + E_{2022}a_2^2)\exp[-i(\theta_2 - \sigma_1T_1)] \\ & + \sum_{k=1}^N 2(E_{2011}B_{01k}^2 + E_{2022}B_{02k}^2)\exp[-i(\theta_2 - \sigma_1T_1)] \\ & + \sum_{k=1}^N E_{2012}B_{01k}B_{02k}\exp[-i(\theta_2 - \sigma_1T_1 - \varphi_{1k} + \varphi_{2k})] \\ & + \sum_{k=1}^N E_{2012}B_{01k}B_{02k}\exp[-i(\theta_2 - \sigma_1T_1 + \varphi_{1k} - \varphi_{2k})] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-85)$$

设

$$\begin{cases} \gamma_1 = \theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1 \\ \gamma_2 = \theta_2 - \sigma_1T_1 \end{cases} \quad (3-86)$$

将式(3-86)代入式(3-84)、式(3-85)中,分离式(3-84)、式(3-85)的实部和虚部,并整理得

$$a'_1 = -b_{1051}a_1 + \frac{b_{112}}{b_{1041}}a_1a_2\sin\gamma_1 + \frac{E_{101}}{b_{1041}}a_1\sin(\gamma_2 - \gamma_1) = f_{11}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \quad (3-87)$$

$$a'_2 = \frac{1}{b_{2042}} \left[-b_{2051}a_2 - b_{211}a_1^2\sin\gamma_1 - 2(E_{2011}a_1^2 + E_{2022}a_2^2)\sin\gamma_2 \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^N 2(E_{2011}B_{01k}^2 + E_{2022}B_{02k}^2)\sin\gamma_2 - \sum_{k=1}^N E_{2012}B_{01k}B_{02k}\sin(\gamma_2 - \varphi_{1k} + \varphi_{2k}) \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^N E_{2012}B_{01k}B_{02k}\sin(\gamma_2 + \varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \right] \\ = f_{12}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \quad (3-88)$$

$$\gamma'_1 = \frac{b_{2012} - 2b_{2112}a_1^2 - 3b_{2222}a_2^2}{b_{2042}} - \frac{b_{211}a_1^2\cos\gamma_1}{b_{2042}a_2} \\ - \sum_{k=1}^N \frac{2[b_{2112}B_{01k}^2 + 2b_{2122}B_{01k}B_{02k}\cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + 3b_{2222}B_{02k}^2]}{b_{2042}} \\ - \frac{2(E_{2011}a_1^2 + E_{2022}a_2^2)\cos\gamma_2}{b_{2042}a_2} - \frac{\sum_{k=1}^N 2(E_{2011}B_{01k}^2 + E_{2022}B_{02k}^2)\cos\gamma_2}{b_{2042}a_2} \\ - \sum_{k=1}^N \frac{E_{2012}B_{01k}B_{02k}\cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} + \varphi_{2k})}{b_{2042}a_2} \\ - \sum_{k=1}^N \frac{E_{2012}B_{01k}B_{02k}\cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} - \varphi_{2k})}{b_{2042}a_2} \\ + \frac{2(3b_{1111}a_1^2 + 2b_{1122}a_2^2 - b_{1011})}{b_{1041}} \\ + \sum_{k=1}^N \frac{4[4b_{1111}B_{01k}^2 + 2b_{1112}B_{01k}B_{02k}\cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + b_{1122}B_{02k}^2]}{b_{1041}} \\ + \frac{2[b_{112}a_2\cos\gamma_1 - E_{101}\cos(\gamma_2 - \gamma_1)]}{b_{1041}} + \varepsilon\sigma_2 \\ = f_{13}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \quad (3-89)$$

$$\gamma'_2 = \frac{b_{2012} - 2b_{2112}a_1^2 - 3b_{2222}a_2^2}{b_{2042}} - \frac{b_{211}a_1^2\cos\gamma_1}{b_{2042}a_2} \\ - \sum_{k=1}^N \frac{2[b_{2112}B_{01k}^2 + 2b_{2122}B_{01k}B_{02k}\cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + 3b_{2222}B_{02k}^2]}{b_{2042}}$$



$$\begin{aligned}
 & - \frac{2(E_{2011}a_1^2 + E_{2022}a_2^2)\cos\gamma_2}{b_{2042}a_2} - \sum_{k=1}^N \frac{2(E_{2011}B_{01k}^2 + E_{2022}B_{02k}^2)\cos\gamma_2}{b_{2042}a_2} \\
 & - \sum_{k=1}^N \frac{E_{2012}B_{01k}B_{02k}\cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} + \varphi_{2k})}{b_{2042}a_2} \\
 & - \sum_{k=1}^N \frac{E_{2012}B_{01k}B_{02k}\cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} - \varphi_{2k})}{b_{2042}a_2} - \varepsilon\sigma_1 \\
 & = f_{14}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-90}
 \end{aligned}$$

由稳态解条件 $a'_1 = a'_2 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$, 得

$$\begin{cases} f_{11}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{12}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{13}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{14}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \end{cases} \tag{3-91}$$

利用 Newton-Raphson 方法, 可以求得式(3-91)中的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 。

将所求得的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 代入式(3-81), 得到含内共振的主共振的一阶近似解为

$$\begin{cases} \eta_1 = 2a_1\cos(\omega_1 T_0 + \theta_1) + \sum_{k=1}^N B_{01k}\cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{1k}) \\ \eta_2 = 2a_2\cos(\omega_2 T_0 + \theta_2) + \sum_{k=1}^N B_{02k}\cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{2k}) \end{cases} \tag{3-92}$$

从以上分析可以看出, 在一定条件下, 系统在电磁参数激励下可产生主共振现象, 而且系统的主共振频域响应幅值还与电磁参数激励的幅值有关。

3.4.1.2 次谐共振分析

次谐共振包括电磁参数激励下的次谐共振和外力作用下的次谐共振。当组合共振频率因子 $\Omega_0 - \omega_i$ 满足条件 $\Omega_0 - \omega_i \approx \omega_i$, 即 $\Omega_0 \approx 2\omega_i$ 时, 可认为此时系统存在电磁参数激励下的 1/2 次谐共振; 当组合共振频率因子 $\Omega_0 - 2\omega_i$ 满足条件 $\Omega_0 - 2\omega_i \approx \omega_i$, 即 $\Omega_0 \approx 3\omega_i$ 时, 可认为此时系统存在电磁参数激励下的 1/3 次谐共振; 当组合共振频率因子 $\Omega_2 - \omega_i$ 满足条件 $\Omega_2 - \omega_i \approx \omega_i$, 即 $\Omega_2 \approx 2\omega_i$ 时, 可认为此时系统存在外力作用下的 1/2 次谐共振; 当组合共振频率因子 $\Omega_2 - 2\omega_i$ 满足条件 $\Omega_2 - 2\omega_i \approx \omega_i$, 即 $\Omega_0 \approx 3\omega_i$ 时, 可认为此时系统存在外力作用下的 1/3 次谐共振。

这里在不考虑外力的情况下对系统存在内共振情形 ($\omega_2 \approx 2\omega_1$) 且满足次谐共振条件 $\Omega_0 - \omega_2 \approx \omega_2$ 时的电磁参数激励下的 1/2 次谐共振情况进行分析。

引进两个调谐参数 σ_1 和 σ_2 , 使

$$\begin{cases} \Omega_0 - \omega_2 = \omega_2 + \varepsilon\sigma_1 \\ \omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_2 \end{cases} \tag{3-93}$$

将式(3-80)、式(3-93)分别代入式(3-63), 得到消除前两阶长期项的条件:

$$\begin{aligned}
 & 3b_{1111}A_1^2\bar{A}_1 + 2b_{1122}A_1A_2\bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (6b_{1111}A_1B_{1k}\bar{B}_{1k} + 2b_{1112}A_1B_{1k}\bar{B}_{2k} + 2b_{1112}A_1\bar{B}_{1k}B_{2k} \\
 & + 6b_{1122}A_1B_{2k}\bar{B}_{2k}) - b_{1011}A_1 - ib_{1041}(D_1A_1 + b_{1051}A_1) + b_{112}\bar{A}_1A_2\exp(i\sigma_2T_1) \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-94}$$

$$\begin{aligned}
 & 2b_{2112}A_1\bar{A}_1A_2 + 3b_{2222}A_2^2\bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (2b_{2112}A_2B_{1k}\bar{B}_{1k} + 2b_{2122}A_2B_{1k}\bar{B}_{2k} \\
 & + 2b_{2122}A_2\bar{B}_{1k}B_{2k} + 6b_{2222}A_2B_{2k}\bar{B}_{2k}) - b_{2012}A_2 - ib_{2042}(D_1A_2 + b_{2051}A_2) \\
 & + b_{211}A_1^2\exp(-i\sigma_2T_1) - E_{202}\bar{A}_2\exp(i\sigma_1T_1) \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-95}$$

式中: $b_{1011}, b_{1041}, b_{1051}, b_{2012}, b_{2042}, b_{2051}, b_{rmm}, b_{rmnf} (r, m, n, f = 1, 2), E_{202}$ 可通过式(3-63)中的矩阵或向量求得。

将式(3-65)、式(3-66)代入式(3-94)、式(3-95),整理得

$$\begin{aligned}
 & 3b_{1111}a_1^3 + 2b_{1122}a_1a_2^2 + \sum_{k=1}^N \left\{ 6b_{1111}a_1B_{01k}^2 + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k}\exp[i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k})] \right. \\
 & \left. + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k}\exp i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + 2b_{1122}a_1B_{02k}^2 \right\} \\
 & - b_{1011}a_1 - ib_{1041}(a'_1 + b_{1051}a_1) + b_{1041}a_1\theta'_1 \\
 & + b_{112}a_1a_2\exp i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1) \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-96}$$

$$\begin{aligned}
 & 2b_{2112}a_1^2a_2 + 3b_{2222}a_2^3 + \sum_{k=1}^N [2b_{2112}a_2B_{01k}^2 + 2b_{2122}a_2B_{01k}B_{02k}\exp i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \\
 & + 2b_{2122}a_2B_{01k}B_{02k}\exp i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + 6b_{2222}a_2B_{02k}^2] \\
 & - b_{2012}a_2 - ib_{2042}(a'_2 + b_{2051}a_2) + b_{2042}a_2\theta'_2 \\
 & + b_{211}a_1^2\exp[-i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1)] \\
 & - E_{202}a_2\exp[-i(2\theta_2 - \sigma_1T_1)] \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-97}$$

设

$$\begin{cases} \gamma_1 = \theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1 \\ \gamma_2 = \theta_2 - \sigma_1T_1 \end{cases} \tag{3-98}$$

将式(3-98)代入式(3-96)、式(3-97)中,分离式(3-96)、式(3-97)的实部和虚部,并整理得

$$a'_1 = -b_{1051}a_1 + \frac{b_{112}}{b_{1041}}a_1a_2\sin\gamma_1 = f_{21}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-99}$$



$$a'_2 = -b_{2051}a_2 - \frac{b_{211}}{b_{2042}}a_1^2 \sin\gamma_1 + \frac{E_{202}}{b_{2042}}a_2 \sin\gamma_2 = f_{22}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \quad (3-100)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= \frac{b_{2012} - 2b_{2112}a_1^2 - 3b_{2222}a_2^2}{b_{2042}} \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \frac{2[b_{2112}B_{01k}^2 + 2b_{2122}B_{01k}B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + 3b_{2222}B_{02k}^2]}{b_{2042}} \\ &\quad - \frac{b_{211}a_1^2 \cos\gamma_1 - E_{202}a_2 \cos\gamma_2}{b_{2042}a_2} \\ &\quad + \frac{2(3b_{1111}a_1^2 + 2b_{1122}a_2^2 - b_{1011} + b_{112}a_2 \cos\gamma_1)}{b_{1041}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \frac{4[3b_{1111}B_{01k}^2 + 2b_{1122}B_{01k}B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + b_{1122}B_{02k}^2]}{b_{1041}} + \varepsilon\sigma_2 \\ &= f_{23}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \end{aligned} \quad (3-101)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_2 &= \frac{2(b_{2012} - 2b_{2112}a_1^2 - 3b_{2222}a_2^2)}{b_{2042}} \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \frac{4[b_{2112}B_{01k}^2 + 2b_{2122}B_{01k}B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + 3b_{2222}B_{02k}^2]}{b_{2042}} \\ &\quad - \frac{2(b_{211}a_1^2 \cos\gamma_1 - E_{202}a_2 \cos\gamma_2)}{b_{2042}a_2} - \varepsilon\sigma_1 \\ &= f_{24}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \end{aligned} \quad (3-102)$$

由稳态解条件 $a'_1 = a'_2 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$, 得

$$\begin{cases} f_{21}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{22}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{23}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{24}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \end{cases} \quad (3-103)$$

利用 Newton-Raphson 方法, 可以求得式(3-103)中的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 。

将所求得的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 代入式(3-80), 得到含内共振的次谐共振的一阶近似解为

$$\begin{cases} \eta_1 = 2a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \theta_1) + \sum_{k=1}^N B_{01k} \cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{1k}) \\ \eta_2 = 2a_2 \cos(\omega_2 T_0 + \theta_2) + \sum_{k=1}^N B_{02k} \cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{2k}) \end{cases} \quad (3-104)$$

从以上分析可以看出, 在一定条件下, 系统在电磁参数激励下可产生次谐共振现象, 而且系统的次谐共振频域响应幅值还与电磁参数激励的幅值有关。

3.4.1.3 超谐共振分析

超谐共振包括自激惯性力作用下的超谐共振分析和外力作用下的超谐共振分析。当超谐共振频率因子 $(k \pm p)\Omega_1$ 或 $(k \pm p \pm l)\Omega_1$ 满足条件 $(k \pm p)\Omega_1 \approx \omega_i$ 或 $(k \pm p \pm l)\Omega_1 \approx \omega_i$ (k, p, l 为正整数, $i = 1, 2$) 时, 系统存在自激惯性力作用下的超谐共振; 当超谐共振频率因子 $2\Omega_2$ 或 $3\Omega_2$ 满足条件 $2\Omega_2 \approx \omega_i$ 或 $3\Omega_2 \approx \omega_i$ 时, 系统存在自激惯性力作用下的超谐共振。

这里在不考虑外力的条件下对系统存在内共振情形($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足超谐共振条件 $L\Omega_1 \approx \omega_1$ 时的超谐共振情况进行分析。

引进两个调谐参数 σ_1 和 σ_2 , 使

$$\begin{cases} L\Omega_1 = \omega_1 + \varepsilon\sigma_1 \\ \omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_2 \end{cases} \quad (3-105)$$

将式(3-80)、式(3-105)分别代入式(3-63), 得到消除前二阶长期项的条件为

$$\begin{aligned} & 3b_{1111}A_1^2\bar{A}_1 + 2b_{1122}A_1A_2\bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (6b_{1111}A_1B_{1k}\bar{B}_{1k} + 2b_{1112}A_1B_{1k}\bar{B}_{2k} \\ & + 2b_{1112}A_1\bar{B}_{1k}B_{2k} + 6b_{1122}A_1B_{2k}\bar{B}_{2k}) - b_{1011}A_1 - ib_{1041}(D_1A_1 + b_{1051}A_1) \\ & + b_{112}\bar{A}_1A_2\exp(i\sigma_2T_1) + \left\{ \sum_{k=1}^{L-1} [b_{111}B_{1k}B_{1(L-k)} + b_{112}B_{1k}B_{2(L-k)} + b_{112}B_{2k}B_{1(L-k)} \right. \\ & + b_{122}B_{2k}B_{2(L-k)}] + \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} [b_{1111}B_{1k}B_{1p}B_{1(L-k-p)} + b_{1112}B_{1k}B_{1p}B_{2(L-k-p)} \\ & + b_{1122}B_{1k}B_{2p}B_{2(L-k-p)} + b_{1222}B_{2k}B_{2p}B_{2(L-k-p)}] \left. \right\} \exp(i\sigma_1T_1) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-106)$$

$$\begin{aligned} & 2b_{2112}A_1\bar{A}_1A_2 + 3b_{2222}A_2^2\bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (2b_{2112}A_2B_{1k}\bar{B}_{1k} + 2b_{2122}A_2B_{1k}\bar{B}_{2k} \\ & + 2b_{2122}A_2\bar{B}_{1k}B_{2k} + 6b_{2222}A_2B_{2k}\bar{B}_{2k}) - b_{2012}A_2 - ib_{2042}(D_1A_2 + b_{2051}A_2) \\ & + b_{211}A_1^2\exp(-i\sigma_2T_1) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-107)$$

式中: $b_{1011}, b_{1041}, b_{1051}, b_{2012}, b_{2042}, b_{2051}, b_{rmm}, b_{rmnf}$ ($r, m, n, f = 1, 2$) 可通过式(3-63)中的矩阵或向量求得。

将式(3-65)、式(3-66)代入式(3-106)、式(3-107), 整理得

$$\begin{aligned} & 3b_{1111}a_1^3 + 2b_{1122}a_1a_2^2 + \sum_{k=1}^N [6b_{1111}a_1B_{01k}^2 + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k}\exp i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \\ & + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k}\exp i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + 2b_{1122}a_1B_{02k}^2] \\ & - b_{1011}a_1 - ib_{1041}(a'_1 + b_{1051}a_1) + b_{1041}a_1\theta'_1 + b_{112}a_1a_2\exp i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1) \\ & + \sum_{k=1}^{L-1} b_{111}B_{01k}B_{01(L-k)}\exp[-i(\theta_1 - \sigma_1T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{1(L-k)})] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{L-1} b_{112} B_{01k} B_{02(L-k)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_1 T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{2(L-k)})] \\
 & + \sum_{k=1}^{L-1} b_{112} B_{02k} B_{01(L-k)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_1 T_1 - \varphi_{2k} - \varphi_{1(L-k)})] \\
 & + \sum_{k=1}^{L-1} b_{122} B_{02k} B_{02(L-k)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_1 T_1 - \varphi_{2k} - \varphi_{2(L-k)})] \\
 & + \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} b_{1111} B_{01k} B_{01p} B_{01(L-k-p)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_1 T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{1(L-k-p)})] \\
 & + \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} b_{1112} B_{01k} B_{01p} B_{02(L-k-p)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_1 T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{2(L-k-p)})] \\
 & + \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} b_{1122} B_{01k} B_{02p} B_{02(L-k-p)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_1 T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(L-k-p)})] \\
 & + \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} b_{1222} B_{02k} B_{02p} B_{02(L-k-p)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_1 T_1 - \varphi_{2k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(L-k-p)})] \\
 = & 0 \tag{3-108}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2b_{2112} a_1^2 a_2 + 3b_{2222} a_2^3 + \sum_{k=1}^N \left\{ 2b_{2112} a_2 B_{01k}^2 + 2b_{2122} a_2 B_{01k} B_{02k} \exp i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \right. \\
 & \quad \left. + 2b_{2122} a_2 B_{01k} B_{02k} \exp i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + 6b_{2222} a_2 B_{02k}^2 \right\} \\
 & - b_{2012} a_2 - ib_{2042} (a'_2 + b_{2051} a_2) + b_{2042} a_2 \theta'_2 \\
 & + b_{211} a_1^2 \exp[-i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2 T_1)] \\
 = & 0 \tag{3-109}
 \end{aligned}$$

设

$$\begin{cases} \gamma_1 = \theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2 T_1 \\ \gamma_2 = \theta_2 - \sigma_1 T_1 \end{cases} \tag{3-110}$$

将式(3-110)代入式(3-108)、式(3-109)中,分离式(3-108)、式(3-109)的实部和虚部,并整理得

$$\begin{aligned}
 a'_1 = & \frac{1}{b_{1041}} \left[-b_{1041} b_{1051} a_1 + b_{112} a_1 a_2 \sin \gamma_1 \right. \\
 & - \sum_{k=1}^{L-1} b_{111} B_{01k} B_{01(L-k)} \sin(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{1(L-k)}) \\
 & - \sum_{k=1}^{L-1} b_{112} B_{01k} B_{02(L-k)} \sin(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{2(L-k)}) \\
 & \left. - \sum_{k=1}^{L-1} b_{112} B_{02k} B_{01(L-k)} \sin(\gamma_2 - \varphi_{2k} - \varphi_{1(L-k)}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k=1}^{L-1} b_{122} B_{02k} B_{02(L-k)} \sin(\gamma_2 - \varphi_{2k} - \varphi_{2(L-k)}) \\
 & - \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} b_{1111} B_{01k} B_{01p} B_{01(L-k-p)} \sin(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{1(L-k-p)}) \\
 & - \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} b_{1112} B_{01k} B_{01p} B_{02(L-k-p)} \sin(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{2(L-k-p)}) \\
 & - \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} b_{1122} B_{01k} B_{02p} B_{02(L-k-p)} \sin(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(L-k-p)}) \\
 & - \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} b_{1222} B_{02k} B_{02p} B_{02(L-k-p)} \sin(\gamma_2 - \varphi_{2k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(L-k-p)}) \Big] \\
 = & f_{31}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-111}
 \end{aligned}$$

$$a'_2 = -b_{2051} a_2 - \frac{b_{211}}{b_{2042}} a_1^2 \sin \gamma_1 = f_{32}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-112}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma'_1 = & \frac{b_{2012} - 2b_{2112} a_1^2 - 3b_{2222} a_2^2}{b_{2042}} - \frac{b_{211} a_1^2 \cos \gamma_1}{b_{2042} a_2} \\
 & - \sum_{k=1}^N \frac{2[b_{2112} B_{01k}^2 + 2b_{2122} B_{01k} B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + 3b_{2222} B_{02k}^2]}{b_{2042}} \\
 & + \frac{2(3b_{1111} a_1^2 + 2b_{1122} a_2^2 - b_{1011} + b_{112} a_2 \cos \gamma_1)}{b_{1041}} \\
 & + \sum_{k=1}^N \frac{4[3b_{1111} B_{01k}^2 + 2b_{1112} B_{01k} B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + b_{1122} B_{02k}^2]}{b_{1041}} \\
 & + \sum_{k=1}^{L-1} \frac{2[b_{111} B_{01k} B_{01(L-k)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{1(L-k)})]}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^{L-1} \frac{2b_{112} B_{01k} B_{02(L-k)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{2(L-k)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^{L-1} \frac{2b_{112} B_{02k} B_{01(L-k)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{2k} - \varphi_{1(L-k)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^{L-1} \frac{2b_{122} B_{02k} B_{02(L-k)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{2k} - \varphi_{2(L-k)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} \frac{2b_{1111} B_{01k} B_{01p} B_{01(L-k-p)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{1(L-k-p)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} \frac{2b_{1112} B_{01k} B_{01p} B_{02(L-k-p)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{2(L-k-p)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} \frac{2b_{1122} B_{01k} B_{02p} B_{02(L-k-p)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(L-k-p)})}{b_{1041} a_1}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} \frac{2b_{1222}B_{02k}B_{02p}B_{02(L-k-p)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{2k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(L-k-p)})}{b_{1041}a_1} + \varepsilon\sigma_2 \\
 & = f_{33}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-113}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma'_2 = & \frac{b_{1011} - 3b_{1111}a_1^2 - 2b_{1122}a_2^2 - b_{112}a_2 \cos\gamma_1}{b_{1041}} \\
 & - \sum_{k=1}^N \frac{2[3b_{1111}B_{01k}^2 + 2b_{1112}B_{01k}B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + b_{1122}B_{02k}^2]}{b_{1041}} \\
 & - \sum_{k=1}^{L-1} \frac{[b_{1111}B_{01k}B_{01(L-k)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{1(L-k)})]}{b_{1041}a_1} \\
 & - \sum_{k=1}^{L-1} \frac{b_{112}B_{01k}B_{02(L-k)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{2(L-k)})}{b_{1041}a_1} \\
 & - \sum_{k=1}^{L-1} \frac{b_{112}B_{02k}B_{01(L-k)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{2k} - \varphi_{1(L-k)})}{b_{1041}a_1} \\
 & - \sum_{k=1}^{L-1} \frac{b_{122}B_{02k}B_{02(L-k)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{2k} - \varphi_{2(L-k)})}{b_{1041}a_1} \\
 & - \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} \frac{b_{1111}B_{01k}B_{01p}B_{01(L-k-p)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{1(L-k-p)})}{b_{1041}a_1} \\
 & - \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} \frac{b_{1112}B_{01k}B_{01p}B_{02(L-k-p)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{2(L-k-p)})}{b_{1041}a_1} \\
 & - \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} \frac{b_{1122}B_{01k}B_{02p}B_{02(L-k-p)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{1k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(L-k-p)})}{b_{1041}a_1} \\
 & - \sum_{k=1}^{L-2} \sum_{p=1}^{L-k-1} \frac{b_{1222}B_{02k}B_{02p}B_{02(L-k-p)} \cos(\gamma_2 - \varphi_{2k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(L-k-p)})}{b_{1041}a_1} - \varepsilon\sigma_1 \\
 & = f_{34}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-114}
 \end{aligned}$$

由稳态解条件 $a'_1 = a'_2 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$, 得

$$\begin{cases} f_{31}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{32}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{33}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{34}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \end{cases} \tag{3-115}$$

利用 Newton-Raphson 方法, 可以求得式(3-115)中的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 。

将所求得的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 代入式(3-80), 得到含内共振的超谐共振一阶近似解为

$$\begin{cases} \eta_1 = 2a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \theta_1) + \sum_{k=1}^N B_{01k} \cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{1k}) \\ \eta_2 = 2a_2 \cos(\omega_2 T_0 + \theta_2) + \sum_{k=1}^N B_{02k} \cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{2k}) \end{cases} \tag{3-116}$$

3.4.1.4 组合共振分析

组合共振包括:①电磁参数激励、自激惯性力和外力共同作用下的组合共振;②电磁参数激励和自激惯性力共同作用下的组合共振;③电磁参数激励和外力共同作用下的组合共振;④自激惯性力和外力共同作用下的组合共振;⑤电磁参数激励下的组合共振;⑥自激惯性力作用下的组合共振;⑦外力作用下的组合共振。

当组合共振频率因子 $\Omega_0 \pm \Omega_2 \pm k\Omega_1 \approx \omega_j$ 时,系统存在电磁参数激励、自激惯性力和外力共同作用下的组合共振;当组合共振频率因子 $\Omega_0 \pm k\Omega_1 \approx \omega_j$ 或 $\Omega_0 \pm k\Omega_1 \pm \omega_i \approx \omega_j$ 或 $\Omega_0 \pm (k \pm p)\Omega_1 \approx \omega_j$ 时,系统存在电磁参数激励和自激惯性力共同作用下的组合共振;当组合共振频率因子 $\Omega_0 \pm \Omega_2 \approx \omega_j$ 或 $\Omega_0 \pm \Omega_2 \pm \omega_i \approx \omega_j$ 或 $\Omega_0 \pm 2\Omega_2 \approx \omega_j$ 时,系统存在电磁参数激励和外力共同作用下的组合共振;当组合共振频率因子 $\Omega_2 \pm k\Omega_1 \approx \omega_j$ 或 $\Omega_2 \pm 2k\Omega_1 \approx \omega_j$ 或 $2\Omega_2 \pm k\Omega_1 \approx \omega_j$ 或 $\Omega_2 \pm k\Omega_1 \pm \omega_i \approx \omega_j$ 时,系统存在自激惯性力和外力共同作用下的组合共振;当组合共振频率因子 $\Omega_0 \pm \omega_i \approx \omega_j$ 或 $\Omega_0 \pm 2\omega_i \approx \omega_j$ 或 $\Omega_0 \pm \omega_i \pm \omega_j \approx \omega_j$ 时,系统存在电磁参数激励下的组合共振;当组合共振频率因子 $k\Omega_1 \pm \omega_i \approx \omega_j$ 或 $2k\Omega_1 \pm \omega_i \approx \omega_j$ 或 $k\Omega_1 \pm \omega_i \pm \omega_j \approx \omega_j$ 时,系统存在自激惯性力作用下的组合共振;当组合共振频率因子 $\Omega_2 \pm \omega_i \approx \omega_j$ 或 $2\Omega_2 \pm \omega_i \approx \omega_j$ 或 $\Omega_2 \pm \omega_i \pm \omega_j \approx \omega_j$ 时,系统存在自激惯性力作用下的组合共振($i, j = 1, 2$)。

这里在不考虑外力的条件下对系统存在内共振情形($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足组合共振条件 $\Omega_0 - \omega_1 \approx \omega_2$ 时的组合共振情况进行分析。

引进两个调谐参数 σ_1 和 σ_2 , 使

$$\begin{cases} \Omega_0 - \omega_1 = \omega_2 + \varepsilon\sigma_1 \\ \omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_2 \end{cases} \quad (3-117)$$

将式(3-80)、式(3-119)分别代入式(3-63),得到消除前二阶长期项的条件为

$$\begin{aligned} & 3b_{1111}A_1^2\bar{A}_1 + 2b_{1122}A_1A_2\bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (6b_{1111}A_1B_{1k}\bar{B}_{1k} + 2b_{1112}A_1B_{1k}\bar{B}_{2k} \\ & + 2b_{1112}A_1\bar{B}_{1k}B_{2k} + 6b_{1122}A_1B_{2k}\bar{B}_{2k}) - b_{1011}A_1 - ib_{1041}(D_1A_1 + b_{1051}A_1) \\ & + b_{112}\bar{A}_1A_2\exp(i\sigma_2T_1) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-118)$$

$$\begin{aligned} & 2b_{2112}A_1\bar{A}_1A_2 + 3b_{2222}A_2^2\bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (2b_{2112}A_2B_{1k}\bar{B}_{1k} + 2b_{2122}A_2B_{1k}\bar{B}_{2k} \\ & + 2b_{2122}A_2\bar{B}_{1k}B_{2k} + 6b_{2222}A_2B_{2k}\bar{B}_{2k}) - b_{2012}A_2 - ib_{2042}(D_1A_2 + b_{2051}A_2) \\ & + b_{211}A_1^2\exp(-i\sigma_2T_1) - E_{201}\bar{A}_1\exp(i\sigma_1T_1) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-119)$$

式中: $b_{1011}, b_{1041}, b_{1051}, b_{2012}, b_{2042}, b_{2051}, b_{rnm}, b_{rmnf}(r, m, n, f = 1, 2), E_{201}$ 可通过式(3-63)中的矩阵或向量求得。

将式(3-65)、式(3-66)代入式(3-118)、式(3-119),整理得



$$\begin{aligned}
 & 3b_{1111}a_1^3 + 2b_{1122}a_1a_2^2 + \sum_{k=1}^N [6b_{1111}a_1B_{01k}^2 + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k} \exp i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \\
 & + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k} \exp i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + 2b_{1122}a_1B_{02k}^2] \\
 & - b_{1011}a_1 - ib_{1041}(a_1' + b_{1051}a_1) \\
 & + b_{1041}a_1\theta_1' + b_{112}a_1a_2 \exp[i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1)] \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-120}$$

$$\begin{aligned}
 & 2b_{2112}a_1^2a_2 + 3b_{2222}a_2^3 + \sum_{k=1}^N [2b_{2112}a_2B_{01k}^2 + 2b_{2122}a_2B_{01k}B_{02k} \exp i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \\
 & + 2b_{2122}a_2B_{01k}B_{02k} \exp i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + 6b_{2222}a_2B_{02k}^2] \\
 & - b_{2012}a_2 - ib_{2042}(a_2' + b_{2051}a_2) + b_{2042}a_2\theta_2' + b_{211}a_1^2 \exp[-i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1)] \\
 & - E_{201}a_1 \exp[-i(\theta_2 + \theta_1 - \sigma_1T_1)] \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-121}$$

设

$$\begin{cases} \gamma_1 = \theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_2T_1 \\ \gamma_2 = \theta_2 - \sigma_1T_1 \end{cases} \tag{3-122}$$

将式(3-122)代入式(3-120)、式(3-121)中,分离式(3-120)、式(3-121)的实部和虚部,并整理得

$$a_1' = -b_{1051}a_1 + \frac{b_{112}}{b_{1041}}a_1a_2 \sin\gamma_1 = f_{41}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-123}$$

$$a_2' = -b_{2051}a_2 - \frac{b_{211}}{b_{2042}}a_1^2 \sin\gamma_1 + \frac{E_{201}}{b_{2042}}a_1 \sin\gamma_2 = f_{42}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-124}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1' &= \frac{b_{2012} - 2b_{2112}a_1^2 - 3b_{2222}a_2^2}{b_{2042}} \\
 & - \sum_{k=1}^N \frac{2[b_{2112}B_{01k}^2 + 2b_{2122}B_{01k}B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + 3b_{2222}B_{02k}^2]}{b_{2042}} \\
 & + \frac{E_{201}a_1 \cos\gamma_2 - b_{211}a_1^2 \cos\gamma_1}{b_{2042}a_2} + \frac{2(3b_{1111}a_1^2 + 2b_{1122}a_2^2 - b_{1011}a_1 + b_{112}a_2 \cos\gamma_1)}{b_{1041}} \\
 & + \sum_{k=1}^N \frac{4[3b_{1111}B_{01k}^2 + 2b_{1112}B_{01k}B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + b_{1122}B_{02k}^2]}{b_{1041}} + \varepsilon\sigma_2 \\
 & = f_{43}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2)
 \end{aligned} \tag{3-125}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_2' &= \frac{b_{2012} - 2b_{2112}a_1^2 - 3b_{2222}a_2^2}{b_{2042}} \\
 & - \sum_{k=1}^N \frac{2[b_{2112}B_{01k}^2 + 2b_{2122}B_{01k}B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + 3b_{2222}B_{02k}^2]}{b_{2042}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{E_{201} a_1 \cos \gamma_2 - b_{211} a_1^2 \cos \gamma_1}{b_{2042} a_2} - \frac{3b_{1111} a_1^2 + 2b_{1122} a_2^2 - b_{1011} a_1 + b_{112} a_2 \cos \gamma_1}{b_{1041}} \\
 & - \sum_{k=1}^N \frac{2[3b_{1111} B_{01k}^2 + 2b_{1112} B_{01k} B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + b_{1122} B_{02k}^2]}{b_{1041}} - \varepsilon \sigma_1 \\
 & = f_{44}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-126}
 \end{aligned}$$

由稳态解条件 $a'_1 = a'_2 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$, 得

$$\begin{cases} f_{41}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{42}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{43}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{44}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \end{cases} \tag{3-127}$$

利用 Newton-Raphson 方法, 可以求得式(3-128)中的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 。

将所求得的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 代入式(3-80), 得到含内共振的组合共振一阶近似解为

$$\begin{cases} \eta_1 = 2a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \theta_1) + \sum_{k=1}^N B_{01k} \cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{1k}) \\ \eta_2 = 2a_2 \cos(\omega_2 T_0 + \theta_2) + \sum_{k=1}^N B_{02k} \cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{2k}) \end{cases} \tag{3-128}$$

3.4.1.5 多重共振分析

多重共振包括: ①电磁参数激励、自激惯性力和外力共同作用下的多重共振, 此时频率因子中既包含电磁参数激励频率, 又包含自激惯性力的频率和外力的频率; ②电磁激励和自激惯性力共同作用下的多重共振, 此时频率因子中既包含电磁参数激励频率, 又包含自激惯性力的频率; ③电磁激励和外力共同作用下的多重共振, 此时频率因子中既包含电磁参数激励频率, 又包含外力的频率; ④自激惯性力和外力共同作用下的多重共振, 此时频率因子中既包含自激惯性力的频率, 又包含外力的频率。

这里在不考虑外力的条件下对系统存在内共振($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足组合共振条件 $\Omega_0 - \Omega_1 - \omega_1 \approx \omega_1$ 和超谐共振条件 $8\Omega_1 \approx \omega_1$ 时的多重共振情况进行分析。

引进三个调谐参数 σ_1, σ_2 和 σ_3 , 使

$$\begin{cases} \Omega_0 - \Omega_1 - \omega_1 = \omega_1 + \varepsilon \sigma_1 \\ 8\Omega_1 = \omega_1 + \varepsilon \sigma_2 \\ \omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon \sigma_3 \end{cases} \tag{3-129}$$

将式(3-80)、式(3-129)分别代入式(3-63), 得到消除前二阶长期项的条件为

$$\begin{aligned}
 & 3b_{1111} \bar{A}_1^2 \bar{A}_1 + 2b_{1122} A_1 A_2 \bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (6b_{1111} A_1 B_{1k} \bar{B}_{1k} + 2b_{1112} A_1 B_{1k} \bar{B}_{2k} \\
 & + 2b_{1112} A_1 \bar{B}_{1k} B_{2k} + 6b_{1122} A_1 B_{2k} \bar{B}_{2k}) - b_{1011} A_1 - i b_{1041} (D_1 A_1 + b_{1051} A_1) \\
 & + b_{112} \bar{A}_1 A_2 \exp(i\sigma_3 T_1) + (2E_{1011} \bar{A}_1 \bar{B}_{11} + E_{1012} \bar{A}_1 \bar{B}_{21}) \exp(i\sigma_1 T_1)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \left[\sum_{k=1}^7 (b_{111}B_{1k}B_{1(8-k)} + b_{112}B_{1k}B_{2(8-k)} + b_{112}B_{2k}B_{1(8-k)} + b_{122}B_{2k}B_{2(8-k)}) \right. \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} (b_{111p}B_{1k}B_{1p}B_{1(8-k-p)} + b_{1112}B_{1k}B_{1p}B_{2(8-k-p)} \\
 & \left. + b_{1122}B_{1k}B_{2p}B_{2(8-k-p)} + b_{1222}B_{2k}B_{2p}B_{2(8-k-p)}) \right] \exp(i\sigma_2 T_1) \\
 & = 0 \tag{3-130}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2b_{2112}A_1\bar{A}_1A_2 + 3b_{2222}A_2^2\bar{A}_2 + \sum_{k=1}^N (2b_{2112}A_2B_{1k}\bar{B}_{1k} + 2b_{2122}A_2B_{1k}\bar{B}_{2k} \\
 & + 2b_{2122}A_2\bar{B}_{1k}B_{2k} + 6b_{2222}A_2B_{2k}\bar{B}_{2k}) - b_{2012}A_2 - ib_{2042}(D_1A_2 + b_{2051}A_2) \\
 & + b_{211}A_1^2 \exp(-i\sigma_3 T_1) \\
 & = 0 \tag{3-131}
 \end{aligned}$$

式中: $b_{1011}, b_{1041}, b_{1051}, b_{2012}, b_{2042}, b_{2051}, b_{rmm}, b_{rmmf} (r, m, n, f = 1, 2), E_{1011}, E_{1012}$ 可通过式(3-63)中的矩阵或向量求得。

将式(3-65)、式(3-66)代入式(3-130)、式(3-131),整理得

$$\begin{aligned}
 & 3b_{1111}a_1^3 + 2b_{1122}a_1a_2^2 + \sum_{k=1}^N \{ 6b_{1111}a_1B_{01k}^2 + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k} \exp[i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k})] \\
 & + 2b_{1112}a_1B_{01k}B_{02k} \exp[i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k})] + 2b_{1122}a_1B_{02k}^2 \} \\
 & - b_{1011}a_1 - ib_{1041}(a_1' + b_{1051}a_1) + b_{1041}a_1\theta_1' \\
 & + b_{112}a_1a_2 \exp i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_3 T_1) \\
 & + 2E_{1011}a_1B_{011} \exp[-i(2\theta_1 - \sigma_1 T_1 + \varphi_{11})] \\
 & + E_{1012}a_1B_{021} \exp[-i(2\theta_1 - \sigma_1 T_1 + \varphi_{21})] \\
 & + \sum_{k=1}^7 b_{111}B_{01k}B_{01(8-k)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_2 T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{1(8-k)})] \\
 & + \sum_{k=1}^7 b_{112}B_{01k}B_{02(8-k)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_2 T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{2(8-k)})] \\
 & + \sum_{k=1}^7 b_{112}B_{02k}B_{01(8-k)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_2 T_1 - \varphi_{2k} - \varphi_{1(8-k)})] \\
 & + \sum_{k=1}^7 b_{122}B_{02k}B_{02(8-k)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_2 T_1 - \varphi_{2k} - \varphi_{2(8-k)})] \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} b_{1111}B_{01k}B_{01p}B_{01(8-k-p)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_2 T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{1(8-k-p)})] \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} b_{1112}B_{01k}B_{01p}B_{02(8-k-p)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_2 T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{2(8-k-p)})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} b_{1122} B_{01k} B_{02p} B_{02(8-k-p)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_2 T_1 - \varphi_{1k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(8-k-p)})] \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} b_{1222} B_{02k} B_{02p} B_{02(8-k-p)} \exp[-i(\theta_1 - \sigma_2 T_1 - \varphi_{2k} - \varphi_{2p} - \varphi_{2(8-k-p)})] \\
 & = 0 \tag{3-132}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2b_{2112} a_1^2 a_2 + 3b_{2222} a_2^3 + \sum_{k=1}^N \left[2b_{2112} a_2 B_{01k}^2 + 2b_{2122} a_2 B_{01k} B_{02k} \exp i(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) \right. \\
 & \quad \left. + 2b_{2122} a_2 B_{01k} B_{02k} \exp i(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + 6b_{2222} a_2 B_{02k}^2 \right] \\
 & - b_{2012} a_2 - i b_{2042} (a_2' + b_{2051} a_2) + b_{2042} a_2 \theta_2' \\
 & + b_{211} a_1^2 \exp[-i(\theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_3 T_1)] \\
 & = 0 \tag{3-133}
 \end{aligned}$$

设

$$\begin{cases} \gamma_1 = \theta_2 - 2\theta_1 + \sigma_3 T_1 \\ \gamma_2 = -(\theta_1 - \sigma_2 T_1) \end{cases} \tag{3-134}$$

将式(3-136)代入式(3-132)、式(3-133)中,分离式(3-132)、式(3-133)的实部和虚部,并整理得

$$\begin{aligned}
 a_1' = \frac{1}{b_{1041}} \{ & -b_{1041} b_{1051} a_1 + b_{112} a_1 a_2 \sin \gamma_1 \\
 & + 2E_{1011} a_1 B_{011} \sin[2\gamma_2 + (\sigma_1 - 2\sigma_2) T_1 - \varphi_{11}] \\
 & + E_{1012} a_1 B_{021} \sin[2\gamma_2 + (\sigma_1 - 2\sigma_2) T_1 - \varphi_{21}] \\
 & + \sum_{k=1}^7 b_{111} B_{01k} B_{01(8-k)} \sin(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{1(8-k)}) \\
 & + \sum_{k=1}^7 b_{112} B_{01k} B_{02(8-k)} \sin(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{2(8-k)}) \\
 & + \sum_{k=1}^7 b_{112} B_{02k} B_{01(8-k)} \sin(\gamma_2 + \varphi_{2k} + \varphi_{1(8-k)}) \\
 & + \sum_{k=1}^7 b_{122} B_{02k} B_{02(8-k)} \sin(\gamma_2 + \varphi_{2k} + \varphi_{2(8-k)}) \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} b_{1111} B_{01k} B_{01p} B_{01(8-k-p)} \sin(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{1p} + \varphi_{1(8-k-p)}) \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} b_{1112} B_{01k} B_{01p} B_{02(8-k-p)} \sin(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{1p} + \varphi_{2(8-k-p)}) \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} b_{1122} B_{01k} B_{02p} B_{02(8-k-p)} \sin(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{2p} + \varphi_{2(8-k-p)}) \}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \left. \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} b_{1222} B_{02k} B_{02p} B_{02(8-k-p)} \sin(\gamma_2 + \varphi_{2k} + \varphi_{2p} + \varphi_{2(8-k-p)}) \right\} \\
 = & f_1(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-135}
 \end{aligned}$$

$$a'_2 = -b_{2051} a_2 - \frac{b_{211}}{b_{2042}} a_1^2 \sin \gamma_1 = f_2(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-136}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma'_1 = & \frac{b_{2012} - 2b_{2112} a_1^2 - 3b_{2222} a_2^2}{b_{2042}} \\
 & - \sum_{k=1}^N \frac{[2b_{2112} B_{01k}^2 + 4b_{2122} B_{01k} B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + 6b_{2222} B_{02k}^2]}{b_{2042}} \\
 & - \frac{b_{211} a_1^2 \cos \gamma_1}{b_{2042} a_2} + \frac{2(3b_{1111} a_1^2 + 2b_{1122} a_2^2 - b_{1011})}{b_{1041}} \\
 & + \sum_{k=1}^N \frac{4[3b_{1111} B_{01k}^2 + 2b_{1112} B_{01k} B_{02k} \cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + b_{1122} B_{02k}^2]}{b_{1041}} \\
 & + \frac{2 \left\{ b_{112} a_2 \cos \gamma_1 + 2E_{1011} B_{011} \cos[2\gamma_2 + (\sigma_1 - 2\sigma_2) T_1 - \varphi_{11}] \right\}}{b_{1041}} \\
 & + \frac{2E_{1012} B_{021} \cos[2\gamma_2 + (\sigma_1 - 2\sigma_2) T_1 - \varphi_{21}]}{b_{1041}} \\
 & + \sum_{k=1}^7 \frac{2b_{111} B_{01k} B_{01(8-k)} \cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{1(8-k)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^7 \frac{2b_{112} B_{01k} B_{02(8-k)} \cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{2(8-k)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^7 \frac{2b_{112} B_{02k} B_{01(8-k)} \cos(\gamma_2 + \varphi_{2k} + \varphi_{1(8-k)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^7 \frac{2b_{122} B_{02k} B_{02(8-k)} \cos(\gamma_2 + \varphi_{2k} + \varphi_{2(8-k)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} \frac{2b_{1111} B_{01k} B_{01p} B_{01(8-k-p)} \cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{1p} + \varphi_{1(8-k-p)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} \frac{2b_{1112} B_{01k} B_{01p} B_{02(8-k-p)} \cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{1p} + \varphi_{2(8-k-p)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} \frac{2b_{1122} B_{01k} B_{02p} B_{02(8-k-p)} \cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{2p} + \varphi_{2(8-k-p)})}{b_{1041} a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} \frac{2b_{1222} B_{02k} B_{02p} B_{02(8-k-p)} \cos(\gamma_2 + \varphi_{2k} + \varphi_{2p} + \varphi_{2(8-k-p)})}{b_{1041} a_1} + \varepsilon \sigma_3 \\
 = & f_3(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-137}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_2' = & \frac{3b_{1111}a_1^2 + 2b_{1122}a_2^2 - b_{1011}}{b_{1041}} \\
 & + \sum_{k=1}^N \frac{\{6b_{1111}B_{01k}^2 + 4b_{1112}B_{01k}B_{02k}\cos(\varphi_{1k} - \varphi_{2k}) + 2b_{1122}B_{02k}^2\}}{b_{1041}} \\
 & + \frac{\{b_{112}a_2\cos\gamma_1 + 2E_{1011}B_{011}\cos[2\gamma_2 + (\sigma_1 - 2\sigma_2)T_1 - \varphi_{11}]\}}{b_{1041}} \\
 & + \frac{E_{1012}B_{021}\cos[2\gamma_2 + (\sigma_1 - 2\sigma_2)T_1 - \varphi_{21}]}{b_{1041}} \\
 & + \sum_{k=1}^7 \frac{b_{111}B_{01k}B_{01(8-k)}\cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{1(8-k)})}{b_{1041}a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^7 \frac{b_{112}B_{01k}B_{02(8-k)}\cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{2(8-k)})}{b_{1041}a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^7 \frac{b_{112}B_{02k}B_{01(8-k)}\cos(\gamma_2 + \varphi_{2k} + \varphi_{1(8-k)})}{b_{1041}a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^7 \frac{b_{122}B_{02k}B_{02(8-k)}\cos(\gamma_2 + \varphi_{2k} + \varphi_{2(8-k)})}{b_{1041}a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} \frac{b_{1111}B_{01k}B_{01p}B_{01(8-k-p)}\cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{1p} + \varphi_{1(8-k-p)})}{b_{1041}a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} \frac{b_{1112}B_{01k}B_{01p}B_{02(8-k-p)}\cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{1p} + \varphi_{2(8-k-p)})}{b_{1041}a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} \frac{b_{1122}B_{01k}B_{02p}B_{02(8-k-p)}\cos(\gamma_2 + \varphi_{1k} + \varphi_{2p} + \varphi_{2(8-k-p)})}{b_{1041}a_1} \\
 & + \sum_{k=1}^6 \sum_{p=1}^{7-k} \frac{b_{1222}B_{02k}B_{02p}B_{02(8-k-p)}\cos(\gamma_2 + \varphi_{2k} + \varphi_{2p} + \varphi_{2(8-k-p)})}{b_{1041}a_1} + \varepsilon\sigma_2 \\
 = & f_4(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) \tag{3-138}
 \end{aligned}$$

由稳态解条件 $a_1' = a_2' = \gamma_1' = \gamma_2' = 0$ 可得

$$\begin{cases} f_{51}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{52}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{53}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ f_{54}(a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2) = 0 \end{cases} \tag{3-139}$$

利用 Newton-Raphson 方法, 可以求得式(3-139)中的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 。

将所求得的 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 代入式(3-80), 得到含内共振的多重共振一阶近似解为



$$\begin{cases} \eta_1 = 2a_1 \cos(\omega_1 T_0 + \theta_1) + \sum_{k=1}^N B_{01k} \cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{1k}) \\ \eta_2 = 2a_2 \cos(\omega_2 T_0 + \theta_2) + \sum_{k=1}^N B_{02k} \cos(k\Omega_1 T_0 + \varphi_{2k}) \end{cases} \quad (3-140)$$

3.4.2 混合驱动五杆机构系统共振分析

混合驱动五杆机构是由常速电动机和可控电动机共同驱动的,系统动力学模型既含有机构系统的结构参数和材料参数,又含有两驱动电动机的电磁参数。并且,由机构系统参激振动的耦合研究可知,机构系统的共振特性不仅与系统外激励有关,还与两驱动电动机转子转动频率(Ω_1 和 Ω_2)和电动机定子绕组旋转磁场的旋转频率($2\omega_{01}$ 和 $2\omega_{02}$)有关。在不同频率因子下,系统就会出现不同的共振现象,在此对混合驱动五杆机构系统的各种非线性共振现象分别进行分析。

3.4.2.1 主共振分析

这里对不含内共振的主共振进行分析,且不考虑电动机的静偏心($e_{01} = e_{02} = 0$)和转动偏心($\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 0$),忽略外界对系统的干扰作用,即 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ 。则由前面公式可知 $\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_5 = \mathbf{F}_8 = \mathbf{0}$,系统自激惯性力项 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 和 \mathbf{F}_3 的频率成分分别为 $\nu_1 (= \Omega_1)$ 、 $\nu_2 (= \Omega_1)$ 和 ν_3 ,电磁激励项 \mathbf{F}_6 和 \mathbf{F}_7 的频率成分分别为 $\nu_6 (= 2\omega_{01})$ 和 $\nu_7 (= 2\omega_{02})$ 。

1. 伺服电动机电磁激励作用下的主共振分析

伺服电动机在电磁激励作用下发生主共振时 $\nu_6 \approx \omega_r$,引入解谐参数 σ ,使

$$\begin{aligned} \nu_6 &= \omega_r + \varepsilon\sigma \\ \sigma &= 0(1) \end{aligned} \quad (3-141)$$

将式(3-141)、式(3-76)代入式(3-75),则其解不出现长期项的条件为

$$\begin{aligned} & 2i\omega_r D_1 A_r + 2i\zeta_r \omega_r^2 A_r + \alpha_r A_r + [(2ik\nu_6 D_1 \Lambda_{6r1} + 2ik\zeta_r \omega_r \nu_6 \Lambda_{6r1}) + \sum_s \alpha_s \Lambda_{6s1}] \exp(i\sigma T_1) \\ & - \sum_{s,t,u} \nu_{stu} [(\bar{\Lambda}_{6s1} \Lambda_{6r1} \Lambda_{6u1} + \Lambda_{6s1} \bar{\Lambda}_{6r1} \Lambda_{6u1} + \Lambda_{6s1} \Lambda_{6r1} \bar{\Lambda}_{6u1}) \exp(i\sigma T_1) \\ & - (\sum_p \sum_j \bar{\Lambda}_{psj} \Lambda_{rj} \Lambda_{6u1} + \sum_p \sum_j \Lambda_{psj} \bar{\Lambda}_{rj} \Lambda_{6u1} + \sum_p \sum_j \bar{\Lambda}_{psj} \Lambda_{rj} \Lambda_{6t1} \\ & - \sum_p \sum_j \Lambda_{psj} \bar{\Lambda}_{rj} \Lambda_{6t1} + \sum_p \sum_j \bar{\Lambda}_{rj} \Lambda_{psj} \Lambda_{6s1} + \sum_p \sum_j \Lambda_{rj} \bar{\Lambda}_{psj} \Lambda_{6s1}) \exp(i\sigma T_1)] \\ & - \sum_{t,u} \nu_{rtu} (\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{ptk} \bar{\Lambda}_{ptk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{ptk} \Lambda_{ptk}) \\ & - \sum_{s,u} \nu_{str} (\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{ptk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{ptk}) \\ & - \sum_{s,t} \nu_{str} (\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{ptk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{ptk}) \\ & - \sum_{s,t} \delta_{st} [(\sum_k \Lambda_{6s(k+1)} \bar{\Lambda}_{6tk} + \sum_k \Lambda_{6t(k+1)} \bar{\Lambda}_{6sk}) \exp(i\sigma T_1)] - 3\nu_{rrr} \bar{A}_r A_r A_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left[\left(\sum_{j=2} \Lambda_{6sj} \Lambda_{6j} \bar{\Lambda}_{6u(2j-1)} + \sum_{j=2} \Lambda_{6sj} \Lambda_{6uj} \bar{\Lambda}_{6t(2j-1)} + \sum_{j=2} \Lambda_{6uj} \Lambda_{6uj} \bar{\Lambda}_{6s(2j-1)} \right) \exp(i\sigma T_1) \right] \\
 & - \sum_s 3\nu_{srr} [\bar{A}_r A_r \Lambda_{6s1} \exp(i\sigma T_1)] - \sum_t 3\nu_{trr} [\bar{A}_r A_r \Lambda_{6t1} \exp(i\sigma T_1)] \\
 & - \sum_u 3\nu_{rru} [\bar{A}_r A_r \Lambda_{6u1} \exp(i\sigma T_1)] \\
 & = 0 \tag{3-142}
 \end{aligned}$$

式中: α_r, ν_{stu} 可通过式(3-72)在 $e_{01} = e_{02} = 0$ 和 $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 0$ 时求得。

将式(3-76)和式(3-77)代入式(3-142), 整理得

$$\begin{aligned}
 & i\omega_r \dot{a}_r - \omega_r a_r \dot{\theta}_r + i\zeta_r \omega_r^2 a_r + \alpha_r a_r - \frac{3}{8} \nu_{rrr} a_r^3 \\
 & + (2ik\nu_6 D_1 + 2ik\zeta_r \omega_r \nu_6) \Gamma_{6r1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61r}) + \sum_s \alpha_s \Gamma_{6s1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61s}) \\
 & - \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left\{ \Gamma_{6s1} \Gamma_{6t1} \Gamma_{6u1} \left[\exp i(\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{61s} + \tau_{61t} + \tau_{61u}) \right] \right. \\
 & + \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61s} - \tau_{61t} + \tau_{61u}) + \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61s} + \tau_{61t} - \tau_{61u}) \\
 & - \left[\sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pj} \Gamma_{6u1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{pjs} + \tau_{pj} + \tau_{61u}) \right] \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pj} \Gamma_{6u1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{pjs} - \tau_{pj} + \tau_{61u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pj} \Gamma_{6t1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{pjs} + \tau_{pj} + \tau_{61t}) \\
 & - \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pj} \Gamma_{6t1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{pjs} - \tau_{pj} + \tau_{61t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{pj} \Gamma_{puj} \Gamma_{6s1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{pj} + \tau_{pu} + \tau_{61s}) \\
 & \left. + \sum_p \sum_j \Gamma_{pj} \Gamma_{puj} \Gamma_{6s1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{pj} - \tau_{pu} + \tau_{61s}) \right\} \\
 & - \sum_{t,u} \nu_{rtu} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pkt} + \tau_{pku}) \right] \\
 & - \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pku}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \right] \\
 & - \sum_{s,t} \nu_{str} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pkt}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \\
 & - \sum_{s,t} \delta_{st} \left[\sum_k \Gamma_{6t(k+1)} \Gamma_{6tk} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6(k+1)s} - \tau_{6kt}) \right. \\
 & \left. + \sum_k \Gamma_{6t(k+1)} \Gamma_{6sk} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6(k+1)t} - \tau_{6ks}) \right] \\
 & - \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left[\sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6j} \Gamma_{6u(2j-1)} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6js} + \tau_{6jt} - \tau_{6(2j-1)u}) \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6t(2j-1)} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6js} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-1)t}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6bj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6s(2j-1)} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6ju} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-1)s}) \\
 & - \sum_s \frac{3}{4} \nu_{srr} [a_r^2 \Gamma_{6s1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61s})] - \sum_t \frac{3}{4} \nu_{trr} [a_r^2 \Gamma_{6t1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61t})] \\
 & - \sum_u \frac{3}{4} \nu_{rru} [a_r^2 \Gamma_{6u1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61u})] \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-143}$$

设

$$\psi_r = \sigma T_1 - \theta_r \tag{3-144}$$

将式(3-144)代入式(3-143)中,并将其实部与虚部分开,得

$$\begin{aligned}
 a_r \dot{\psi}_r & = \sigma a_r - \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r a_r + \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_r^3 + 2k\zeta_r \nu_6 \Gamma_{6r1} \sin(\psi_r + \tau_{61r}) - \frac{1}{\omega_r} \sum_s \alpha_s \Gamma_{6s1} \cos(\psi_r + \tau_{61s}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left\{ \Gamma_{6s1} \Gamma_{6t1} \Gamma_{6u1} [\cos(\psi_r - \tau_{61s} + \tau_{61t} + \tau_{61u}) + \cos(\psi_r + \tau_{61s} - \tau_{61t} + \tau_{61u}) \right. \\
 & \left. + \cos(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{61t} - \tau_{61u}) \right] \\
 & - \left[\sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pj} \Gamma_{6u1} \cos(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{61u}) \right. \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pj} \Gamma_{6u1} \cos(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{61u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pj} \Gamma_{6t1} \cos(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{61t}) \\
 & - \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pj} \Gamma_{6t1} \cos(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{61t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{ptj} \Gamma_{puj} \Gamma_{6s1} \cos(\psi_r - \tau_{pjt} + \tau_{pju} + \tau_{61s}) \\
 & \left. + \sum_p \sum_j \Gamma_{ptj} \Gamma_{puj} \Gamma_{6s1} \cos(\psi_r + \tau_{pjt} - \tau_{pju} + \tau_{61s}) \right] \left. \right\} \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(-\tau_{pks} + \tau_{pku}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(-\tau_{pks} + \tau_{pkt}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \delta_{st} \left[\sum_k \Gamma_{6t(k+1)} \Gamma_{6tk} \cos(\psi_r + \tau_{6(k+1)s} - \tau_{6kt}) \right. \\
 & \left. + \sum_k \Gamma_{6t(k+1)} \Gamma_{6sk} \cos(\psi_r + \tau_{6(k+1)t} - \tau_{6ks}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left[\sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6u(2j-1)} \cos(\psi_r + \tau_{6js} + \tau_{6jt} - \tau_{6(2j-1)u}) \right. \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6t(2j-1)} \cos(\psi_r + \tau_{6js} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-1)t}) \\
 & \left. + \sum_{j=2} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6s(2j-1)} \cos(\psi_r + \tau_{6jt} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-1)s}) \right] \\
 & + \frac{3}{4\omega_r} \sum_s \nu_{srr} [a_r^2 \Gamma_{6s1} \cos(\psi_r + \tau_{61s})] + \frac{3}{4\omega_r} \sum_t \nu_{trr} [a_r^2 \Gamma_{6t1} \cos(\psi_r + \tau_{61t})] \\
 & + \frac{3}{4\omega_r} \sum_u \nu_{rru} [a_r^2 \Gamma_{6u1} \cos(\psi_r + \tau_{61u})] \tag{3-145}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_r = & -\zeta_r \omega_r a_r - 2k\zeta_r \nu_6 \Gamma_{6r1} \cos(\psi_r + \tau_{61r}) - \frac{1}{\omega_r} \sum_s \alpha_s \Gamma_{6s1} \sin(\psi_r + \tau_{61s}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left\{ \Gamma_{6s1} \Gamma_{6t1} \Gamma_{6u1} [\sin(\psi_r - \tau_{61s} + \tau_{61t} + \tau_{61u}) + \sin(\psi_r + \tau_{61s} - \tau_{61t} + \tau_{61u}) \right. \\
 & + \sin(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{61t} - \tau_{61u})] \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{6u1} \sin(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{61u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{6u1} \sin(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{61u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{6t1} \sin(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{61t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{6t1} \sin(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{61t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{6s1} \sin(\psi_r - \tau_{pjt} + \tau_{pju} + \tau_{61s}) \\
 & \left. + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{6s1} \sin(\psi_r + \tau_{pjt} - \tau_{pju} + \tau_{61s}) \right\} \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \delta_{st} \left[\sum_k \Gamma_{6t(k+1)} \Gamma_{6tk} \sin(\psi_r + \tau_{6(k+1)s} - \tau_{6kt}) \right. \\
 & \left. + \sum_k \Gamma_{6t(k+1)} \Gamma_{6sk} \sin(\psi_r + \tau_{6(k+1)t} - \tau_{6ks}) \right] \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left[\sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6u(2j-1)} \sin(\psi_r + \tau_{6js} + \tau_{6jt} - \tau_{6(2j-1)u}) \right. \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6t(2j-1)} \sin(\psi_r + \tau_{6js} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-1)t}) \\
 & \left. + \sum_{j=2} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6s(2j-1)} \sin(\psi_r + \tau_{6jt} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-1)s}) \right] \\
 & + \frac{3}{4\omega_r} \sum_s \nu_{srr} [a_r^2 \Gamma_{6s1} \sin(\psi_r + \tau_{61s})] + \frac{3}{4\omega_r} \sum_t \nu_{trr} [a_r^2 \Gamma_{6t1} \sin(\psi_r + \tau_{61t})]
 \end{aligned}$$



$$+ \frac{3}{4\omega_r} \sum_u \nu_{rru} [a_r^2 \Gamma_{6u1} \sin(\psi_r + \tau_{61u})] \quad (3-146)$$

发生伺服电动机电磁激励作用下的主共振时,系统作定常运动的条件为

$$\dot{a}_r = \dot{\psi}_r = 0 \quad (3-147)$$

可以利用 Newton-Raphson 方法解出 a_r 和 ψ_r 。将所求得的 a_r 和 ψ_r 代入式(3-75), 得到不考虑内共振的伺服电动机电磁激励作用下的主共振一阶近似定常解为

$$\eta_{r0} = a_r \cos(\omega_r T_0 - \psi_r) + \sum_{k=1}^m \sum_p F_{0prk} (\omega_r^2 - k^2 \nu_p^2)^{-1} \cos(\omega_r T_0 + \tau_{pki}) + O(\varepsilon) \quad (3-148)$$

式中: $\nu_6 = \omega_r + \varepsilon\sigma$ 。

可知,对于两自由度可控连杆机构系统,当伺服电动机定子绕组旋转磁场的旋转频率接近系统的固有频率时,系统会发生由伺服电动机电磁参数所激发的主共振,并且主共振频域响应幅值与伺服电动机电磁参数激励的幅值有关。

2. 三相交流电动机电磁激励作用下的主共振分析

发生三相交流电动机电磁激励作用下的主共振时, $\nu_7 \approx \omega_r$, 引入解谐参数 σ , 使

$$\begin{aligned} \nu_7 &= \omega_r + \varepsilon\sigma \\ \sigma &= 0(1) \end{aligned} \quad (3-149)$$

将式(3-149)代入式(3-67), 则式(3-67)的解不出现长期项的条件为

$$\begin{aligned} & 2i\omega_r D_1 A_r + 2i\zeta_r \omega_r^2 A_r + \alpha_r A_r + [(2ik\nu_7 D_1 \Lambda_{7r1} + 2ik\zeta_r \omega_r \nu_7 \Lambda_{7r1}) + \sum_s \alpha_s \Lambda_{7s1}] \exp(i\sigma T_1) \\ & - \sum_{s,t,u} \nu_{stu} [(\bar{\Lambda}_{7s1} \Lambda_{7t1} \Lambda_{7u1} + \Lambda_{7s1} \bar{\Lambda}_{7t1} \Lambda_{7u1} + \Lambda_{7s1} \Lambda_{7t1} \bar{\Lambda}_{7u1}) \exp(i\sigma T_1) \\ & - (\sum_p \sum_j \bar{\Lambda}_{psj} \Lambda_{puj} \Lambda_{7u1} + \sum_p \sum_j \Lambda_{psj} \bar{\Lambda}_{puj} \Lambda_{7u1} + \sum_p \sum_j \bar{\Lambda}_{psj} \Lambda_{puj} \Lambda_{7t1} \\ & - \sum_p \sum_j \Lambda_{psj} \bar{\Lambda}_{puj} \Lambda_{7t1} + \sum_p \sum_j \bar{\Lambda}_{puj} \Lambda_{puj} \Lambda_{7s1} + \sum_p \sum_j \Lambda_{puj} \bar{\Lambda}_{puj} \Lambda_{7s1}) \exp(i\sigma T_1)] \\ & - \sum_{t,u} \nu_{rtu} (\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{ptk} \bar{\Lambda}_{puk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{ptk} \Lambda_{puk}) \\ & - \sum_{s,u} \nu_{sru} (\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{puk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{puk}) \\ & - \sum_{s,t} \nu_{str} (\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{ptk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{ptk}) \\ & - \sum_{s,t} \delta_{st} [(\sum_k \Lambda_{7s(k+1)} \bar{\Lambda}_{7tk} + \sum_k \Lambda_{7t(k+1)} \bar{\Lambda}_{7sk}) \exp(i\sigma T_1)] - 3\nu_{rrr} \bar{A}_r A_r A_r \\ & - \sum_{s,t,u} \nu_{stu} [(\sum_{j=2} \Lambda_{7sj} \Lambda_{7uj} \bar{\Lambda}_{7u(2j-1)} + \sum_{j=2} \Lambda_{7sj} \Lambda_{7uj} \bar{\Lambda}_{7t(2j-1)} + \sum_{j=2} \Lambda_{7uj} \Lambda_{7uj} \bar{\Lambda}_{7s(2j-1)}) \exp(i\sigma T_1)] \\ & - \sum_s 3\nu_{srr} [\bar{A}_r A_r \Lambda_{7s1} \exp(i\sigma T_1)] - \sum_t 3\nu_{rrt} [\bar{A}_r A_r \Lambda_{7t1} \exp(i\sigma T_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_u 3\nu_{rru} [\bar{A}_r A_r \Lambda_{7ul} \exp(i\sigma T_1)] \\
 & = 0 \tag{3-150}
 \end{aligned}$$

式中： α_r 、 ν_{stu} 可通过式(3-72)在 $e_{01} = e_{02} = 0$ 和 $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 0$ 时求得。

将式(3-76)和式(3-77)代入式(3-150)，整理得到

$$\begin{aligned}
 & i\omega_r \dot{a}_r - \omega_r a_r \dot{\theta}_r + i\zeta_r \omega_r^2 a_r + \alpha_r a_r - \frac{3}{8} \nu_{rrr} a_r^3 \\
 & + (2ik\nu_7 D_1 + 2ik\zeta_r \omega_r \nu_7) \Gamma_{7r1} \exp i(\sigma T_1 + \tau_{71r} - \theta_r) + \sum_s \alpha_s \Gamma_{7s1} \exp i(\sigma T_1 + \tau_{71s} - \theta_r) \\
 & - \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left\{ \Gamma_{7s1} \Gamma_{7t1} \Gamma_{7u1} [\exp i(\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{71s} + \tau_{71t} + \tau_{71u}) \right. \\
 & + \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{71s} - \tau_{71t} + \tau_{71u}) + \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{71s} + \tau_{71t} - \tau_{71u})] \\
 & - [\sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7u1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{71u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7u1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{71u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{711} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{71t}) \\
 & - \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{711} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{71t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjt} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7s1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{pjt} + \tau_{pjt} + \tau_{71s}) \\
 & \left. + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjt} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7s1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{pjt} - \tau_{pjt} + \tau_{71s}) \right\} \\
 & - \sum_{t,u} \nu_{rtu} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pkt} + \tau_{pku}) \right] \\
 & - \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pku}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \right] \\
 & - \sum_{s,t} \nu_{str} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pkt}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \\
 & - \sum_{s,t} \delta_{st} [\sum_k \Gamma_{7t(k+1)} \Gamma_{7tk} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{7(k+1)s} - \tau_{7kt}) \\
 & + \sum_k \Gamma_{7t(k+1)} \Gamma_{7sk} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{7(k+1)t} - \tau_{7ks})] \\
 & - \sum_{s,t,u} \nu_{stu} [\sum_{j=2} \Gamma_{7sj} \Gamma_{7tj} \Gamma_{7u(2j-1)} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{7js} + \tau_{7jt} - \tau_{7(2j-1)u}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{7sj} \Gamma_{7tj} \Gamma_{7(2j-1)} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{7js} + \tau_{7ju} - \tau_{7(2j-1)t}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{7tj} \Gamma_{7uj} \Gamma_{7s(2j-1)} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{7jt} + \tau_{7ju} - \tau_{7(2j-1)s})]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \sum_s \frac{3}{4} \nu_{srr} [a_r^2 \Gamma_{psl} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{p1s})] - \sum_t \frac{3}{4} \nu_{trr} [a_r^2 \Gamma_{ptl} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{p1t})] \\
 & - \sum_u \frac{3}{4} \nu_{rru} [a_r^2 \Gamma_{7u1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{71u})] \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-151}$$

设

$$\psi_r = \sigma T_1 - \theta_r \tag{3-152}$$

将式(3-152)代入式(3-151)中,并将其实部与虚部分开,得

$$\begin{aligned}
 a_r \dot{\psi}_r = & \sigma a_r - \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r a_r + \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_r^3 + 2k\zeta_r \nu_7 \Gamma_{7r1} \sin(\psi_r + \tau_{71r}) - \frac{1}{\omega_r} \sum_s \alpha_s \Gamma_{7s1} \cos(\psi_r + \tau_{71s}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left\{ \Gamma_{7s1} \Gamma_{7t1} \Gamma_{7u1} [\cos(\psi_r - \tau_{71s} + \tau_{71t} + \tau_{71u}) + \cos(\psi_r + \tau_{71s} - \tau_{71t} + \tau_{71u}) \right. \\
 & \left. + \cos(\psi_r + \tau_{71s} + \tau_{71t} - \tau_{71u}) \right] \\
 & - \left[\sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7u1} \cos(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{71u}) \right. \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7u1} \cos(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{71u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7t1} \cos(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{71t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7t1} \cos(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{71t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjt} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7s1} \cos(\psi_r - \tau_{pjt} + \tau_{pjt} + \tau_{71s}) \\
 & \left. + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjt} \Gamma_{pjt} \Gamma_{7s1} \cos(\psi_r + \tau_{pjt} - \tau_{pjt} + \tau_{71s}) \right] \left. \right\} \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \delta_{st} \left[\sum_k \Gamma_{7t(k+1)} \Gamma_{7tk} \cos(\psi_r + \tau_{7(k+1)s} - \tau_{7kt}) \right. \\
 & \left. + \sum_k \Gamma_{7t(k+1)} \Gamma_{7sk} \cos(\psi_r + \tau_{7(k+1)t} - \tau_{7ks}) \right] \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left[\sum_{j=2} \Gamma_{7sj} \Gamma_{7jt} \Gamma_{7u(2j-1)} \cos(\psi_r + \tau_{7js} + \tau_{7jt} - \tau_{7(2j-1)u}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{7sj} \Gamma_{7uj} \Gamma_{7t(2j-1)} \cos(\psi_r + \tau_{7js} + \tau_{7ju} - \tau_{7(2j-1)t}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{7tj} \Gamma_{7uj} \Gamma_{7s(2j-1)} \cos(\psi_r + \tau_{7jt} + \tau_{7ju} - \tau_{7(2j-1)s}) \\
 & + \frac{3}{4\omega_r} \sum_s \nu_{srr} [a_r^2 \Gamma_{7s1} \cos(\psi_r + \tau_{71s})] + \frac{3}{4\omega_r} \sum_t \nu_{trr} [a_r^2 \Gamma_{7t1} \cos(\psi_r + \tau_{71t})] \\
 & + \frac{3}{4\omega_r} \sum_u \nu_{rru} [a_r^2 \Gamma_{7u1} \cos(\psi_r + \tau_{71u})] \tag{3-153}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_r = & -\zeta_r \omega_r a_r - 2k \zeta_r \nu_7 \Gamma_{7r1} \cos(\psi_r + \tau_{71r}) - \frac{1}{\omega_r} \sum_s \alpha_s \Gamma_{7s1} \sin(\psi_r + \tau_{71s}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left\{ \Gamma_{7s1} \Gamma_{7t1} \Gamma_{7u1} \left[\sin(\psi_r - \tau_{71s} + \tau_{71u} + \tau_{71u}) + \sin(\psi_r + \tau_{71s} - \tau_{71u} + \tau_{71u}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin(\psi_r + \tau_{71s} + \tau_{71t} - \tau_{71u}) \right] \right. \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{7u1} \sin(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{71u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{7u1} \sin(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{71u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{7t1} \sin(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{71t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{7t1} \sin(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{71t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{7s1} \sin(\psi_r - \tau_{pjt} + \tau_{pju} + \tau_{71s}) \\
 & \left. + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjj} \Gamma_{pjj} \Gamma_{7s1} \sin(\psi_r + \tau_{pjt} - \tau_{pju} + \tau_{71s}) \right\} \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \delta_{st} \left[\sum_k \Gamma_{7t(k+1)} \Gamma_{7tk} \sin(\psi_r + \tau_{7(k+1)s} - \tau_{7kt}) \right. \\
 & \left. + \sum_k \Gamma_{7t(k+1)} \Gamma_{7sk} \sin(\psi_r + \tau_{7(k+1)t} - \tau_{7ks}) \right] \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left[\sum_{j=2} \Gamma_{7sj} \Gamma_{7tj} \Gamma_{7u(2j-1)} \sin(\psi_r + \tau_{7js} + \tau_{7jt} - \tau_{7(2j-1)u}) \right. \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{7sj} \Gamma_{7tj} \Gamma_{7u(2j-1)} \sin(\psi_r + \tau_{7js} + \tau_{7ju} - \tau_{7(2j-1)t}) \\
 & \left. + \sum_{j=2} \Gamma_{7tj} \Gamma_{7uj} \Gamma_{7s(2j-1)} \sin(\psi_r + \tau_{7jt} + \tau_{7ju} - \tau_{7(2j-1)s}) \right] \\
 & + \frac{3}{4\omega_r} \sum_s \nu_{srr} [a_r^2 \Gamma_{7s1} \sin(\psi_r + \tau_{71s})] + \frac{3}{4\omega_r} \sum_t \nu_{trr} [a_r^2 \Gamma_{7t1} \sin(\psi_r + \tau_{71t})] \\
 & + \frac{3}{4\omega_r} \sum_u \nu_{rru} [a_r^2 \Gamma_{7u1} \sin(\psi_r + \tau_{71u})] \tag{3-154}
 \end{aligned}$$



三相交流电动机在电磁激励作用下发生主共振时,系统作定常运动的条件为

$$\dot{a}_r = \dot{\psi}_r = 0 \quad (3-155)$$

可以利用 Newton-Raphson 方法解出 a_r 和 ψ_r 。将所求得的 a_r 和 ψ_r 代入式(3-75),得到三相交流电动机电磁激励作用下的主共振的一阶近似定常解为

$$\eta_{r0} = a_r \cos(\omega_r T_0 - \psi_r) + \sum_{k=1}^m \sum_p F_{0prk} (\omega_r^2 - k^2 \nu_p^2)^{-1} \cos(\omega_r T_0 + \tau_{pki}) + O(\varepsilon) \quad (3-156)$$

式中: $\nu_r = \omega_r + \varepsilon\sigma$ 。

由上述可知,对于两自由度可控连杆机构系统,当三相交流电动机定子绕组旋转磁场的旋转频率接近于系统的固有频率时,系统会发生由三相交流电动机电磁参数所激发的主共振,并且主共振频域响应幅值与三相交流电动机电磁参数激励的幅值有关。

3.4.2.2 次谐共振分析

由系统振动机理分析知,当 $\omega_r \approx \frac{1}{3}\nu_p$ 或 $\omega_r \approx \frac{1}{2}\nu_p$ 时,系统将产生次谐共振现象,系统的次谐共振包括两电动机电磁参数激励作用下的次谐共振、外力作用下的次谐共振和自激惯性力作用下的次谐共振。这里对次谐共振因子 $\nu_2 = \Omega_2 = 3\omega_r$ 时系统在自激惯性力作用下的次谐共振进行分析。

这里不考虑电动机的静偏心($e_{01} = e_{02} = 0$)和转动偏心($\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 0$),并忽略外界对系统的干扰作用,即外力 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$,且不考虑系统内共振,引入解谐参数 σ ,使

$$\nu_2 = 3\omega_r - \varepsilon\sigma, \quad \sigma = 0(1) \quad (3-157)$$

将式(3-152)、式(3-75)代入式(3-76),则其解不出现长期项的条件为

$$\begin{aligned} & - (2i\omega_r D_1 A_r + 2i\zeta_r \omega_r^2 A_r) - \alpha_r A_r + 3\nu_{rrr} \bar{A}_r A_r A_r + \sum_s \nu_{srr} A_r A_r \bar{A}_{2s1} \exp(i\sigma T_1) \\ & + \sum_t \nu_{trr} A_r A_r \bar{A}_{2t1} \exp(i\sigma T_1) + \sum_u \nu_{rru} A_r A_r \bar{A}_{2u1} \exp(i\sigma T_1) \\ & + \sum_{t,u} \nu_{rtu} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{ptk} \bar{\Lambda}_{puk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{ptk} \Lambda_{puk} \right) \\ & + \sum_{s,u} \nu_{sru} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{puk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{puk} \right) \\ & + \sum_{s,t} \nu_{str} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{ptk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{ptk} \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-158)$$

式中: α_r, ν_{stu} 可通过式(3-72)在 $e_{01} = e_{02} = 0$ 和 $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 0$ 时求得。

将式(3-76)和式(3-77)代入式(3-158),经整理得

$$(i\omega_r \dot{a}_r - \omega_r a_r \theta_r + i\zeta_r \omega_r^2 a_r) - \alpha_r \frac{1}{2} a_r + \frac{3}{8} \nu_{rrr} a_r^3 + \frac{1}{4} \sum_s \nu_{srr} a_r^2 \Gamma_{2s1} \exp i(\sigma T_1 + \theta_r - \tau_{21s})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \sum_t \nu_{tr} a_r^2 \Gamma_{2t1} \exp i(\sigma T_1 + \theta_r - \tau_{21t}) + \frac{1}{4} \sum_u \nu_{ru} a_r^2 \Gamma_{2u1} \exp i(\sigma T_1 + \theta_r - \tau_{21u}) \\
 & + \sum_{t,u} \frac{1}{2} a_r \nu_{rtu} \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pkt} + \tau_{pku}) \right\} \\
 & + \sum_{s,u} \frac{1}{2} a_r \nu_{sru} \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pku}) + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pku}) \right\} \\
 & + \sum_{s,t} \frac{1}{2} a_r \nu_{str} \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pkt}) \right\} \\
 = & 0 \tag{3-159}
 \end{aligned}$$

设

$$\psi_r = \sigma T_1 + \theta_r \tag{3-160}$$

将式(3-160)代入式(3-161)中,并将其实部与虚部分开,得

$$\begin{aligned}
 a_r \dot{\psi}_r = & \sigma a_r + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r a_r - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rr} a_r^3 - \frac{1}{4\omega_r} \sum_s \nu_{sr} a_r^2 \Gamma_{2s1} \cos(\psi_r - \tau_{21s}) \\
 & - \frac{1}{4\omega_r} \sum_t \nu_{tr} a_r^2 \Gamma_{2t1} \cos(\psi_r - \tau_{21t}) - \frac{1}{4\omega_r} \sum_u \nu_{ru} a_r^2 \Gamma_{2u1} \cos(\psi_r - \tau_{21u}) \\
 & - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \nu_{rtu} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\
 & - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \nu_{sru} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\
 & - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \tag{3-161}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_r = & -\frac{\zeta_r \omega_r^2 a_r}{\omega_r} + \frac{1}{4\omega_r} \sum_s \nu_{sr} a_r^2 \Gamma_{2s1} \sin(\psi_r - \tau_{21s}) \\
 & + \frac{1}{4\omega_r} \sum_t \nu_{tr} a_r^2 \Gamma_{2t1} \sin(\psi_r - \tau_{21t}) + \frac{1}{4\omega_r} \sum_u \nu_{ru} a_r^2 \Gamma_{2u1} \sin(\psi_r - \tau_{21u}) \tag{3-162}
 \end{aligned}$$

在自激惯性力作用时所发生的次谐共振下,系统作定常运动的条件为

$$\dot{a}_r = \dot{\psi}_r = 0 \tag{3-163}$$

可以利用 Newton-Raphson 方法解出 a_r 和 ψ_r 。将所求得的 a_r 和 ψ_r 代入式(3-75),得到不考虑内共振的系统次谐共振因子 $\nu_2 = 3\omega_r$ 时,在自激惯性力作用下的次谐共振一阶近似定常解为

$$\eta_{r0} = a_r \cos(\omega_r T_0 - \psi_r) + \sum_{k=1}^m \sum_p F_{0prk} (\omega_r^2 - k^2 \nu_p^2)^{-1} \cos(\omega_r T_0 + \tau_{pki}) + O(\varepsilon) \tag{3-164}$$

式中: $\nu_2 = 3\omega_r - \varepsilon\sigma$ 。

由上述可知,对于两自由度可控连杆机构系统,当三相交流电动机转子转动频率接近于三倍的系统固有频率时,系统会发生由自激惯性力所激发的次谐共振,并且次



谐振频域响应幅值与系统自激惯性激励的幅值有关。

3.4.2.3 超谐共振分析

由系统振动机理分析知,系统超谐共振包括外力作用下的超谐共振、双电动机电磁参数激励作用下的超谐共振和自激惯性力作用下的超谐共振。当超谐共振因子 $3\nu_1 = 3\Omega_1 \approx \omega_r$ 或 $2\nu_1 = 2\Omega_1 \approx \omega_r$ 时,系统发生由伺服电动机转子转动引起的自激惯性力作用下的超谐共振;当超谐共振因子 $3\nu_2 = 3\Omega_2 \approx \omega_r$ 或 $2\nu_2 = 2\Omega_2 \approx \omega_r$ 时,系统发生由三相交流电动机转子转动引起的自激惯性力作用下的超谐共振;当超谐共振因子 $3\nu_3 \approx \omega_r$ 或 $2\nu_3 \approx \omega_r$ 时,系统发生由伺服电动机转子转动和三相交流电动机转子转动共同引起的在自激惯性力作用下的超谐共振;当超谐共振因子 $3\nu_6 = 6\omega_{01} \approx \omega_r$ 或 $2\nu_6 = 4\Omega_{01} \approx \omega_r$ 时,系统发生由伺服电动机定子绕组旋转磁场旋转引起的伺服电动机电磁参数激励作用下的超谐共振;当超谐共振因子 $3\nu_7 = 6\omega_{02} \approx \omega_r$ 或 $2\nu_7 = 4\Omega_{02} \approx \omega_r$ 时,系统发生由三相交流电动机定子绕组旋转磁场旋转引起的三相交流电动机电磁参数激励作用下的超谐共振。这里对超谐共振因子 $3\nu_6 = 6\omega_{01} \approx \omega_r$ 时,由伺服电动机定子绕组旋转磁场旋转引起的伺服电动机电磁参数激励作用下的超谐共振现象进行分析。

这里不考虑电动机的静偏心 ($e_{01} = e_{02} = 0$) 和转动偏心 ($\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 0$), 并忽略外界对系统的干扰作用, 即外力 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 且不考虑系统内共振, 引入解谐参数 σ , 使

$$\nu_6 = \frac{1}{3}\omega_r + \varepsilon\sigma \quad (3-165)$$

$$\sigma = 0(1)$$

将式(3-165)、式(3-75)代入式(3-74), 则其解不出现长期项的条件为

$$\begin{aligned} & - (2i\omega_r D_1 A_r + 2i\zeta_r \omega_r^2 A_r) - \alpha_r A_r + 3\nu_{rr} \bar{A}_r A_r A_r \\ & + \sum_{s,t} \delta_{st} \left[(\Lambda_{6s1} \Lambda_{6t2} + \Lambda_{6t1} \Lambda_{6s2}) \exp(i3\sigma T_1) + (\Lambda_{6s2} \Lambda_{6t1} + \Lambda_{6t2} \Lambda_{6s1}) \exp(i3\sigma T_1) \right. \\ & + \left(\sum_k \Lambda_{6s(k+3)} \bar{\Lambda}_{6tk} + \sum_k \Lambda_{6t(k+3)} \bar{\Lambda}_{6sk} \right) \exp(i3\sigma T_1) \left. \right] + \sum_{s,t,u} \nu_{stu} \left[\Lambda_{6s1} \Lambda_{6t1} \Lambda_{6u1} \exp(i3\sigma T_1) \right. \\ & + (\bar{\Lambda}_{6s3} \Lambda_{6t3} \Lambda_{6u3} + \Lambda_{6s3} \bar{\Lambda}_{6t3} \Lambda_{6u3} + \Lambda_{6s3} \Lambda_{6t3} \bar{\Lambda}_{6u3}) \exp(i3\sigma T_1) \\ & \cdot \left(\sum_p \sum_j \bar{\Lambda}_{psj} \Lambda_{puj} \Lambda_{6u3} + \sum_p \sum_j \Lambda_{psj} \bar{\Lambda}_{puj} \Lambda_{6u3} + \sum_p \sum_j \bar{\Lambda}_{psj} \Lambda_{puj} \Lambda_{6t3} \right. \\ & + \sum_p \sum_j \Lambda_{psj} \bar{\Lambda}_{puj} \Lambda_{6t3} + \sum_p \sum_j \bar{\Lambda}_{puj} \Lambda_{puj} \Lambda_{6s3} + \sum_p \sum_j \Lambda_{puj} \bar{\Lambda}_{puj} \Lambda_{6s3} \left. \right) \exp(i3\sigma T_1) \\ & \cdot \left(\sum_{j=2} \Lambda_{6sj} \Lambda_{6uj} \Lambda_{6u(2j-3)} + \sum_{j=2} \Lambda_{6sj} \Lambda_{6uj} \bar{\Lambda}_{6t(2j-3)} + \sum_{j=2} \Lambda_{6uj} \Lambda_{6uj} \bar{\Lambda}_{6s(2j-3)} \right) \exp(i3\sigma T_1) \left. \right] \\ & + \sum_u \nu_{ruu} \left[2A_r \bar{A}_r \Lambda_{6u3} \exp(i3\sigma T_1) + A_r A_r \bar{\Lambda}_{6u3} \exp(-i3\sigma T_1) \right] \\ & + \sum_t \nu_{rtt} \left[2A_r \bar{A}_r \Lambda_{6t3} \exp(i3\sigma T_1) + A_r A_r \bar{\Lambda}_{6t3} \exp(-i3\sigma T_1) \right] \\ & + \sum_s \nu_{srr} \left[2A_r \bar{A}_r \Lambda_{6s3} \exp(i3\sigma T_1) + A_r A_r \bar{\Lambda}_{6s3} \exp(-i3\sigma T_1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l,u} \nu_{rtu} \left[\bar{A}_r \Lambda_{6l3} \Lambda_{6u3} \exp(6i\sigma T_1) + \left(\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{ptk} \bar{\Lambda}_{pk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{ptk} \Lambda_{pk} \right) \right] \\
 & + \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[\bar{A}_r \Lambda_{6s3} \Lambda_{6u3} \exp(6i\sigma T_1) + \left(\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{pk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{pk} \right) \right] \\
 & + \sum_{s,t} \nu_{str} \left[\bar{A}_r \Lambda_{6s3} \Lambda_{6t3} \exp(6i\sigma T_1) + \left(\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{pk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{pk} \right) \right] \\
 & + \sum_{l,u} \nu_{rtu} \left[\left(\sum_{k=1, k \neq 3}^5 \bar{A}_r \Lambda_{6l(6-k)} \Lambda_{6uk} + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 \bar{A}_r \Lambda_{6u(6-k)} \Lambda_{6tk} \right) \exp(i6\sigma T_1) \right] \\
 & + \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[\left(\sum_{k=1, k \neq 3}^5 \bar{A}_r \Lambda_{6s(6-k)} \Lambda_{6uk} + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 \bar{A}_r \Lambda_{6u(6-k)} \Lambda_{6sk} \right) \exp(i6\sigma T_1) \right] \\
 & + \sum_{s,t} \nu_{str} \left[\left(\sum_{k=1, k \neq 3}^5 \bar{A}_r \Lambda_{6s(6-k)} \Lambda_{6tk} + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 \bar{A}_r \Lambda_{6t(6-k)} \Lambda_{6sk} \right) \exp(i6\sigma T_1) \right] \\
 & = 0 \tag{3-166}
 \end{aligned}$$

式中: α_r, ν_{stu} 可通过式(3-72)在 $e_{01} = e_{02} = 0$ 和 $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 0$ 时求得。

将式(3-165)和式(3-166)代入式(3-166), 经整理得

$$\begin{aligned}
 & - (i\omega_r \dot{a}_r - \omega_r a_r \dot{\theta}_r + i\zeta_r \omega_r^2 a_r) - \alpha_r \frac{1}{2} a_r + \frac{3}{8} \nu_{rrr} a_r^3 \\
 & + \sum_{s,t} \delta_{st} \left\{ \Gamma_{6s1} \Gamma_{6t2} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61s} + \tau_{62t}) + \Gamma_{6t1} \Gamma_{6s2} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61t} + \tau_{62s}) \right. \\
 & + \Gamma_{6s2} \Gamma_{6t1} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{62s} + \tau_{61t}) + \Gamma_{6t2} \Gamma_{6s1} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{62t} + \tau_{61s}) \\
 & + \sum_k \Gamma_{6s(k+3)} \Gamma_{6tk} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6(k+3)s} - \tau_{6kt}) \\
 & \left. + \sum_k \Gamma_{6t(k+3)} \Gamma_{6sk} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6(k+3)t} - \tau_{6ks}) \right\} \\
 & + \sum_{s,r,t,u} \nu_{stu} \left[\Gamma_{6s1} \Gamma_{6t1} \Gamma_{6u1} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61s} + \tau_{61t} + \tau_{61u}) \right. \\
 & + \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{63s} + \tau_{63t} + \tau_{63u}) \\
 & + \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{63s} - \tau_{63t} + \tau_{63u}) \\
 & + \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{63s} + \tau_{63t} - \tau_{63u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{ptj} \Gamma_{6u3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{pjs} + \tau_{ptj} + \tau_{63u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{ptj} \Gamma_{6u3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{pjs} - \tau_{ptj} + \tau_{63u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{puj} \Gamma_{6t3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{pjs} + \tau_{puj} + \tau_{63t}) \\
 & \left. + \sum_j \Gamma_{6sj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6t3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6js} - \tau_{6ju} + \tau_{63t}) \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_j \Gamma_{6ij} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6s3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r - \tau_{6jt} + \tau_{6ju} + \tau_{63s}) \\
& + \sum_j \Gamma_{6ij} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6s3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6jt} - \tau_{6ju} + \tau_{63s}) \\
& + \sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6tj} \Gamma_{6u(2j-3)} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6js} + \tau_{6jt} - \tau_{6(2j-3)u}) \\
& + \sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6t(2j-3)} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6js} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-3)t}) \\
& + \sum_{j=2} \Gamma_{6ij} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6s(2j-3)} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{6jt} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-3)s}) \\
& + \sum_u \nu_{rru} \left[\frac{1}{2} a_r^2 \Gamma_{6u3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{63u}) + \frac{1}{4} a_r^2 \Gamma_{6u3} \exp i(-3\sigma T_1 + \theta_r - \tau_{63u}) \right] \\
& + \sum_t \nu_{trr} \left[\frac{1}{2} a_r^2 \Gamma_{6t3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{63t}) + \frac{1}{4} a_r^2 \Gamma_{6t3} \exp i(-3\sigma T_1 + \theta_r - \tau_{63t}) \right] \\
& + \sum_s \nu_{srr} \left[\frac{1}{2} a_r^2 \Gamma_{6s3} \exp i(3\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{63s}) + \frac{1}{4} a_r^2 \Gamma_{6s3} \exp i(-3\sigma T_1 + \theta_r - \tau_{63s}) \right] \\
& + \sum_{t,u} \nu_{rtu} \left[\frac{1}{2} a_r \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \exp i(6\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{63t} + \tau_{63u}) \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pkt} + \tau_{pku}) \right] \\
& + \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[\frac{1}{2} a_r \Gamma_{6s3} \Gamma_{6u3} \exp i(6\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{63s} + \tau_{63u}) \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pku}) + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pku}) \right] \\
& + \sum_{s,t} \nu_{str} \left[\frac{1}{2} a_r \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \exp i(6\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{63s} + \tau_{63t}) \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pkt}) \right] \\
& + \sum_{t,u} \nu_{rtu} \left[\left(\sum_{k=1, k \neq 3}^5 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{6t(6-k)} \Gamma_{6uk} \exp i(6\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{6(6-k)t} + \tau_{6ku}) \right) \right. \\
& \left. + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{6u(6-k)} \Gamma_{6tk} \exp i(6\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{6(6-k)u} + \tau_{6kt}) \right] \\
& + \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[\sum_{k=1, k \neq 3}^5 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{6s(6-k)} \Gamma_{6uk} \exp i(6\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{6(6-k)s} + \tau_{6ku}) \right. \\
& \left. + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{6u(6-k)} \Gamma_{6sk} \exp i(6\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{6(6-k)u} + \tau_{6ks}) \right] \\
& + \sum_{s,t} \nu_{str} \left[\sum_{k=1, k \neq 3}^5 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{6s(6-k)} \Gamma_{6tk} \exp i(6\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{6(6-k)s} + \tau_{6kt}) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{6l(6-k)} \Gamma_{6sk} \exp i(6\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{6(6-k)l} + \tau_{6ks}) \Big] \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-167}$$

设

$$\psi_r = 3\sigma T_1 - \theta_r \tag{3-168}$$

将式(3-168)代入式(3-167)中,并将其实部与虚部分开,得

$$\begin{aligned}
 a_r \dot{\psi}_r = & 3\sigma a_r - \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r a_r + \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_r^3 + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \delta_{st} [\Gamma_{6s1} \Gamma_{6t2} \cos(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{62t}) \\
 & + \Gamma_{6t1} \Gamma_{6s2} \cos(\psi_r + \tau_{61t} + \tau_{62s}) + \Gamma_{6s2} \Gamma_{6t1} \cos(\psi_r + \tau_{62s} + \tau_{61t}) \\
 & + \Gamma_{6t2} \Gamma_{6s1} \cos(\psi_r + \tau_{62t} + \tau_{61s}) + \sum_k \Gamma_{6s(k+3)} \Gamma_{6tk} \cos(\psi_r + \tau_{6(k+3)s} - \tau_{6kt}) \\
 & + \sum_k \Gamma_{6t(k+3)} \Gamma_{6sk} \cos(\psi_r + \tau_{6(k+3)t} - \tau_{6ks})] \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,r,t,u} \nu_{stu} [\Gamma_{6s1} \Gamma_{6t1} \Gamma_{6u1} \cos(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{61t} + \tau_{61u}) \\
 & + \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \cos(\psi_r - \tau_{63s} + \tau_{63t} + \tau_{63u}) + \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \cos(\psi_r + \tau_{63s} - \tau_{63t} + \tau_{63u}) \\
 & + \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \cos(\psi_r + \tau_{63s} + \tau_{63t} - \tau_{63u}) + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{6u3} \cos(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{63u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{6u3} \cos(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{63u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{6t3} \cos(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{63t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{pjt} \Gamma_{6t3} \cos(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{63t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjt} \Gamma_{pjt} \Gamma_{6s3} \cos(\psi_r - \tau_{pjt} + \tau_{pjt} + \tau_{63s}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{pjt} \Gamma_{pjt} \Gamma_{6s3} \cos(\psi_r + \tau_{pjt} - \tau_{pjt} + \tau_{63s}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6jt} \Gamma_{6u(2j-3)} \cos(\psi_r + \tau_{6js} + \tau_{6jt} - \tau_{6(2j-3)u}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6t(2j-3)} \cos(\psi_r + \tau_{6js} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-3)t}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6jt} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6s(2j-3)} \cos(\psi_r + \tau_{6jt} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-3)s})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_u \nu_{rru} \left[a_r^2 \Gamma_{6u3} \cos(\psi_r + \tau_{63u}) + \frac{1}{2} a_r^2 \Gamma_{6u3} \cos(-\psi_r - \tau_{63u}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_t \nu_{rrt} \left[a_r^2 \Gamma_{6t3} \cos(\psi_r + \tau_{63t}) + \frac{1}{2} a_r^2 \Gamma_{6t3} \cos(-\psi_r - \tau_{63t}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_s \nu_{rrs} \left[a_r^2 \Gamma_{6s3} \cos(\psi_r + \tau_{63s}) + \frac{1}{2} a_r^2 \Gamma_{6s3} \cos(-\psi_r - \tau_{63s}) \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{l,u} \nu_{rtu} [a_r \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \cos(2\psi_r + \tau_{63t} + \tau_{63u}) + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,u} \nu_{sru} [a_r \Gamma_{6s3} \Gamma_{6u3} \cos(2\psi_r + \tau_{63s} + \tau_{63u}) + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,t} \nu_{str} [a_r \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \cos(2\psi_r + \tau_{63s} + \tau_{63t}) + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{l,u} \nu_{rtu} [\sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6l(6-k)} \Gamma_{6uk} \cos(2\psi_r + \tau_{6(6-k)t} + \tau_{6ku}) \\
 & + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6u(6-k)} \Gamma_{6lk} \cos(2\psi_r + \tau_{6(6-k)u} + \tau_{6kt})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,u} \nu_{sru} [\sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6s(6-k)} \Gamma_{6uk} \cos(2\psi_r + \tau_{6(6-k)s} + \tau_{6ku}) \\
 & + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6u(6-k)} \Gamma_{6sk} \cos(2\psi_r + \tau_{6(6-k)u} + \tau_{6ks})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,t} \nu_{str} [\sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{ps(6-k)} \Gamma_{qtk} \cos(2\psi_r + \tau_{p(6-k)s} + \tau_{qkt}) \\
 & + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6t(6-k)} \Gamma_{6sk} \cos(2\psi_r + \tau_{6(6-k)t} + \tau_{6ks})] \tag{3-169}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_r = & - \zeta_r \omega_r a_r + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \delta_{st} [\Gamma_{6s1} \Gamma_{6t2} \sin(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{62t}) \\
 & + \Gamma_{6t1} \Gamma_{6s2} \sin(\psi_r + \tau_{61t} + \tau_{62s}) + \Gamma_{6s2} \Gamma_{6t1} \sin(\psi_r + \tau_{62s} + \tau_{61t}) \\
 & + \Gamma_{6t2} \Gamma_{6s1} \sin(\psi_r + \tau_{62t} + \tau_{61s}) + \sum_k \Gamma_{6s(k+3)} \Gamma_{6tk} \sin(\psi_r + \tau_{6(k+3)s} - \tau_{6kt}) \\
 & + \sum_k \Gamma_{6t(k+3)} \Gamma_{6sk} \sin(\psi_r + \tau_{6(k+3)t} - \tau_{6ks})] \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} [\Gamma_{6s1} \Gamma_{6t1} \Gamma_{6u1} \sin(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{61t} + \tau_{61u}) \\
 & + \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \sin(\psi_r - \tau_{63s} + \tau_{63t} + \tau_{63u}) \\
 & + \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \sin(\psi_r + \tau_{63s} - \tau_{63t} + \tau_{63u}) \\
 & + \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \sin(\psi_r + \tau_{63s} + \tau_{63t} - \tau_{63u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{ptj} \Gamma_{6u3} \sin(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{63u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{ptj} \Gamma_{6u3} \sin(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pjt} + \tau_{63u}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{ptj} \Gamma_{6t3} \sin(\psi_r - \tau_{pjs} + \tau_{pjt} + \tau_{63t})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{psj} \Gamma_{puj} \Gamma_{6t3} \sin(\psi_r + \tau_{pjs} - \tau_{pju} + \tau_{63t}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{pj} \Gamma_{puj} \Gamma_{6s3} \sin(\psi_r - \tau_{pjt} + \tau_{pju} + \tau_{63s}) \\
 & + \sum_p \sum_j \Gamma_{pj} \Gamma_{puj} \Gamma_{6s3} \sin(\psi_r + \tau_{pjt} - \tau_{pju} + \tau_{63s}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6jt} \Gamma_{6u(2j-3)} \sin(\psi_r + \tau_{6js} + \tau_{6jt} - \tau_{6(2j-3)u}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6sj} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6t(2j-3)} \sin(\psi_r + \tau_{6js} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-3)t}) \\
 & + \sum_{j=2} \Gamma_{6jt} \Gamma_{6uj} \Gamma_{6s(2j-3)} \sin(\psi_r + \tau_{6jt} + \tau_{6ju} - \tau_{6(2j-3)s})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_u \nu_{ru} \left[a_r^2 \Gamma_{6u3} \sin(\psi_r + \tau_{63u}) + \frac{1}{2} a_r^2 \Gamma_{6u3} \sin(-\psi_r - \tau_{63u}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_t \nu_{rt} \left[a_r^2 \Gamma_{6t3} \sin(\psi_r + \tau_{63t}) + \frac{1}{2} a_r^2 \Gamma_{6t3} \sin(-\psi_r - \tau_{63t}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_s \nu_{sr} \left[a_r^2 \Gamma_{6s3} \sin(\psi_r + \tau_{63s}) + \frac{1}{2} a_r^2 \Gamma_{6s3} \sin(-\psi_r - \tau_{63s}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{t,u} \nu_{rtu} \left[a_r \Gamma_{6t3} \Gamma_{6u3} \sin(2\psi_r + \tau_{63t} + \tau_{63u}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[a_r \Gamma_{6s3} \Gamma_{6u3} \sin(2\psi_r + \tau_{63s} + \tau_{63u}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,t} \nu_{str} \left[a_r \Gamma_{6s3} \Gamma_{6t3} \sin(2\psi_r + \tau_{63s} + \tau_{63t}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{t,u} \nu_{rtu} \left[\sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6t(6-k)} \Gamma_{6uk} \sin(2\psi_r + \tau_{6(6-k)t} + \tau_{6ku}) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6u(6-k)} \Gamma_{6tk} \sin(2\psi_r + \tau_{6(6-k)u} + \tau_{6kt}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[\sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6s(6-k)} \Gamma_{6uk} \sin(2\psi_r + \tau_{6(6-k)s} + \tau_{6ku}) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6u(6-k)} \Gamma_{6sk} \sin(2\psi_r + \tau_{6(6-k)u} + \tau_{6ks}) \right] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,t} \nu_{str} \left[\sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6s(6-k)} \Gamma_{6tk} \sin(2\psi_r + \tau_{6(6-k)s} + \tau_{6kt}) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1, k \neq 3}^5 a_r \Gamma_{6t(6-k)} \Gamma_{6sk} \sin(2\psi_r + \tau_{6(6-k)t} + \tau_{6ks}) \right] \tag{3-170}
 \end{aligned}$$

发生伺服电动机电磁参数激励作用下的超谐共振时,系统作定常运动的条件为



$$\dot{a}_r = \dot{\psi}_r = 0 \quad (3-171)$$

可以利用 Newton-Raphson 方法解出 a_r 和 ψ_r 。将所求得的 a_r 和 ψ_r 代入式(3-75), 不考虑内共振的系统超谐共振因子 $\nu_6 = \frac{1}{3}\omega_r$ 时, 得到伺服电动机电磁激励作用下的超谐共振一阶近似定常解为

$$\eta_{r,0} = a_r \cos(\omega_r T_0 - \psi_r) + \sum_{k=1}^m \sum_p F_{0prk} (\omega_r^2 - k^2 \nu_p^2)^{-1} \cos(\omega_r T_0 + \tau_{rpk}) + O(\varepsilon) \quad (3-172)$$

式中: $\nu_6 = \frac{1}{3}\omega_r + \varepsilon\sigma$ 。

由上述可知, 对于两自由度可控连杆机构系统, 当伺服电动机定子绕组旋转磁场旋转频率约为系统固有频率的 1/3 时, 系统会产生由伺服电动机电磁参数激励下的系统超谐共振现象, 并且超谐振频域响应幅值与伺服电动机电磁参数激励的幅值有关。

3.4.2.4 组合共振分析

两自由度可控连杆机构是一个多频振动系统, 由系统振动机理分析知, 当共振因子 $|\pm j\nu_p \pm k\nu_q| \approx \omega_r$ 或 $|\pm 2j\nu_p \pm k\nu_q| \approx \omega_r$ 时, 系统发生组合共振, 因此系统组合共振不仅包括外力、电磁激励和自激惯性力之间相互共同作用下的组合共振, 而且还包括两电动机定子绕组旋转磁场旋转引起的电动机电磁参数激励作用下的组合共振和两电动机转子转动引起的自激惯性力作用下的组合共振。这里对组合共振因子 $2\nu_6 + \nu_7 = 4\omega_{01} + 2\omega_{02} \approx \omega_r$ 时, 由伺服电动机电磁参数激励和三相交流电动机电磁参数激励共同作用下的组合共振进行分析。

这里不考虑电动机的静偏心 ($e_{01} = e_{02} = 0$) 和转动偏心 ($\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 0$), 并忽略外界对系统的干扰作用, 即外力 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 且不考虑系统内共振, 引入解谐参数 σ , 使

$$\begin{aligned} 2\nu_6 + \nu_7 &= \omega_r + \varepsilon\sigma \\ \sigma &= 0(1) \end{aligned} \quad (3-173)$$

将式(3-173)、式(3-75)代入式(3-74), 则其解不出现长期项的条件为

$$\begin{aligned} & - (2i\omega_r D_1 A_r + 2i\zeta_r \omega_r^2 A_r) - \alpha_r A_r + 3\nu_{rrr} \bar{A}_r A_r A_r \\ & + \sum_{s,t} \delta_{st} (\Lambda_{6s2} \Lambda_{7t1} + \Lambda_{6t2} \Lambda_{7s1}) \exp(i\sigma T_1) \\ & + \sum_{s,t,u} \nu_{stu} (\Lambda_{6s1} \Lambda_{6t1} \Lambda_{7u1} + \Lambda_{6s1} \Lambda_{6u1} \Lambda_{7t1} + \Lambda_{6t1} \Lambda_{6u1} \Lambda_{7s1}) \exp(i\sigma T_1) \\ & + \sum_{l,u} \nu_{rtu} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{pk} \bar{\Lambda}_{pk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{pk} \Lambda_{pk} \right) \\ & + \sum_{s,u} \nu_{sru} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{pk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{pk} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{s,t} \nu_{str} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \bar{\Lambda}_{psk} \Lambda_{ptk} + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 A_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{ptk} \right) \\
 & + \sum_{t,u} \nu_{rtu} (\bar{A}_r \Lambda_{6t4} \Lambda_{7u2} + \bar{A}_r \Lambda_{6u4} \Lambda_{7t2}) \exp(i2\sigma T_1) \\
 & + \sum_{s,u} \nu_{sru} (\bar{A}_r \Lambda_{6s4} \Lambda_{7u2} + \bar{A}_r \Lambda_{6u4} \Lambda_{7s2}) \exp(i2\sigma T_1) \\
 & + \sum_{s,t} \nu_{str} (\bar{A}_r \Lambda_{6s4} \Lambda_{7t2} + \bar{A}_r \Lambda_{6t4} \Lambda_{7s2}) \exp(i2\sigma T_1) \\
 & = 0 \tag{3-174}
 \end{aligned}$$

式中： α_r 、 ν_{stu} 可通过式(3-72)在 $e_{01} = e_{02} = 0$ 和 $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 0$ 时求得。

将式(3-76)和式(3-77)代入式(3-174)，经整理得

$$\begin{aligned}
 & - (i\omega_r \dot{a}_r - \omega_r a_r \dot{\theta}_r + i\zeta_r \omega_r^2 a_r) - \frac{1}{2} \alpha_r a_r + \frac{3}{8} \nu_{rrr} a_r^3 \\
 & + \sum_{s,t} \delta_{st} [\Gamma_{6s2} \Gamma_{7t1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{62s} + \tau_{71t}) + \Gamma_{p2} \Gamma_{qs1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{62t} + \tau_{71s})] \\
 & + \sum_{s,t,u} \nu_{stu} [\Gamma_{6s1} \Gamma_{6t1} \Gamma_{7u1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61s} + \tau_{61t} + \tau_{71u}) \\
 & + \Gamma_{6s1} \Gamma_{6u1} \Gamma_{7t1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61s} + \tau_{61u} + \tau_{71t}) \\
 & + \Gamma_{6t1} \Gamma_{6u1} \Gamma_{7s1} \exp i(\sigma T_1 - \theta_r + \tau_{61t} + \tau_{61u} + \tau_{71s})] \\
 & + \sum_{t,u} \nu_{rtu} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pkt} + \tau_{pku}) \right] \\
 & + \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pku}) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \right] \\
 & + \sum_{s,t} \nu_{str} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(-\tau_{pks} + \tau_{pkt}) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \frac{1}{2} a_r \Lambda_{psk} \bar{\Lambda}_{ptk} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \exp i(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \\
 & + \sum_{t,u} \nu_{rtu} \left[\frac{1}{2} a_r \Gamma_{6t4} \Gamma_{7u2} \exp i(2\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{64t} + \tau_{72u}) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} a_r \Gamma_{6u4} \Gamma_{7t2} \exp i(2\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{64u} + \tau_{72t}) \right] \\
 & + \sum_{s,u} \nu_{sru} \left[\frac{1}{2} a_r \Gamma_{6s4} \Gamma_{7u2} \exp i(2\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{64s} + \tau_{72u}) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} a_r \Gamma_{6u4} \Gamma_{7s2} \exp i(2\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{64u} + \tau_{72s}) \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{s,t} \nu_{str} \left[\frac{1}{2} a_r \Gamma_{6s4} \Gamma_{7t2} \exp i(2\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{64s} + \tau_{72t}) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} a_r \Gamma_{6t4} \Gamma_{7s2} \exp i(2\sigma T_1 - 2\theta_r + \tau_{64t} + \tau_{72s}) \right] \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3-175}$$

设

$$\psi_r = \sigma T_1 - \theta_r \tag{3-176}$$

将式(3-176)代入式(3-174)中,并将其实部与虚部分开,得

$$\begin{aligned}
 -a_r \dot{\psi}_r & = -a_r \sigma - \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r a_r + \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_r^3 \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \delta_{st} [\Gamma_{6s2} \Gamma_{7t1} \cos(\psi_r + \tau_{62s} + \tau_{71t}) + \Gamma_{6t2} \Gamma_{7s1} \cos(\psi_r + \tau_{62t} + \tau_{71s})] \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} [\Gamma_{6s1} \Gamma_{6t1} \Gamma_{7u1} \cos(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{61t} + \tau_{71u}) \\
 & + \Gamma_{6s1} \Gamma_{6u1} \Gamma_{7t1} \cos(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{61u} + \tau_{71t}) + \Gamma_{6t1} \Gamma_{6u1} \Gamma_{7s1} \cos(\psi_r + \tau_{61t} + \tau_{61u} + \tau_{71s})] \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} a_r \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} a_r \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{t,u} \nu_{rtu} [a_r \Gamma_{6t4} \Gamma_{7u2} \cos(2\psi_r + \tau_{64t} + \tau_{72u}) + a_r \Gamma_{6u4} \Gamma_{7t2} \cos(2\psi_r + \tau_{64u} + \tau_{72t})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,u} \nu_{sru} [a_r \Gamma_{6s4} \Gamma_{7u2} \cos(2\psi_r + \tau_{64s} + \tau_{72u}) + a_r \Gamma_{6u4} \Gamma_{7s2} \cos(2\psi_r + \tau_{64u} + \tau_{72s})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,t} \nu_{str} [a_r \Gamma_{6s4} \Gamma_{7t2} \cos(2\psi_r + \tau_{64s} + \tau_{72t}) + a_r \Gamma_{6t4} \Gamma_{7s2} \cos(2\psi_r + \tau_{64t} + \tau_{72s})]
 \end{aligned} \tag{3-177}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_r & = -\zeta_r \omega_r a_r + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \delta_{st} [\Gamma_{6s2} \Gamma_{7t1} \sin(\psi_r + \tau_{62s} + \tau_{71t}) + \Gamma_{6t2} \Gamma_{7s1} \sin(\psi_r + \tau_{62t} + \tau_{71s})] \\
 & + \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t,u} \nu_{stu} [\Gamma_{6s1} \Gamma_{6t1} \Gamma_{7u1} \sin(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{61t} + \tau_{71u}) \\
 & + \Gamma_{6s1} \Gamma_{6u1} \Gamma_{7t1} \sin(\psi_r + \tau_{61s} + \tau_{61u} + \tau_{71t}) + \Gamma_{6t1} \Gamma_{6u1} \Gamma_{7s1} \sin(\psi_r + \tau_{61t} + \tau_{61u} + \tau_{71s})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{t,u} \nu_{rtu} [a_r \Gamma_{6t4} \Gamma_{7u2} \sin(2\psi_r + \tau_{64t} + \tau_{72u}) + a_r \Gamma_{6u4} \Gamma_{7t2} \sin(2\psi_r + \tau_{64u} + \tau_{72t})] \\
 & + \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,u} \nu_{sru} [a_r \Gamma_{6s4} \Gamma_{7u2} \sin(2\psi_r + \tau_{64s} + \tau_{72u}) + a_r \Gamma_{6u4} \Gamma_{7s2} \sin(2\psi_r + \tau_{64u} + \tau_{72s})]
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\omega_r} \sum_{s,l} \nu_{sl} [a_r \Gamma_{6s4} \Gamma_{7l2} \sin(2\psi_r + \tau_{64s} + \tau_{72l}) + a_r \Gamma_{6l4} \Gamma_{7s2} \sin(2\psi_r + \tau_{64l} + \tau_{72s})] \quad (3-178)$$

发生伺服电动机电磁参数激励和三相交流电动机电磁参数激励共同作用下的组合共振时,系统作定常运动的条件为

$$\dot{a}_r = \dot{\psi}_r = 0 \quad (3-179)$$

可以利用 Newton-Raphson 方法解出 a_r 和 ψ_r 。将所求得的 a_r 和 ψ_r 代入式(3-75), 不考虑内共振的系统组合共振因子 $2\nu_6 + \nu_7 \approx \omega_r$ 时,得到伺服电动机电磁参数激励和三相交流电动机电磁参数激励共同作用下的组合共振一阶近似定常解为

$$\eta_{r0} = a_r \cos(\omega_r T_0 - \psi_r) + \sum_{k=1}^m \sum_p F_{0prk} (\omega_r^2 - k^2 \nu_p^2)^{-1} \cos(\omega_r T_0 + \tau_{pki}) + O(\varepsilon) \quad (3-180)$$

第4章 连杆机构的运动稳定性

第2章应用有限单元法建立了电动机-弹性连杆机构系统和混合驱动五杆机构系统的耦合动力学方程,该耦合动力学方程显含广义坐标向量的平方项和立方项,其中电磁参数激励和柔性构件大几何变形的非线性因素是产生平方非线性振动特征的主要原因,柔性构件大几何变形的非线性因素是产生立方非线性振动特征的主要原因。第3章在第2章所建立的耦合动力学方程的基础上,研究了系统在电磁参数激励下的参激振动机理及电磁参数激励和外激励联合作用下的参、强耦合振动机理。本章则在弹性连杆机构系统非线性振动分析的基础上,采用多自由度体系的动力稳定判别准则^[86,98],对系统的运动稳定性及电动机参数对机构动力学特性的影响等问题进行分析和研究。

对连杆机构系统而言,由于高阶谐和分量的衰减作用,系统高阶振型的共振效应不很明显,只剩下前几阶的共振效应,特别是当前几阶固有频率分布较稀疏时,第一阶振型会占主要地位^[16]。为保证简便而不失一般性,这里在分析系统非线性特性时仅考虑机构的前二阶振动模态。

4.1 主共振的运动稳定性分析

4.1.1 电动机-四连杆机构主共振的运动稳定性分析

这里研究3.5节中所讨论的系统存在内共振($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足主共振条件 $\Omega_0 \approx \omega_2$ 时的电磁参数激励下的主共振的运动稳定性问题。主共振的稳定性问题可以通过式(3-87)至式(3-90)的奇点性状来研究。

对于扰动运动, $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 分别表示为

$$\begin{cases} a_1 = a_{10} + a_{11} \\ a_2 = a_{20} + a_{21} \\ \gamma_1 = \gamma_{10} + \gamma_{11} \\ \gamma_2 = \gamma_{20} + \gamma_{21} \end{cases} \quad (4-1)$$

式中: $a_{10}, a_{20}, \gamma_{10}, \gamma_{20}$ 是方程组(3-91)的一组根值; $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 是所研究的稳态运动相对于 $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 的微小偏离值。

将式(4-1)代入式(3-87)至式(3-90),并展成微小量 $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 的级数,且保留线性项,则得到变分方程组

$$\begin{cases} a'_{11} = \theta_{11} a_{11} + \theta_{12} a_{21} + \theta_{13} \gamma_{11} + \theta_{14} \gamma_{21} \\ a'_{21} = \theta_{21} a_{11} + \theta_{22} a_{21} + \theta_{23} \gamma_{11} + \theta_{24} \gamma_{21} \\ \gamma'_{11} = \theta_{31} a_{11} + \theta_{32} a_{21} + \theta_{33} \gamma_{11} + \theta_{34} \gamma_{21} \\ \gamma'_{21} = \theta_{41} a_{11} + \theta_{42} a_{21} + \theta_{43} \gamma_{11} + \theta_{44} \gamma_{21} \end{cases} \quad (4-2)$$

该方程组的系数矩阵为

$$\theta_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{11}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{11}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{11}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{12}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{12}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{12}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{12}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{13}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{13}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{13}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{13}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{14}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{14}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{14}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{14}^0}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

式中：“0”表示偏导数，取值 $a_1 = a_{10}, a_2 = a_{20}, \gamma_1 = \gamma_{10}, \gamma_2 = \gamma_{20}$ 即满足式(3-91)的解。

若式(4-2)的系数矩阵的特征值全部在负实轴所在的平面上，则该主共振是稳定的；若有一个特征根在正实轴所在的平面上，则该主共振是不稳定的。显然，由于系数矩阵的特征值与系统的电磁参数和结构参数有关，因而主共振的稳定性不仅与结构参数有关，而且与电磁参数有关。

4.1.2 混合驱动五连杆机构主共振的运动稳定性分析

这里对3.5节中的混合驱动五杆机构在电动机电磁激励作用下的主共振的系统定常解的稳定性进行分析。为此设

$$\left. \begin{aligned} a_r &= a_{r0} + \delta a_r \\ \psi_r &= \psi_{r0} + \delta \psi_r \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

式中： a_{r0}, ψ_{r0} 是满足式(3-145)（或式(3-153)）、式(3-146)（或式(3-154)）和式(3-147)（或式(3-155)）的定常解。将式(4-4)代入式(3-145)和式(3-146)（或式(3-153)和式(3-155)），并只保留含 δa_r 和 $\delta \psi_r$ 的线性项，可得到奇点 (a_{r0}, ψ_{r0}) 附近的变分方程组



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(\delta a_r)}{dt} &= -\zeta_r \omega_r \delta a_r + a_{r0} \left[\frac{1}{2\omega_r} \alpha_r - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 - \sigma \right. \\ &\quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\ &\quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \delta \psi_r \\ \frac{d(\delta \psi_r)}{dt} &= \frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} \delta a_r - \zeta_r \omega_r \delta \psi_r \end{aligned} \right. \quad (4-5)$$

其系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{r0} \left[\frac{1}{2\omega_r} \alpha_r - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 - \sigma \right. \\ - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\ - \zeta_r \omega_r \\ - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\ - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \left. \right] \\ \frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} & \quad \quad \quad - \zeta_r \omega_r \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

稳定条件为

$$p \equiv -(C_1 + C_4) = 2\zeta_r \omega_r > 0 \quad (4-7)$$

及

$$\begin{aligned} q &\equiv (C_1 C_4 - C_2 C_3) \\ &= \zeta_r^2 \omega_r^2 - \frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 \left[\frac{1}{2\omega_r} \alpha_r - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 - \sigma - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \\ &> 0 \end{aligned} \quad (4-8)$$

式(3-144)中的 σ 可由式(3-145)、式(3-146)和式(3-147)及式(3-153)、式(3-154)和式(3-155)求得。

由式(4-7)可知,对于正阻尼, $p > 0$ 总是成立的,因此在此情况下,定常解的条件为 $q > 0$,因而,在电动机电磁激励作用下的主共振的系统定常解的稳定性不仅与其结构参数有关,而且与电动机电磁参数、双曲柄的运动参数即电动机运动参数和各激

励的相位角有关。

4.2 次谐共振的运动稳定性分析

4.2.1 电动机-四连杆机构次谐共振的运动稳定性分析

这里研究系统存在内共振情形($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足次谐共振条件 $\Omega_0 - \omega_2 \approx \omega_2$ 时的电磁参数激励下的1/2次谐共振情况下的运动稳定性问题。1/2次谐共振的稳定性问题可以通过式(3-99)至式(3-102)的奇点性状来研究。

对于扰动运动, $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 分别表示为

$$\begin{cases} a_1 = a_{10} + a_{11} \\ a_2 = a_{20} + a_{21} \\ \gamma_1 = \gamma_{10} + \gamma_{11} \\ \gamma_2 = \gamma_{20} + \gamma_{21} \end{cases} \quad (4-9)$$

式中: $a_{10}, a_{20}, \gamma_{10}, \gamma_{20}$ 是式(3-103)的一个根值; $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 是所研究的稳态运动相对于 $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 的微小偏离值。

将式(4-9)代入式(3-99)至式(3-102),并展成微小量 $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 的级数,且保留线性项,则得到变分方程组

$$\begin{cases} a'_{11} = \theta_{11}a_{11} + \theta_{12}a_{21} + \theta_{13}\gamma_{11} + \theta_{14}\gamma_{21} \\ a'_{21} = \theta_{21}a_{11} + \theta_{22}a_{21} + \theta_{23}\gamma_{11} + \theta_{24}\gamma_{21} \\ \gamma'_{11} = \theta_{31}a_{11} + \theta_{32}a_{21} + \theta_{33}\gamma_{11} + \theta_{34}\gamma_{21} \\ \gamma'_{21} = \theta_{41}a_{11} + \theta_{42}a_{21} + \theta_{43}\gamma_{11} + \theta_{44}\gamma_{21} \end{cases} \quad (4-10)$$

式(4-10)的系数矩阵为

$$\theta_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{21}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{21}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{21}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{21}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{22}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{22}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{22}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{22}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{23}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{23}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{23}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{23}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{24}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{24}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{24}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{24}^0}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

式中:“0”表示偏导数取值 $a_1 = a_{10}, a_2 = a_{20}, \gamma_1 = \gamma_{10}, \gamma_2 = \gamma_{20}$,即满足式(3-103)的解。

若式(4-10)的系数矩阵的特征值全部在负实轴所在的平面上,则该1/2次谐共振是稳定的;只要有一个特征根在正实轴所在的平面上,则该1/2次谐共振就是不稳



定的。显然,由于系数矩阵的特征值与系统的电磁参数和结构参数有关,因而 1/2 次谐共振的稳定性不仅与结构参数有关,而且与电磁参数有关。

4.2.2 混合驱动五连杆机构次谐共振的运动稳定性分析

这里对 3.4.2 节中的混合驱动五杆机构在自激惯性力作用下次谐共振的定常解的稳定性进行分析。为此设

$$\left. \begin{aligned} a_r &= a_{r0} + \delta a_r \\ \psi_r &= \psi_{r0} + \delta \psi_r \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

式中: a_{r0} 、 ψ_{r0} 是满足式(3-161)、式(3-162)和式(3-163)的定常解。将式(4-12)代入式(3-161)和式(3-162),并只保留含 δa_r 和 $\delta \psi_r$ 的线性项,可得到奇点 (a_{r0}, ψ_{r0}) 附近的变分方程组

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(\delta a_r)}{dt} &= -\zeta_r \omega_r \delta a_r + \left[\sigma a_{r0} + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r a_{r0} - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^3 \right. \\ &\quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u}^m \sum_{k=1}^8 \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} a_{r0} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\ &\quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u}^m \sum_{k=1}^8 \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} a_{r0} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t}^m \sum_{k=1}^8 \sum_{p=1}^8 \nu_{str} a_{r0} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \delta \psi_r \\ \frac{d(\delta \psi_r)}{dt} &= -\frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} \delta a_r - \zeta_r \omega_r \delta a_r \end{aligned} \right. \quad (4-13)$$

其系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{r0} \left[\sigma + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 \right. \\ - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u}^m \sum_{k=1}^8 \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\ - \zeta_r \omega_r \\ - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u}^m \sum_{k=1}^8 \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\ - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t}^m \sum_{k=1}^8 \sum_{p=1}^8 \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \left. \right] \\ - \frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} & - \zeta_r \omega_r \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

稳定条件为

$$p \equiv -(C_1 + C_4) = 2\zeta_r \omega_r > 0 \quad (4-15)$$

及

$$\begin{aligned}
 q &\equiv (C_1 C_4 - C_2 C_3) \\
 &= \zeta_r^2 \omega_r^2 + \frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 \left[\sigma + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \\
 &> 0 \tag{4-16}
 \end{aligned}$$

式(4-16)中的 σ 可联立式(3-161)、式(3-162)和式(3-163)求得。

由式(4-15)可知,对于正阻尼, $p > 0$ 总是成立的,因此在此情况下,系统定常解的条件为 $q > 0$,因而,系统在自激惯性力作用下次谐共振的定常解的稳定性不仅与其结构参数有关,而且还与电动机电磁参数、双曲柄的运动参数(即电动机运动参数)和系统阻尼比有关。

4.3 超谐共振的运动稳定性分析

4.3.1 电动机-四连杆机构超谐共振的运动稳定性分析

这里研究 3.4 节中所讨论的系统存在内共振情形($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足超谐共振条件 $L\Omega_1 \approx \omega_1$ 时的超谐共振情况下的运动稳定性问题。超谐共振的稳定性问题可以通过式(3-111)至式(3-114)的奇点性状来研究。

对于扰动运动, $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 分别表示为

$$\begin{cases} a_1 = a_{10} + a_{11} \\ a_2 = a_{20} + a_{21} \\ \gamma_1 = \gamma_{10} + \gamma_{11} \\ \gamma_2 = \gamma_{20} + \gamma_{21} \end{cases} \tag{4-17}$$

式中: $a_{10}, a_{20}, \gamma_{10}, \gamma_{20}$ 为所研究的稳态运动,它是式(3-115)的一个根值; $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 是所研究的稳态运动相对于 $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 的微小偏离值。

将式(4-17)代入式(3-111)至式(3-114),并展成微小量 $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 的级数,且保留线性项,则得到变分方程组

$$\begin{cases} a'_{11} = \theta_{11} a_{11} + \theta_{12} a_{21} + \theta_{13} \gamma_{11} + \theta_{14} \gamma_{21} \\ a'_{21} = \theta_{21} a_{11} + \theta_{22} a_{21} + \theta_{23} \gamma_{11} + \theta_{24} \gamma_{21} \\ \gamma'_{11} = \theta_{31} a_{11} + \theta_{32} a_{21} + \theta_{33} \gamma_{11} + \theta_{34} \gamma_{21} \\ \gamma'_{21} = \theta_{41} a_{11} + \theta_{42} a_{21} + \theta_{43} \gamma_{11} + \theta_{44} \gamma_{21} \end{cases} \tag{4-18}$$

式(4-18)的系数矩阵为



$$\theta_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{31}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{31}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{31}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{31}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{32}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{32}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{32}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{32}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{33}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{33}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{33}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{33}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{34}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{34}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{34}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{34}^0}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

式中：“0”表示偏导数取值 $a_1 = a_{10}, a_2 = a_{20}, \gamma_1 = \gamma_{10}, \gamma_2 = \gamma_{20}$ ，即满足式(3-115)的解。

若式(4-18)的系数矩阵的特征值全部在负实轴所在的平面上，则该超谐共振是稳定的；若有一个特征根在正实轴所在的平面上，则该超谐共振是不稳定的。显然，由于系数矩阵的特征值与系统的电磁参数和结构参数有关，因而超谐共振的稳定性不仅与结构参数有关，而且与电磁参数有关。

4.3.2 混合驱动五连杆机构超谐共振的运动稳定性分析

这里对3.4.2节中的混合驱动五杆机构在伺服电动机电磁参数激励作用下超谐共振的系统定常解的稳定性进行分析。为此设

$$\left. \begin{aligned} a_r &= a_{r0} + \delta a_r \\ \psi_r &= \psi_{r0} + \delta \psi_r \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

式中： a_{r0}, ψ_{r0} 是满足式(3-169)、式(3-170)和式(3-171)的定常解。将式(4-20)代入式(3-169)和式(3-170)，并只保留含 δa_r 和 $\delta \psi_r$ 的线性项，可得到奇点 (a_{r0}, ψ_{r0}) 附近的变分方程组

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(\delta a_r)}{dt} &= -\zeta_r \omega_r \delta a_r + \left[-3\sigma a_{r0} + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r a_{r0} - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^3 \right. \\ &\quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} a_{r0} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\ &\quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} a_{r0} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} a_{r0} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \delta \psi_r \\ \frac{d(\delta \psi_r)}{dt} &= \left(\frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} - \frac{1}{2\omega_r} \right) \delta a_r - \zeta_r \omega_r \delta \psi_r \end{aligned} \right. \quad (4-21)$$

其系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{r0} \left[-3\sigma + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 \right. \\ - \frac{1}{\omega_r} \sum_{l,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\ - \zeta_r \omega_r \\ - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\ - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,l} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \left. \right] \\ \frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} - \frac{1}{2\omega_r} & - \zeta_r \omega_r \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

稳定条件为

$$p \equiv - (C_1 + C_4) = 2\zeta_r \omega_r > 0 \quad (4-23)$$

及

$$\begin{aligned} q &\equiv (C_1 C_4 - C_2 C_3) \\ &= \zeta_r^2 \omega_r^2 + a_{r0} \left(\frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} - \frac{1}{2\omega_r} \right) \\ &\quad \cdot \left[-3\sigma + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 - \frac{1}{\omega_r} \sum_{l,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \right. \\ &\quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,l} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \\ &> 0 \end{aligned} \quad (4-24)$$

式中的 σ 可由式(3-169)、式(3-170)和式(3-171)求得。

由式(4-23)可知,对于正阻尼, $p > 0$ 总是成立的,因此在此情况下,系统有定常解的条件为 $q > 0$,因而,系统在伺服电动机电磁激励作用下超谐共振的定常解的稳定性不仅与其结构参数有关,而且与电动机电磁参数和系统阻尼比有关。

4.4 组合共振的运动稳定性分析

4.4.1 电动机-四连杆机构组合共振的运动稳定性分析

这里研究3.4节中所讨论的系统存在内共振情形($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足组合共振条件 $\Omega_0 - \omega_1 \approx \omega_2$ 时的组合共振情况下的运动稳定性问题。组合共振的稳定性问题可



以通过式(3-123)至式(3-126)的奇点性状来研究。

在扰动运动中, $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 分别表示为

$$\begin{cases} a_1 = a_{10} + a_{11} \\ a_2 = a_{20} + a_{21} \\ \gamma_1 = \gamma_{10} + \gamma_{11} \\ \gamma_2 = \gamma_{20} + \gamma_{21} \end{cases} \quad (4-25)$$

式中: $a_{10}, a_{20}, \gamma_{10}, \gamma_{20}$ 是式(3-127)的一组根值; $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 是所研究的稳态运动相对于 $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 的微小偏离值。

将式(4-25)代入式(3-123)至式(3-126), 并展成微小量 $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 的级数, 且保留线性项, 则得到变分方程组

$$\begin{cases} a'_{11} = \theta_{11}a_{11} + \theta_{12}a_{21} + \theta_{13}\gamma_{11} + \theta_{14}\gamma_{21} \\ a'_{21} = \theta_{21}a_{11} + \theta_{22}a_{21} + \theta_{23}\gamma_{11} + \theta_{24}\gamma_{21} \\ \gamma'_{11} = \theta_{31}a_{11} + \theta_{32}a_{21} + \theta_{33}\gamma_{11} + \theta_{34}\gamma_{21} \\ \gamma'_{21} = \theta_{41}a_{11} + \theta_{42}a_{21} + \theta_{43}\gamma_{11} + \theta_{44}\gamma_{21} \end{cases} \quad (4-26)$$

式(4-26)的系数矩阵为

$$\theta_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{41}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{41}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{41}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{41}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{42}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{42}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{42}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{42}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{43}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{43}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{43}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{43}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{44}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{44}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{44}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{44}^0}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

式中: “0”表示偏导数取值 $a_1 = a_{10}, a_2 = a_{20}, \gamma_1 = \gamma_{10}, \gamma_2 = \gamma_{20}$, 即满足式(3-128)的解。

若式(4-26)的系数矩阵的特征值全部在负实轴所在的平面上, 则该组合共振是稳定的; 若有一个特征根在正实轴所在的平面上, 则该组合共振是不稳定的。显然, 由于系数矩阵的特征值与系统的电磁参数和结构参数有关, 因而组合共振的稳定性不仅与结构参数有关, 而且与电磁参数有关。

4.4.2 混合驱动五连杆机构组合共振的运动稳定性分析

这里对 3.4.2 节中的混合驱动五杆机构在伺服电动机电磁参数激励和三相交流电动机电磁参数激励共同作用下的组合共振的定常解的稳定性进行分析。为此设

$$\left. \begin{aligned} a_r &= a_{r0} + \delta a_r \\ \psi_r &= \psi_{r0} + \delta \psi_r \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

式中: a_{r0}, ψ_{r0} 是满足式(3-174)、式(3-178)和式(3-179)的定常解。将式(4-28)代入式(3-174)和式(3-178), 并只保留含 δa_r 和 $\delta \psi_r$ 的线性项, 可得到奇点 (a_{r0}, ψ_{r0}) 附近的变分方程组

$$\begin{cases} \frac{d(\delta a_r)}{dt} = -\zeta_r \omega_r \delta a_r + \left[a_{r0} \sigma + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r a_{r0} - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^3 \right. \\ \quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} a_{r0} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\ \quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} a_{r0} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\ \quad \left. - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} a_{r0} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \delta \psi_r \\ \frac{d(\delta \psi_r)}{dt} = \left(\frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} - \frac{1}{2\omega_r} \right) \delta a_r - \zeta_r \omega_r \delta \psi_r \end{cases} \quad (4-29)$$

其系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[a_{r0} \sigma + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r a_{r0} - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^3 \right. \\ \quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} a_{r0} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \\ \quad - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} a_{r0} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \\ \quad \left. - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} a_{r0} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \right] \\ - \zeta_r \omega_r \\ \frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} - \frac{1}{2\omega_r} & - \zeta_r \omega_r \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

稳定条件为

$$p \equiv -(C_1 + C_4) = 2\zeta_r \omega_r > 0 \quad (4-31)$$

及

$$\begin{aligned} q &\equiv (C_1 C_4 - C_2 C_3) \\ &= \zeta_r^2 \omega_r^2 + a_{r0} \left(\frac{3}{4\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0} - \frac{1}{2\omega_r} \right) \\ &\quad \cdot \left[\sigma + \frac{1}{2\omega_r} \alpha_r - \frac{3}{8\omega_r} \nu_{rrr} a_{r0}^2 - \frac{1}{\omega_r} \sum_{t,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{rtu} \Gamma_{ptk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pkt} - \tau_{pku}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,u} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{sru} \Gamma_{psk} \Gamma_{puk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pku}) \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -\tau_{pku}) - \frac{1}{\omega_r} \sum_{s,t} \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^8 \nu_{str} \Gamma_{psk} \Gamma_{ptk} \cos(\tau_{pks} - \tau_{pkt}) \Big] \\
 & > 0
 \end{aligned} \tag{4-32}$$

式中的 σ 可由式(3-177)、式(3-178)和式(3-179)求得。

由式(4-31)可知,对于正阻尼, $p > 0$ 总是成立的,因此在此情况下,系统有定常解的条件为 $q > 0$,因而,系统在双电动机电磁激励作用下组合共振的定常解的稳定性不仅与其结构参数有关,而且还与电动机电磁参数、系统阻尼比和各激励的相位角有关。

4.5 多重共振的运动稳定性分析

这里研究 3.4 节中所讨论的系统在存在内共振($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足组合共振条件 $\Omega_0 - \Omega_1 - \omega_1 \approx \omega_1$ 和超谐共振条件 $8\Omega_1 \approx \omega_1$ 时的多重共振的运动稳定性问题。多重共振的稳定性问题可以通过式(3-135)至式(3-138)的奇点性状来研究。

对于扰动运动, $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 分别表示为

$$\begin{cases} a_1 = a_{10} + a_{11} \\ a_2 = a_{20} + a_{21} \\ \gamma_1 = \gamma_{10} + \gamma_{11} \\ \gamma_2 = \gamma_{20} + \gamma_{21} \end{cases} \tag{4-33}$$

式中: $a_{10}, a_{20}, \gamma_{10}, \gamma_{20}$ 是式(3-139)的一组根值; $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 是所研究的稳态运动相对于 $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ 的微小偏离值。

将式(4-33)代入式(3-135)至式(3-138),并展成微小量 $a_{11}, a_{21}, \gamma_{11}, \gamma_{21}$ 的级数,且保留线性项,则得到变分方程组

$$\begin{cases} a'_{11} = \theta_{11} a_{11} + \theta_{12} a_{21} + \theta_{13} \gamma_{11} + \theta_{14} \gamma_{21} \\ a'_{21} = \theta_{21} a_{11} + \theta_{22} a_{21} + \theta_{23} \gamma_{11} + \theta_{24} \gamma_{21} \\ \gamma'_{11} = \theta_{31} a_{11} + \theta_{32} a_{21} + \theta_{33} \gamma_{11} + \theta_{34} \gamma_{21} \\ \gamma'_{21} = \theta_{41} a_{11} + \theta_{42} a_{21} + \theta_{43} \gamma_{11} + \theta_{44} \gamma_{21} \end{cases} \tag{4-34}$$

式(4-34)的系数矩阵为

$$\theta_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{51}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{51}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{51}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{51}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{52}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{52}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{52}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{52}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{53}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{53}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{53}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{53}^0}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial f_{54}^0}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{54}^0}{\partial a_2} & \frac{\partial f_{54}^0}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial f_{54}^0}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

式中：“0”表示偏导数取值 $a_1 = a_{10}$ 、 $a_2 = a_{20}$ 、 $\gamma_1 = \gamma_{10}$ 、 $\gamma_2 = \gamma_{20}$ ，即满足式(3-140)的解。

若式(4-35)的系数矩阵的特征值全部在负实轴所在的平面上，则该多重共振是稳定的；若有一个特征根在正实轴所在的平面上，则该多重共振是不稳定的。显然，由于系数矩阵的特征值与系统的电磁参数和结构参数有关，因而多重共振的稳定性不仅与结构参数有关，而且与电磁参数有关。

第5章 振动响应的仿真计算

大多数学者应用有限元方法对连杆机构进行分析,所得到的动力学模型都是一个周期系数时变线性二阶微分方程组。目前,对该方程组的求解方法主要是瞬时结构假设下的模态分析法^[17,99]、周期系统下求稳态解的傅里叶级数法^[100]和直接数值积分法^[16,101]。

由机构系统的动力学模型推导过程可以知道,连杆机构系统是周期系数时变非线性振动系统。当采用数值分析的方法对其进行分析^[42]时,尽管能很好地描述该类机构系统的动力学特性,但却难以分析这些动力学特性出现的原因及其与机构内部特性参数和电磁参数之间的关系。也就是说,采用数值分析方法很难对机构系统的本质特性进行较为深入的研究,这一点已被国内学者所注意到。因此,要对电动机-弹性连杆机构系统内部特性进行深入研究,采用具有近似性的摄动法较为合适。

在各种摄动法的实际应用中,通常只采取一次近似,这是因为许多振动问题的定性特点,一般由一次近似就可以揭示出,采用二次(或高次)近似从定性观点来看,通常并不一定能得到任何新的结果,只是在定量的意义上,可取得更高阶的精确度,但计算的复杂程度和工作量将大大增加。王玉新用非线性摄动法研究了弹性连杆机构在自激惯性力作用下的响应的一次近似解^[102]。

为了既能深入研究连杆机构系统的动力学特性,又能在定量计算中取得较高的精确度,笔者在充分考虑摄动法和数值分析法特点的基础上,采用了既能用来深入研究系统的动力学特性,又能获得所需精确度的动力学响应的方法——迭代式模态叠加多尺度法和多尺度-Newmark法。

5.1 利用迭代式模态叠加多尺度法的求解过程

5.1.1 迭代式模态叠加多尺度法的定义

为了既能深入研究电动机-弹性连杆机构系统的动力学特性,又能求得所需精确度的动力学响应,有必要采用一种既能利用摄动法特点,又能利用数值分析法特点的混合法。为此,笔者提出了一种迭代式模态叠加多尺度法^[103]。这种迭代式模态叠加多尺度法可定义为:首先利用多尺度法求解系统动力学方程的一次近似解,然后将该一次近似解作为系统广义坐标初值,利用迭代式模态叠加法求出系统动态响应精确解的方法。

5.1.2 四连杆机构系统动态方程一次近似解的计算

这里利用多尺度法求电动机-弹性四杆机构系统动力学方程的一次近似解。

为不失一般性,这里对系统存在内共振($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足组合共振条件 $\Omega_0 - \Omega_1 - \omega_1 \approx \omega_1$ 和超谐共振条件 $8\Omega_1 \approx \omega_1$ 时的多重共振情况进行分析(不考虑外力作用)。由于机构系统主要受前几阶振动模态的影响^[16],因而在求解该动力学方程一次近似解时主要考虑机构系统的前两阶振动模态。

利用多尺度法,求得式(3-54)的一阶近似解见式(3-140),然后利用式(3-53)将各阶模态响应叠加,得到电动机-弹性连杆机构系统动力学方程的原始广义坐标的一阶近似解为

$$U = \sum_{r=1}^2 \eta_r \phi^{(r)} \quad (5-1)$$

5.1.3 四连杆机构系统稳态弹性运动精确解的计算

这里利用迭代式模态叠加法求电动机-弹性连杆机构系统稳态弹性运动精确解。

将机构在一个周期内的运动离散化,均匀分成 n 个位置节点(每隔 $\Delta\varphi_1 = \frac{360^\circ}{n}$ 设置一个位置节点)。研究表明^[16],当曲柄和连杆之间的夹角分别为 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 时,由一阶固有频率引起的电动机转动角速度恰好为零值,因而可将曲柄和连杆之间的夹角为 0° 时的位置定为初始位置,即为节点 1,显然此处的角速度为 $\dot{\varphi}_{11} = \Omega_1$ (Ω_1 为电动机的平均转速);其他各节点依次为节点 2,节点 3, ..., 节点 i , ..., 节点 n ; 与各节点对应的时间依次为 $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$; 与各节点对应的角速度依次为 $\dot{\varphi}_{11}, \dot{\varphi}_{12}, \dots, \dot{\varphi}_{1i}, \dots, \dot{\varphi}_{1n}$; 与各节点对应的角加速度依次为 $\ddot{\varphi}_{11}, \ddot{\varphi}_{12}, \dots, \ddot{\varphi}_{1i}, \dots, \ddot{\varphi}_{1n}$ 。且定义节点 1 处的时间 $t_1 = 0$ 。当 n 足够大,即离散区间 $[i, i+1]$ 足够小时,可将机构在该离散区间内的运动视为角加速度为 $\ddot{\varphi}_{1i}$ 的匀角加速度运动。

机构在每一个离散位置上的质量矩阵 M 、刚度矩阵 K 及 $G_p, G_{kl}, K_{\mu p}, K_{\mu kl}$ 可依据式(2-138)求得, K_{11}, K_{12}, K_{13} 可依据式(3-44)求得, $U_{e1}, K_{e1}, K_{e2}, K_{e3}$ 可依据式(3-31)求得,因而可将它们视为已知量。以 3.3.1 节中采用式(3-53)至式(3-64)所求出的系统广义坐标列阵的一阶近似解 $U(t_i)$ 作为系统广义坐标初值,利用式(3-45)逐次地在机构各个离散位置上应用迭代法进行迭代,即可求出系统在一个运动周期内的稳态弹性运动解 U 的精确值以及电动机的真实转速 $\dot{\varphi}_{1i}$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_{1i}$,直至满足精度为止。

根据前面的分析,在机构的第 i 个瞬时位置上,构造的迭代格式如下:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ \dot{\varphi}_{11} &= \Omega_1 \end{aligned}$$



$$\ddot{\varphi}_{1i}^{(1)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{(j+1)}(t_i) + \mathbf{K}\mathbf{U}^{(j+1)}(t_i) \\ = & \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{Dki} + \varepsilon \left[-\frac{(1-s_i)g_{21}}{J_0} \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}_{\varepsilon 1}^T \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \right. \\ & - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}^{(j)T}(t_i) \mathbf{K}_{\varepsilon 1} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}^{(j)T}(t_i) \mathbf{K}_{\varepsilon 2} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \cos(\Omega_0 t_i) \\ & - \mathbf{M}\mathbf{U}_\varepsilon \mathbf{U}^{(j)T}(t_i) \mathbf{K}_{\varepsilon 3} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \sin(\Omega_0 t_i) - \mathbf{K}_{11} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \\ & - \mathbf{K}_{12} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \cos(\Omega_0 t) - \mathbf{K}_{13} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \sin(\Omega_0 t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{(j)}(t_i) \\ & + \sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^{(j)T}(t_i) \mathbf{G}_p \mathbf{K}_{\mu p} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^8 \mathbf{U}^{(j)T}(t_i) \mathbf{K}_{\mu p} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \mathbf{G}_p \\ & + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{U}^{(j)T}(t_i) \mathbf{G}_{kl} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \mathbf{K}_{\mu kl} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{G}_{kl} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \mathbf{U}^{(j)T}(t_i) \mathbf{K}_{\mu kl} \mathbf{U}^{(j)}(t_i) \right] \end{aligned} \quad (5-2)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad j = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{1i}^{(j+1)} = & \frac{(1-s_i)g_{21}}{J_0} + \mathbf{U}_{\varepsilon 1}^T \mathbf{U}^{(j+1)}(t_i) + \mathbf{U}^{(j+1)T}(t_i) \mathbf{K}_{\varepsilon 1} \mathbf{U}^{(j+1)}(t_i) \\ & + \mathbf{U}^{(j+1)T}(t_i) \mathbf{K}_{\varepsilon 2} \mathbf{U}^{(j+1)}(t_i) \cos(\Omega_0 t_i) + \mathbf{U}^{(j+1)T}(t_i) \mathbf{K}_{\varepsilon 3} \mathbf{U}^{(j+1)}(t_i) \sin(\Omega_0 t_i) \end{aligned} \quad (5-3)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad j = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\dot{\varphi}_{1i} = \sqrt{\dot{\varphi}_{1(i-1)}^2 + 2\ddot{\varphi}_{1(i-1)}\Delta\varphi_1} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (5-4)$$

$$t_i = t_{(i-1)} + \frac{\dot{\varphi}_{1i} - \dot{\varphi}_{1(i-1)}}{\ddot{\varphi}_{1(i-1)}} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (5-5)$$

$$s_i = \frac{\omega_0 - \dot{\varphi}_{1i}}{\omega_0} \quad (5-6)$$

$$n_1 U_s I_s \cos\theta = n_1 I_0^2 R_m + n_1 I_s^2 R_s + n_1 \frac{R'_r}{s_i} I_r'^2 + E_2 I_2 U_6 \dot{\varphi}_{1i} \quad (5-7)$$

其中,式(5-7)为电动机的功率平衡方程,其右侧最后一项为电动机转子轴输出功率, U_6 为广义坐标向量 $\mathbf{U}^{(j+1)}(t_i)$ 的第六坐标,它表示曲柄根部弹性变形的曲率, E_2, I_2 的含义参见式(3-28); U_s 为电动机定子相电压, I_s, I_r 分别为定、转子电流, I_r' 为转子的换算电流, I_0 为励磁电流, R_s, R_r 分别为定、转子电阻, R'_r 为转子的换算电阻, R_m 为励磁电阻, n_1 为定子的相数, θ 为功率因数角。

综上所述,利用迭代式模态叠加多尺度法求电动机-弹性连杆机构系统稳态弹性运动精确解的计算步骤如下。

(1) 对机构进行刚体运动分析,得到对应于机构各个离散位置上的 $U_\omega(\varphi_{li})$, $U_\varepsilon(\varphi_{li})$ 。

(2) 利用多尺度法求出系统的广义坐标列阵的一阶近似解 $U(t_i)$,并以该一阶近似解 $U(t_i)$ 作为广义坐标初值,即 $U^{(1)}(t_i) = U(t_i)$ 。

(3) 利用式(5-2)至式(5-5)求出第 i 个离散位置上系统稳态弹性运动的解 $U^{(j+1)}(t_i)$ 及相关运动参数。

(4) 利用式(5-6)、式(5-7)及电机学知识^[96]计算相关电磁参数。

(5) 判断所得值是否满足精度控制公式,即

$$\left| \frac{U_r^{(j+1)} - U_r^{(j)}}{U_r^{(j)}} \right| \leq \varepsilon \quad (5-8)$$

式中: $U_r^{(j)}$ 是系统在第 i 个离散位置上的第 r 个广义坐标; ε 为预先给定的小值参数。

如果不满足精度控制公式,则转入第(3)步;如果满足精度控制公式,则所得到的 $U^{(j+1)}(t_i)$ 即为所求的最后结果。

用迭代式模态叠加多尺度法计算电动机-弹性连杆机构系统稳态弹性运动精确解的程序框图如图5-1所示。

5.2 利用多尺度-Newmark 法的求解过程

5.2.1 多尺度-Newmark 法的定义

为了既能深入研究两自由度弹性连杆机构机电系统的动态性能,又能在定量计算中得到系统由任一时刻、任一位置开始计时的无条件稳态解,结合隐式 Newmark 法^[104],在 Newmark 参数取具体数值的情况下能够得到无条件稳态解这一特征,特介绍一种对此类机电系统的动态响应进行求解的有效方法——多尺度-Newmark 法^[70]。

首先利用多尺度法求解 t 时刻系统动力学响应的一次近似解,然后将该一阶近似解作为系统广义坐标初值,利用直接积分隐式 Newmark 法求解其 t 时刻计时的稳态动态响应的方法,称为多尺度-Newmark 法。

5.2.2 五连杆机构系统动态方程一次近似求解

这里利用多尺度法求两自由度弹性连杆机构系统动力学方程的一次近似解。为不失一般性,对组合共振因子 $2v_6 + v_7 = 4\omega_{01} + 2\omega_{02} \approx \omega_r$ 时,在伺服电动机电磁参数激励和三相交流电动机电磁参数激励共同作用下的组合共振进行分析(不考虑外力作用)。由于机构系统主要受前几阶振动模态的影响,因而在求解该动力学方程一阶近似解时主要考虑机构系统的前二阶振动模态。

利用多尺度法,求得式(3-69)的一阶近似解(见式(3-180)),然后利用式(3-53)

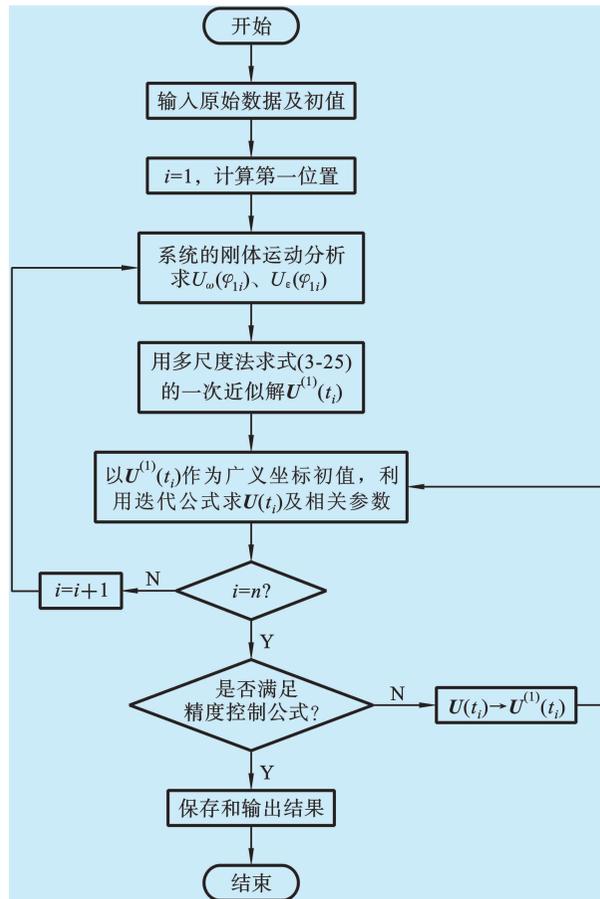


图 5-1 程序框图

将各阶模态响应叠加,得到电动机-弹性连杆机构系统动力学方程的原始广义坐标的一阶近似解:

$$U = \sum_{r=1}^2 \eta_r \phi^{(r)} \quad (5-9)$$

5.2.3 五连杆机构系统动态方程稳态解

为尽可能求得非线性动态方程的稳定解,采用 Newmark 法进行计算。因为 Newmark法在参数 ζ 和 θ 取具体数值的情况下是无条件稳定的,所以求得的解也是稳定的。

首先将系统运动周期 T 均匀划分为 m 个时间段 Δt ,利用多尺度法求解得到系统动力学响应的一阶近似解,将系统运动在任意瞬时 t 时刻的一阶近似解作为 Newmark 法计算初值,再利用直接积分隐式 Newmark 法,求其动态响应。所求动态响应即为

系统自 t 时刻开始计算的一周期内的动态响应。

在利用 Newmark 法求解时,系统前后时刻的响应采用以下假设:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + [(1 - \zeta)\ddot{\mathbf{u}}_t + \zeta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (5-10)$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\ddot{\mathbf{u}}_t + \theta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \quad (5-11)$$

式中:常数 ζ 和 θ 为 Newmark 参数,称为积分常数,且 $\zeta \geq 0.5, \theta \geq 0.25(0.5 + \zeta)^2$ 。

由于动态系统为时变系统,在 $t + \Delta t$ 时刻,可控连杆机构系统动态方程为

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}_{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + [\mathbf{K}_{t+\Delta t} + (\mathbf{K}_0)_{t+\Delta t}]\mathbf{u}_{t+\Delta t} \\ = & \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{M}_{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}_r - (\mathbf{K}_{11}^e + \mathbf{K}_{12}^e + \mathbf{K}_{21}^e + \mathbf{K}_{22}^e)_{t+\Delta t}\mathbf{e} - (\mathbf{K}_0)_{t+\Delta t} + \varepsilon \left[\sum_{n=1}^8 \mathbf{u}_{t+\Delta t}^T (\mathbf{G}_n \mathbf{K}_n)_{t+\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 \mathbf{u}_{t+\Delta t}^T (\mathbf{K}_n)_{t+\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} (\mathbf{G}_n)_{t+\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{u}_{t+\Delta t}^T (\mathbf{G}_{kl})_{t+\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{kl})_{t+\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l (\mathbf{G}_{kl})_{t+\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t}^T (\mathbf{K}_{kl})_{t+\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} \right] \quad (k, l = 2, 3, 4, 6, 7, 8) \end{aligned} \quad (5-12)$$

由式(5-11)计算得到 $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$,然后将 $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ 代入式(5-12),即可得到以 \mathbf{u}_t 、 $\dot{\mathbf{u}}_t$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}_t$ 表示的 $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ 。其计算精度与划分的时间段数 m 值的大小有关。

5.3 实例分析

对于四连杆机构系统,采用迭代式振型叠加-多尺度法进行仿真计算;对于五连杆机构系统,采用多尺度-Newmark 法进行仿真计算。

5.3.1 含金属构件的四连杆系统

这里以图 2-15 所示电动机-弹性四连杆机构系统为例进行仿真计算。其中:电动机为 YS8024 型微型电动机;连杆机构构件的材料均为铝,其密度 $\rho = 2\ 700\ \text{kg/m}^3$,弹性模量 $E = 7.0 \times 10^{10}\ \text{Pa}$ 。各构件的几何参数如下:

- 曲柄 长 \times 宽 \times 高——210 mm \times 30 mm \times 4 mm
- 连杆 长 \times 宽 \times 高——590 mm \times 30 mm \times 4 mm
- 摇杆 长 \times 宽 \times 高——430 mm \times 30 mm \times 4 mm
- 机架 长——600 mm

当考虑电动机对连杆机构的影响时,由于电动机的同步转速 $\omega_0 = 25\ \text{Hz}$,由式(3-26)可得, $\Omega_0 = 50\ \text{Hz}$ 。

由于系统的固有频率随着曲柄位置的不同而呈周期性变化,因而有必要计算出系统在不同位置时的固有频率。表 5-1 为电动机-四连杆机构系统在离散区间数为 n



=72 时各个位置的前二阶固有频率,其中: n 为曲柄位置数; φ_1 为曲柄角度; ω_{1n} 、 ω_{2n} 分别为系统在位置 n 处的一阶固有频率和二阶固有频率。

图 5-2 和图 5-3 所示分别为系统的一阶固有频率与曲柄位置的关系曲线和系统的二阶固有频率与曲柄位置的关系曲线。

表 5-1 四连杆机构系统的前两阶固有频率

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi_1/(\circ)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
ω_{1n}/Hz	22.3	22.9	24.0	24.6	25.1	25.9	26.2	26.1	26.0	25.5	25.0	24.7
ω_{2n}/Hz	42.5	42.6	43.0	44.2	45.7	46.4	48.3	48.7	48.2	47.0	46.4	45.9
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\varphi_1/(\circ)$	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
ω_{1n}/Hz	24.1	23.5	23.2	22.8	22.6	22.2	21.9	21.7	21.7	21.6	21.6	21.6
ω_{2n}/Hz	45.1	44.5	44.1	43.8	43.5	43.1	42.8	42.6	42.6	42.5	42.5	42.5
n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\varphi_1/(\circ)$	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175
ω_{1n}/Hz	21.6	21.7	21.8	22.0	22.2	22.4	22.6	22.9	23.2	23.6	24.0	24.3
ω_{2n}/Hz	42.6	42.8	42.8	43.1	43.3	43.5	43.8	44.1	44.5	44.9	45.3	45.7
n	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
$\varphi_1/(\circ)$	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235
ω_{1n}/Hz	24.6	24.9	25.2	25.4	25.6	25.8	25.9	26.0	26.1	26.1	26.0	26.0
ω_{2n}/Hz	46.2	46.6	47.1	47.5	47.8	48.2	48.4	48.2	48.0	47.7	47.3	47.0
n	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$\varphi_1/(\circ)$	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295
ω_{1n}/Hz	26.0	26.0	25.9	25.7	25.4	25.3	25.0	24.5	24.0	23.5	22.8	22.4
ω_{2n}/Hz	46.6	46.2	45.8	45.5	45.3	44.9	44.7	44.4	44.3	44.1	44.0	43.8
n	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
$\varphi_1/(\circ)$	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355
ω_{1n}/Hz	21.7	21.2	20.7	20.3	20.1	19.8	19.6	19.6	19.8	20.4	20.8	21.1
ω_{2n}/Hz	43.7	43.6	43.5	43.3	43.2	43.0	42.9	42.7	42.6	42.6	42.6	42.7

经计算,该系统的前二阶固有频率的平均值分别为: $\omega_1 = 23.5 \text{ Hz}$, $\omega_2 = 44.5 \text{ Hz}$ 。显然,此时机构系统不仅满足内共振条件 $\omega_2 \approx 2\omega_1$,而且还满足一阶模态的超谐共振条件 $8\Omega_1 \approx \omega_1$ 和一阶模态的组合共振条件 $\Omega_0 - \Omega_1 - \omega_1 \approx \omega_1$ 。也就是说,此时系统处于存在内共振($\omega_2 \approx 2\omega_1$)且满足组合共振条件 $\Omega_0 - \Omega_1 - \omega_1 \approx \omega_1$ 和超谐共振条件 $8\Omega_1$

$\approx \omega_1$ 的多重共振下。又由于连杆的自由振动频率接近于系统的一阶固有频率 ω_1 , 因而该多重共振现象主要反应在连杆上。这里计算连杆中点处的动态响应, 为保证计算精度, 在计算时预先给定小值参数 $\varepsilon = 0.01$ 。

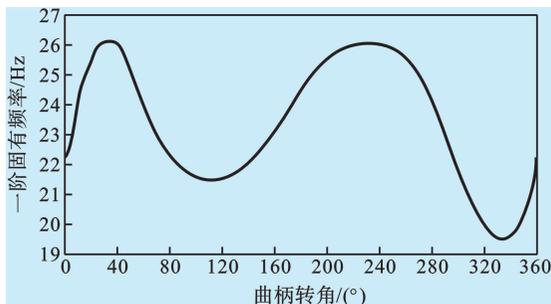


图 5-2 系统的一阶固有频率与曲柄位置的关系曲线

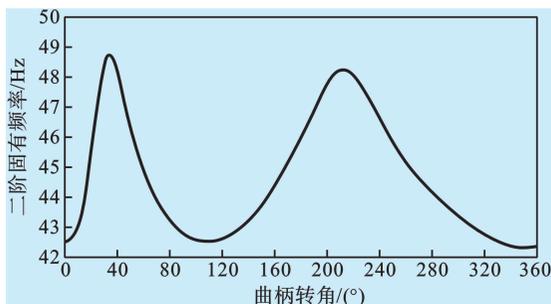


图 5-3 系统的二阶固有频率与曲柄位置的关系曲线

图 5-4 所示为考虑电动机影响且电动机转子转动偏心 ($e_0 \approx 0$)、电动机转速 $\Omega_1 = 177 \text{ r/min}$ ($\omega_1 = 2.95 \text{ Hz}$) 时连杆中点的时域响应特性仿真曲线 (一个运动周期) 和频域响应特性仿真曲线。此时电动机的定子相电压 $U_s = 45 \text{ V}$, 定子电流 $I_s = 1.38 \text{ A}$ 。

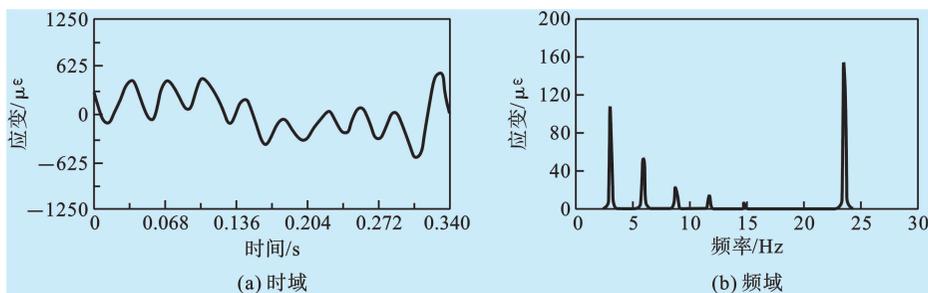


图 5-4 考虑电动机影响时连杆中点动态特性的仿真曲线 ($e_0 \approx 0$)

图 5-5 所示为考虑电动机影响且电动机转子转动偏心 ($e_0 = 0.375 \text{ mm}$)、电动机转速 $\Omega_1 = 177 \text{ r/min}$ ($\omega_1 = 2.95 \text{ Hz}$) 时连杆中点的时域响应特性的仿真曲线 (一个运

动周期)和频域响应特性的仿真曲线。此时电动机的定子相电压 $U_s = 29 \text{ V}$, 定子电流 $I_s = 1.11 \text{ A}$ 。

图 5-6 所示为不考虑电动机影响且曲柄以转速 $\Omega_1 = 177 \text{ r/min}$ ($\omega_1 = 2.95 \text{ Hz}$) 等速运动时连杆中点的时域响应特性的仿真曲线(一个运动周期)和频域响应特性的仿真曲线。

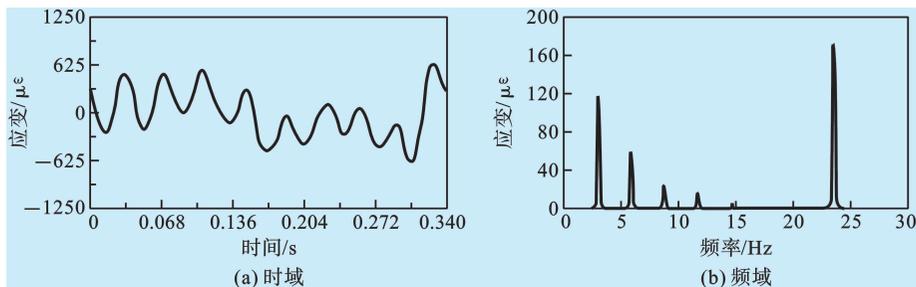


图 5-5 考虑电动机影响时连杆中点动态特性的仿真曲线($e_0 = 0.375 \text{ mm}$)

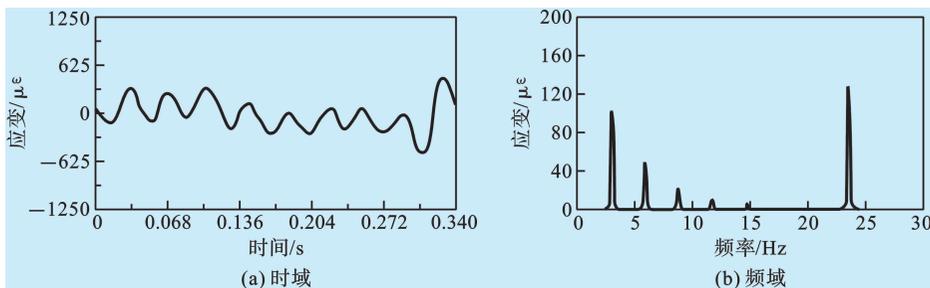


图 5-6 不考虑电动机影响时连杆中点动态特性的仿真曲线

将图 5-4 至图 5-6 相互比较可知,图 5-6 所示的时域曲线和频域曲线的幅值要明显小于图 5-4 和图 5-5 所示的相应曲线的幅值,这说明含电动机的机构的应变在整个周期内都较未计及电动机的机构的应变大;而图 5-4 所示的时域曲线和频域曲线的幅值要略小于图 5-5 所示的相应曲线的幅值,这说明存在转动偏心时电动机对机构动态响应的影响要比不存在转动偏心时电动机对机构动态响应的影响大一些。以连杆中点的时域曲线的应变为代表进行分析:含存在转动偏心且 $e_0 \approx 0$ 的电动机时机器的最大应变比不含电动机时机器的最大应变增加了约 16%,含存在转动偏心且 $e_0 = 0.375 \text{ mm}$ 的电动机时机器的最大应变比不含电动机时机器的最大应变增加了约 28%。

5.3.2 含叠层复合材料构件的弹性四杆机构系统

这里以图 2-15 所示电动机-含叠层复合材料构件的弹性四连杆机构系统为例进行仿真计算。电动机及含叠层复合材料构件的弹性四连杆机构的参数如下。

• 电动机参数

驱动电动机选用型号为 YS8024 的电动机。电动机电磁参数如下:额定功率 $P_N = 0.75 \text{ kW}$;额定电流 $I_N = \frac{3.48}{2.01} \text{ A}$;额定电压 $U = \frac{220}{380} \text{ V}$;气隙长度 $\delta_0 = 0.25 \text{ mm}$;空气磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$;饱和度 $k_u = 1.2$;合成磁场的磁极对数 $p = 2$;定子相数 $n_1 = 3$;转子相数 $n_2 = \frac{1}{2}$;定子线圈绕组匝数 $W_1 = 824$;转子导体条数 $W_2 = 1$;定子线圈绕组系数 $K_{W1} = 0.966$;转子线圈绕组系数 $K_{W2} = 1$;转子额定滑差率 $s_N = 0.0713$;转矩过载倍数 $\lambda_N = 2.2$;额定转速 $n_N = 1440 \text{ r/min}$;转子质量 $m_0 = 2.93 \text{ kg}$;转子的转动惯量 $J_0 = 0.021 \text{ kg} \cdot \text{m}$;电动机同步转速 $\omega_0 = 25 \text{ Hz}$ 。

• 弹性四连杆机构参数

l 、 b 、 h 分别是各杆件的长度、宽度和厚度,各杆件的截面参数为 $b = 32 \text{ mm}$ 、 $h = 4.8 \text{ mm}$,曲柄 $L_1 = 260 \text{ mm}$,连杆 $L_2 = 590 \text{ mm}$,摇杆 $L_3 = 430 \text{ mm}$,机架 $L_4 = 620 \text{ mm}$ 。

连杆机构构件的材料为玻璃纤维/不饱和聚酯树脂叠层复合材料,单层厚度为 0.8 mm ,层数 $l = 6$ 。材料的性能参数: $E_1 = 38 \times 10^9 \text{ Pa}$ 、 $E_2 = 12 \times 10^9 \text{ Pa}$ 、 $G_{12} = 9 \times 10^9 \text{ Pa}$,主泊松比 $\nu_{12} = 0.24$,玻璃纤维密度为 $\rho_f = 2.55 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,基体密度为 $\rho_m = 1.13 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,纤维体积比为 $\nu_f = 0.5$,阻尼损耗因子为 $\psi_1 = 0.255\%$ 、 $\psi_2 = 0.8\%$ 、 $\psi_3 = 1.23\%$ 。

1. 机构系统的前三阶固有频率

当层合板的铺层次序为 $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$ 时,分别求得系统的前三阶固有频率随曲柄转角在一周内的变化曲线,如图 5-7、图 5-8 和图 5-9 所示。

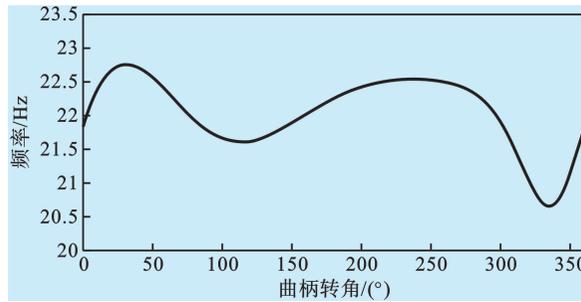


图 5-7 铺层次序为 $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$ 时系统的一阶固有频率曲线 (一)

当层合板的铺层次序为 $[\pm 45^\circ]_{2s}$ 时,分别求得系统的前三阶固有频率随曲柄转角在一周内的变化曲线,如图 5-10、图 5-11 和图 5-12 所示。

由机构系统的前三阶固有频率的曲线可以看出:系统的固有频率随曲柄转角的不同而呈周期性变化,而且复合材料的纤维铺设角度对固有频率也有较大影响。

2. 连杆和摇杆中点的应变 (一)

假设层合板的铺层次序为 $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$,在不同转速时计算连杆和摇杆中点的应

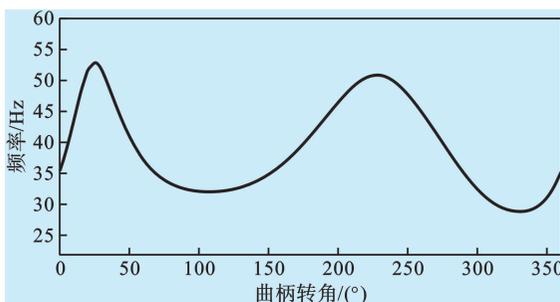


图 5-8 铺层次序为 $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$ 时系统的二阶固有频率曲线(一)

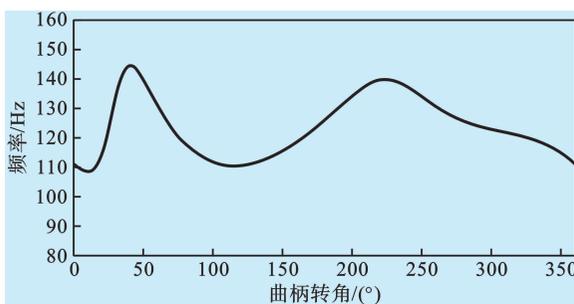


图 5-9 铺层次序为 $[0^\circ/90^\circ]_{2s}$ 时系统的三阶固有频率曲线(一)

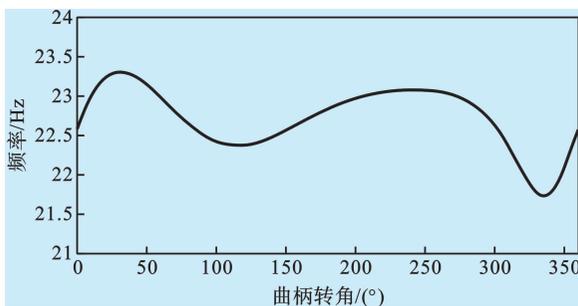


图 5-10 铺层次序为 $[\pm 45^\circ]_{2s}$ 时系统的一阶固有频率曲线(二)

变响应仿真曲线。

- (1) 当曲柄转速为 $n = 114 \text{ r/min}$ 时,连杆中点的应变如图 5-13 所示。
- (2) 当曲柄转速为 $n = 144 \text{ r/min}$ 时,连杆中点的应变响应仿真曲线如图 5-14 所示。
- (3) 当曲柄转速为 $n = 182 \text{ r/min}$ 时,连杆中点的应变如图 5-15 所示。

3. 连杆和摇杆中点的应变(二)

假设层合板的铺层次序为 $[\pm 45^\circ]_{2s}$, 在不同转速时计算连杆和摇杆中点的应变响应仿真曲线。

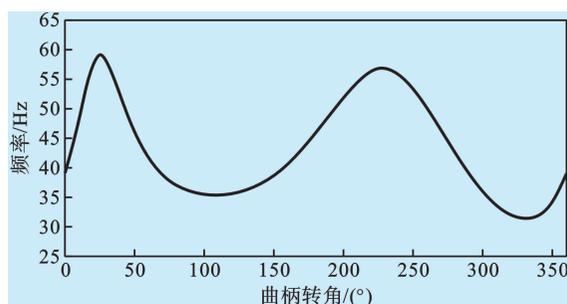


图 5-11 铺层次序为 $[\pm 45^\circ]_2$ 时系统的二阶固有频率曲线(二)

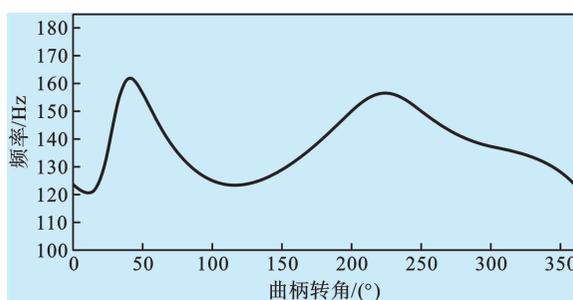


图 5-12 铺层次序为 $[\pm 45^\circ]_2$ 时系统的三阶固有频率曲线(二)

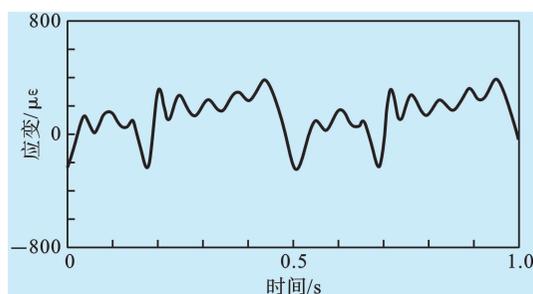


图 5-13 曲柄转速 $n = 114 \text{ r/min}$ 时连杆中点的应变响应仿真曲线

- (1) 当曲柄转速为 $n = 100 \text{ r/min}$ 时,连杆中点的应变如图 5-16 所示。
- (2) 当曲柄转速为 $n = 135 \text{ r/min}$ 时,连杆中点的应变如图 5-17 所示。
- (3) 当曲柄转速为 $n = 182 \text{ r/min}$ 时,连杆中点的应变如图 5-18 所示。

从上面的曲线可以看出:①当机构的转速逐渐增大时,连杆和摇杆应变的振幅逐渐增大;②应变呈现较规则的周期性变化,这种变化可能导致机构构件的疲劳破坏;③随着转速提高,周期变化的频率越来越大,响应峰值范围也逐渐增加,可能引起机构运动失稳;④在转速较低的情况下,计算结果和实验测得结果吻合较好,转速越高,误差越大,说明利用 KED 方法时,速度越低,求得的响应精度越高;反之,速度越高,求得的响应精度越差;⑤虽然铺设角度不同,但是曲线的变化形状基本相同。

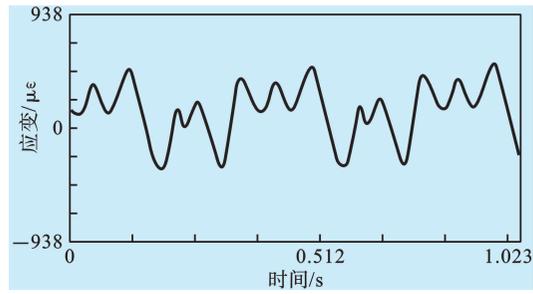


图 5-14 曲柄转速 $n = 144$ r/min 时连杆中点的应变响应仿真曲线

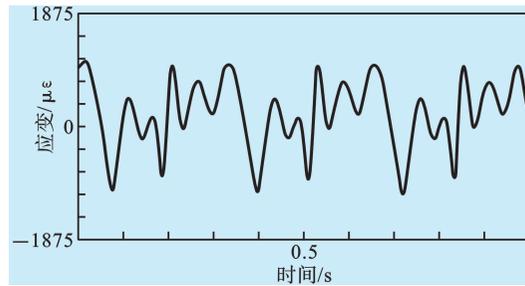


图 5-15 铺层次序为 $[\pm 45^\circ]_{2s}$ 、曲柄转速 $n = 182$ r/min 时连杆中点的应变响应曲线

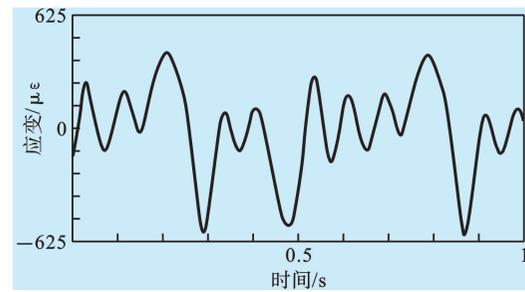


图 5-16 曲柄转速 $n = 100$ r/min 时连杆中点的应变响应曲线

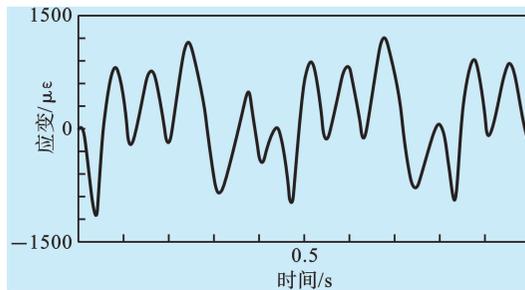


图 5-17 曲柄转速 $n = 135$ r/min 时连杆中点的应变响应曲线

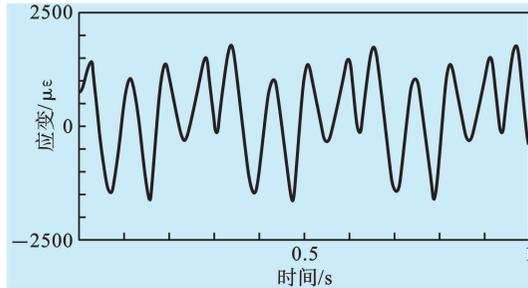


图 5-18 铺层次序为 $[\pm 45^\circ]_{2s}$ 、曲柄转速 $n = 182 \text{ r/min}$ 时连杆中点的应变响应曲线

5.3.3 弹性五连杆机构系统响应仿真计算

5.3.3.1 算例一

以图 2-18 所示直流电动机、三相交流电动机和金属连杆机构组成的五连杆机构系统为例,应用多尺度-Newmark 法,对系统响应进行仿真计算。系统参数如下。

- 弹性五连杆机构参数

构件均为均质杆,杆宽 $b = 30 \text{ mm}$,杆厚 $h = 2 \text{ mm}$,材料均为铝。

曲柄长 $L_1 = 200 \text{ mm}$, $L_4 = 150 \text{ mm}$,连杆长 $L_2 = L_3 = 400 \text{ mm}$,机架长 $L_5 = 400 \text{ mm}$,曲柄与连杆铰接处的集中质量 $m_{01} = 0.142 \text{ kg}$,两连杆铰接处的集中质量 $m_{02} = 0.092 \text{ kg}$,铝的密度 $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E_1 = 70 \text{ GPa}$ 。

- 直流电动机的结构和电磁参数

电动机轴长度(含传动轴部分) $l = 180 \text{ mm}$ (其中 $l_1 = 70 \text{ mm}$, $l_2 = 50 \text{ mm}$, $l_3 = 60 \text{ mm}$),电动机输出轴直径 $d = 9 \text{ mm}$,定子内径 $D = 45 \text{ mm}$,材料密度 $\rho_2 = 7800 \text{ kg/m}^3$,剪切模量 $G_2 = 80 \text{ GPa}$,额定功率 $P_N = 0.1 \text{ kW}$,电动机均匀气隙磁导 $\Lambda_d = 0.0057 \text{ H/m}$,供电电源频率 $f = 50 \text{ Hz}$,磁极对数 $p_d = 2$,每一磁极上励磁绕组的总匝数 $N_f = 120$,直流励磁电流 $I_f = 0.55 \text{ A}$,电枢表面的总元件(导体)数 $S = 370$,元件的匝数 $N_y = 263$,元件的电流 $i_a = 0.55 \text{ A}$ 。

- 三相交流电动机的结构和电磁参数

电动机轴长度(含传动轴部分) $l = 308 \text{ mm}$ (其中 $l_1 = 100 \text{ mm}$, $l_2 = 33 \text{ mm}$, $l_3 = 175 \text{ mm}$),电动机输出轴直径 $d = 19 \text{ mm}$,定子内径 $D = 75 \text{ mm}$,材料密度 $\rho_1 = 7800 \text{ kg/m}^3$,剪切模量 $G_1 = 80 \text{ GPa}$,额定功率 $P_N = 0.75 \text{ kW}$,额定电流 $I_N = 3.48/2.01 \text{ A}$,额定电压 $U = 220/380 \text{ V}$,电动机静偏心 $e_{02} = 0.73 \text{ mm}$,转动偏心 $\varepsilon_{02} = 0.5 \text{ mm}$,空气磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$,饱和度 $k_u = 1.2$,定子相数 $n_1 = 3$,转子相数 $n_2 = \frac{1}{2}$,磁极对数 $p = 2$,定子线圈绕组匝数 $W_1 = 824$,转子导体条数 $W_2 = 1$,定子线圈绕组系数 $K_{w1} = 0.966$,转子线圈绕组系数 $K_{w2} = 1$,转子额定滑差率 $s = 0.0713$,转矩过载倍数 $\lambda_N = 2.2$,转子质量 $m_0 = 2.93 \text{ kg}$,转子的转动惯量 $J_0 = 0.021 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

将直流电动机的转速 n_s 设为定值,这样当两种电动机转速比一定时,机构的运

行便具有周期性。设两曲柄的初始位置角度值均为 0, 并设定系统稳定运动后两曲柄运动到初始位置时的各值为响应计算初值。

以下分别给出两种直流电动机和三相交流电动机转速的计算结果。

(1) 设直流电动机的转速为 600 r/min, 三相交流电动机的转速为 400 r/min, 此时机构的运动周期为 0.3 s。给定 $\zeta = 0.25$ 、 $\theta = 0.5$, 取时间段数 $m = 100$, 则 $\Delta t = 0.003$ s, 且不考虑外激励 ($F = 0$)。图 5-19 所示为系统一阶固有频率随时间变化的曲线, 图 5-20 和图 5-21 所示分别为利用多尺度-Newmark 法, 经过仿真计算得出的连杆 L_2 和 L_3 中点横向位移和纵向位移在一个运动周期内的变化曲线。系统前四阶固有频率在一个运动周期内的平均值如表 5-2 所示。

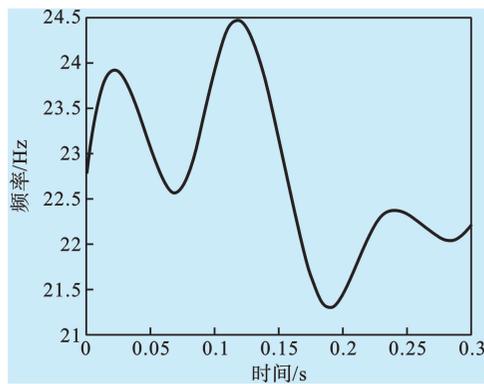


图 5-19 一阶固有频率在一个运动周期内随时间变化曲线

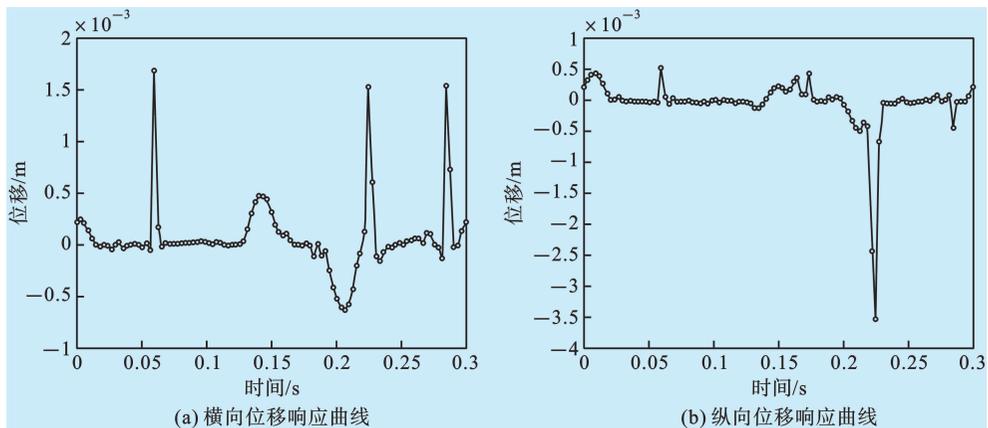


图 5-20 连杆 L_3 中点弹性位移响应在一个运动周期内变化曲线 ($n_s = 600$ r/min)

表 5-2 系统前四阶固有频率在一个运动周期内的平均值

一阶	二阶	三阶	四阶
22.7	43	59	81.65

(2) 设直流电动机转速为 80 r/min, 三相交流电动机转速为 240 r/min, 此时机

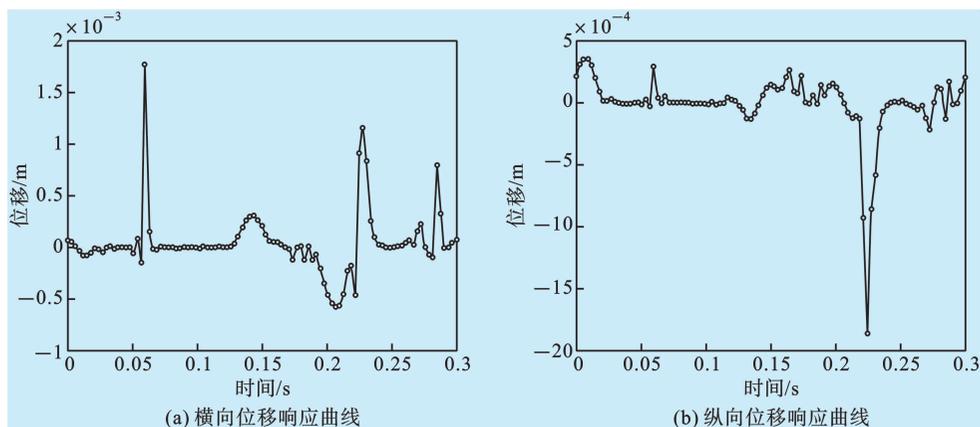


图 5-21 连杆 L_2 中点弹性位移响应在一个运动周期内变化曲线 ($n_s = 600 \text{ r/min}$)

构系统的运动周期为 0.75 s 。给定 $\zeta = 0.25$ 、 $\theta = 0.5$ ，取时间段数 $m = 30$ ，且不考虑外激励 ($F = \mathbf{0}$)。通过仿真计算得出连杆 L_2 和 L_3 中点横向位移和纵向位移应变响应仿真曲线，分别如图 5-22 和图 5-23 所示。

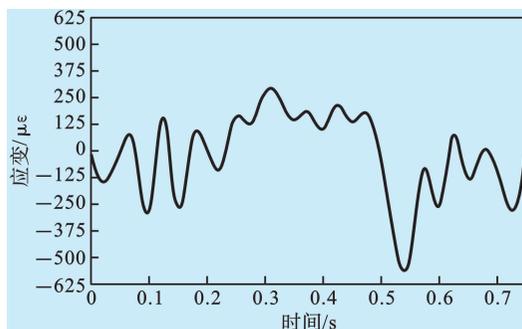


图 5-22 连杆 L_2 中点应变响应仿真曲线

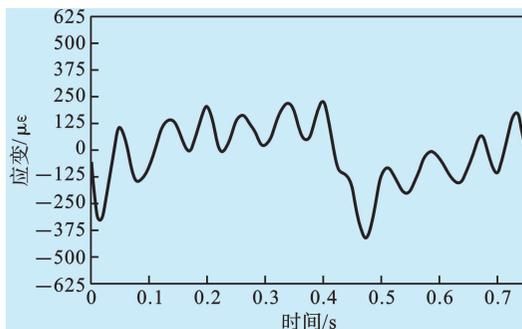


图 5-23 连杆 L_3 中点应变响应仿真曲线

5.3.3.2 算例二

以图 2-18 所示伺服电动机、三相交流电动机和金属连杆机构组成的五连杆机构



系统为例,应用多尺度-Newmark 法,对系统响应进行仿真计算。系统参数如下。

• 弹性五连杆机构参数

构件均为均质杆,杆宽 $b = 30 \text{ mm}$,杆厚 $h = 2 \text{ mm}$,材料均为铝。

曲柄长 $L_1 = 200 \text{ mm}$ 、 $L_4 = 150 \text{ mm}$,连杆长 $L_2 = L_3 = 400 \text{ mm}$,机架长 $L_5 = 400 \text{ mm}$,曲柄与连杆铰接处的集中质量 $m_{01} = 0.142 \text{ kg}$,两连杆铰接处的集中质量 $m_{02} = 0.092 \text{ kg}$,铝的密度 $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E_1 = 70 \text{ GPa}$ 。

• 伺服电动机的结构和电磁参数

电动机轴长度(含传动轴部分) $l = 363 \text{ mm}$ (其中 $l_1 = 130 \text{ mm}$, $l_2 = 53 \text{ mm}$, $l_3 = 180 \text{ mm}$),电动机输出轴直径 $d = 19 \text{ mm}$,定子内径 $D = 45 \text{ mm}$,材料密度 $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$,剪切模量 $G_5 = 80 \text{ GPa}$,额定功率 $P_N = 0.75 \text{ kW}$,伺服电动机静偏心 $e_{01} = 0.75 \text{ mm}$,转动偏心 $\varepsilon_{01} = 0.5 \text{ mm}$,电动机均匀气隙磁导 $\Lambda_s = 0.0057 \text{ H/m}$,电动机同步转速 $\omega_s = 157 \text{ r/min}$,供电电源频率 $f = 50 \text{ Hz}$,激磁绕组匝数 $W = 924$,激磁绕组系数 $K_W = 0.92$,激磁电流最大值 $I = 3.58 \text{ A}$,磁极对数 $p_s = 1$,定子和转子的相数分别为 $m_1 = 2$ 和 $m_2 = 2$,激磁电抗 $x_m = 594.35 \Omega$,转子绕组的电阻归算值和等效自感电抗的归算值分别为 $r'_2 = 27.24 \Omega$ 和 $x'_2 = 0.0196 \Omega$,电动机转子对正向旋转磁场的转差率为 $s = 0.15$,对反向旋转磁场的转差率为 $2 - s = 1.85$,两绕组相位差为 45° 。

• 三相交流电动机的结构和电磁参数

电动机轴长度(含传动轴部分) $l = 308 \text{ mm}$ (其中 $l_1 = 100 \text{ mm}$, $l_2 = 33 \text{ mm}$, $l_3 = 175 \text{ mm}$),电动机输出轴直径 $d = 19 \text{ mm}$,定子内径 $D = 75 \text{ mm}$,材料密度 $\rho_1 = 7800 \text{ kg/m}^3$,剪切模量 $G_1 = 80 \text{ GPa}$,额定功率 $P_N = 0.75 \text{ kW}$,额定电流 $I_N = 3.48/2.01 \text{ A}$,额定电压 $U = 220/380 \text{ V}$,电动机静偏心 $e_{02} = 0.73 \text{ mm}$,转动偏心 $\varepsilon_{02} = 0.5 \text{ mm}$,空气磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$,饱和度 $k_u = 1.2$,定子相数 $n_1 = 3$,转子相数 $n_2 = \frac{1}{2}$,磁极对数 $p = 2$,定子线圈绕组匝数 $W_1 = 824$,转子导体条数 $W_2 = 1$,定子线圈绕组系数 $K_{W1} = 0.966$,转子线圈绕组系数 $K_{W2} = 1$,转子额定滑差率 $s = 0.0713$,转矩过载倍数 $\lambda_N = 2.2$,转子质量 $m_0 = 2.93 \text{ kg}$,转子的转动惯量 $J_0 = 0.021 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

对于由两自由度连杆机构和伺服电动机及三相交流电动机组成的系统,通过调控伺服电动机的运动参数,理论上可以实现五杆机构任意执行点在其可行域内的任意轨迹输出。如果知道了某一连杆上任意一点的运动轨迹,该连杆及与该连杆刚性连接的部件上各个点的运动轨迹便可以由刚体运动学知识推导得出。

为便于推广,选择两连杆铰链结合处的公共点为执行点,以实现给定圆轨迹为例。在图 3-2 所示的坐标系中,为使常速电动机所驱动的曲柄 L_4 实现旋转运动,从而使 C 点实现圆轨迹输出。根据相关文献,对于五杆机构可动性条件^[105,106],选择 $2L_1$

$= L_2 = L_3 = \frac{8}{3}L_4 = L_5$,并设轨迹圆的圆心位置坐标为 (x_0, y_0) ,半径为 r ,并令

$$\begin{cases} x_0 = L_4 \cos 60^\circ \\ y_0 = L_5 \sin 60^\circ \\ r = L_4 \end{cases}$$

根据算例中各杆件的长度和几何关系可知,此圆轨迹曲线在执行点的可行域内可以实现。设执行点的圆轨迹曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \omega_2 t \\ y = y_0 + r \sin \omega_2 t \end{cases}$$

式中:参数 t 表示时间; ω_2 为三相交流电动机的旋转角速度。

调节机构的运动初始位置,使杆 1 和杆 2 的中间铰链处在执行点与杆 5 右端固定铰链连线的右侧,并以此几何关系为准进行推导,可得

$$\beta_1 = \pi - \operatorname{arccot} \frac{L_5 - x}{y} - \operatorname{arccos} \frac{L_1 + [(L_5 - x)^2 + y^2 - L_2^2]}{2L_1 \sqrt{(L_5 - x)^2 + y^2}}$$

式中: β_1 为曲柄 1 的角位移,即伺服电动机的转子转角。

伺服电动机采用幅值控制方式,因为交流伺服电动机的机械特性和调节特性均为非线性,这使得对其进行控制时的传递函数的获得十分复杂,也大大降低了这种形式传递函数的实用价值,因此,本文只考虑电动机的机械过渡过程,略去电气过渡过程,则由电机学知识可知^[79]

$$T_{e^*} = \frac{T_e}{T_m} = \frac{1}{2} \left[2a_e - \frac{(1 + a_e^2)n}{n_s} \right] = \frac{n_s - n}{n_s}$$

式中: T_{e^*} 为电磁转矩标么值; T_e 为伺服电动机的电磁转矩; T_m 为伺服电动机的起动转矩;

a_e 为伺服电动机有效信号系数, $a_e = \frac{U_k}{U_{kn}}$; n_s 为伺服电动机同步转速, $n_s = \frac{60f}{p}$; n 为

伺服电动机转子在工作过程中的实际转速, $n = \frac{30 \dot{\psi}_1}{\pi}$ 。则由上式可得

$$a_e = \frac{n_s - \sqrt{n_s^2 - n(2n_s - n)}}{n}$$

则伺服电动机伺服控制时的控制电压为

$$U_k = \frac{n_s - \sqrt{n_s^2 - n(2n_s - n)}}{n} U_{kn}$$

不考虑外激励 ($F = 0$), 三相交流电动机输入电压为额定电压, 转速为 3 000 r/min, 此时伺服电动机控制电压 U_k 可按照上式计算得到, 机构的圆周运动周期为 0.02 s。给定 $\zeta = 0.25$ 、 $\theta = 0.5$, 取时间段数 $m = 20$, 则 $\Delta t = 0.001$ s。

图 5-24 所示为利用多尺度-Newmark 法, 经编程计算得到的系统弹性振动一阶固有频率在连杆机构一个圆周运动周期内随时间变化的曲线。表 5-3 列出了系统前五阶固有频率在机构一个运动周期内的平均值。图 5-25 所示为经过仿真计算得

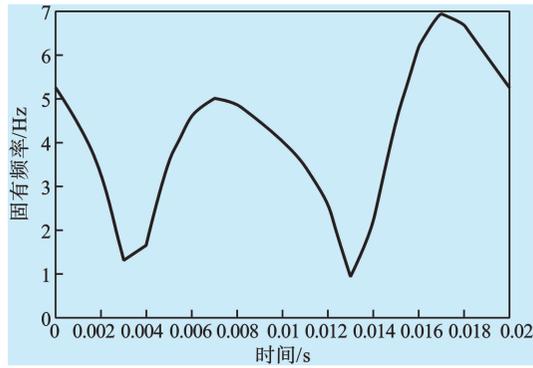


图 5-24 一阶固有频率在一个运动周期内随时间变化曲线

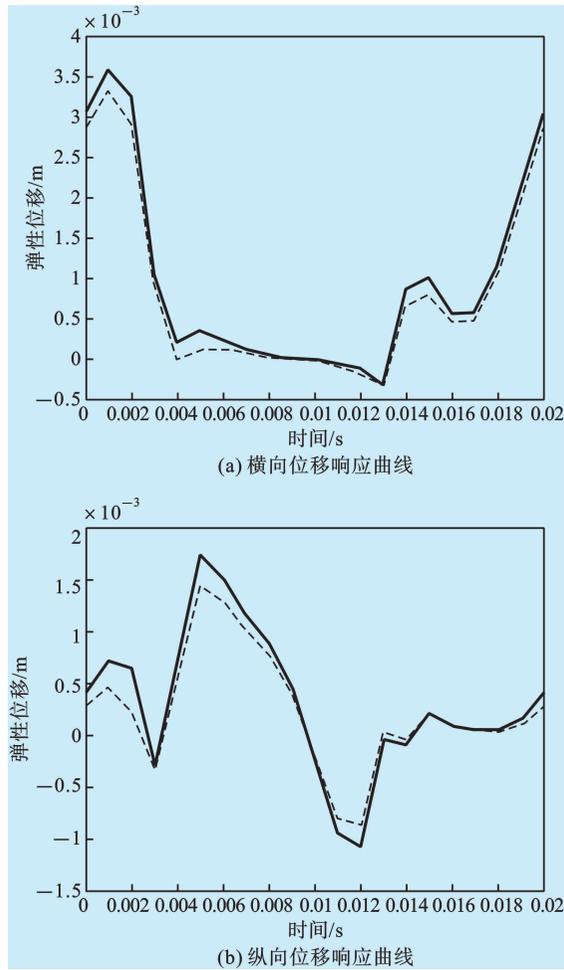


图 5-25 执行点 C 的弹性位移响应在一个运动周期内的变化曲线

表 5-3 系统前五阶固有频率在一个运动周期内的平均值

一阶	二阶	三阶	四阶	五阶
4.15	20.86	33.31	49.95	117.11

出的不考虑外激励时执行点的横、纵向弹性位移在机构一个运动周期内的变化曲线,其中虚线所示为只考虑杆件弹性变形、不考虑电动机影响而得到的位移响应,实线所示为综合考虑弹性变形和电动机影响而得到的位移响应。结果表明,电动机对机构弹性位移的影响不可忽视;由于伺服电动机和三相交流电动机的结构和电磁参数不同,其对机构弹性位移的影响也将不同。

参 考 文 献

- [1] ERDMAN A, SANDOR G. Kinete-elastodynamics-a review of the state-of-the-art and trends[J]. Mechanism and Machine Theory, 1972, 7(1):19-33.
- [2] LIAO D X , THOMPSON B S . The design of flexible robotics manipulators with optimal material properties [J]. The International Journal of Robotics Research, 1987,6(3):116-129.
- [3] ERDMAN A. Modern kinematics: developments in the last forty years [M]. John Wiley and Sons, 1993.
- [4] ERDMAN A G, IMAM I, SANDOR G N. Applied kinete-elastodynamics [C]// [Anon]. Proceedings of 2nd OSU applied Mechanism Conference. Oklahoma State University: Oklahoma, 1971.
- [5] WINFREY R. Elastic link mechanism dynamics[J]. AEME, Journal of Engineering for Industry, 1971,93:268-272.
- [6] ERDMAN A, SANDOR G. A General method for kinete-elastodynamic analysis and synthesis of mechanisms [J]. AEME, Journal of Engineering for Industry, 1972,94(4):1193-1205.
- [7] 张策. 论弹性连杆机构的低阶谐振现象[J]. 机械工程学报,1986,22(1):81-92.
- [8] 王生泽,廖道训. 弹性连杆机构时变振动系统的模态综合研究[J]. 1994,30(6):79-85.
- [9] 张宪民,刘济科,沈允文. 弹性连杆机构低阶临界转速的识别[J]. 振动工程学报,1996,9(1):99-104.
- [10] 王玉新. 弹性机构低阶谐振响应不完全同步机理研究[J]. 机械工程学报,1996,32(4):11-16.
- [11] 邹慧君,王德明. 连杆机构的拆杆运动弹性动力学分析方法[J]. 上海交通大学学报,1991,25(4):105-111.
- [12] 余跃庆. 弹性连杆机构参量振动频率特性分析[J]. 机械工程学报,1996,32(2):47-53.
- [13] 刘宏昭,曹惟庆,张启先. 刚弹耦合的机器人机构动力学方程及其解[J]. 应用力学学报,1991,8(2):35-44.
- [14] 于德介,刘福祥. 弹性连杆机构的灵敏度分析与动力修改[J]. 机械科学与技术,1997,16(5):842-846.
- [15] 张策. 机械动力学史 [M]. 北京:高等教育出版社,2009.

- [16] 张策,陈树勋,王子良,等. 弹性连杆机构的分析与设计[M]. 2版. 北京:机械工业出版社,1997.
- [17] MIDHA A, ERDMAN A, FROBRID D. A closed-form numerical algorithm for the periodical response of high-speed elastic linkages [J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 1979, 101, 154-162.
- [18] LOWEN G, CHASSAPIS C. The elastic behavior of linkages: an update [J]. Mechanism and Machine Theory, 1986, 21(1):33-42.
- [19] IMAM I, SANDOR G. High-speed mechanism design-general analytical Approach [J]. ASME, Journal of Engineering for Industry, 1975, 97(2), 609-628.
- [20] ZHANG C, GRANDIN H. Kinematic refinement technique in optimum design of flexible mechanisms[J]. AMSE, 1982, No. 82-DET-21.
- [21] STAMPS F R, BAGCI C. Dynamics of planar, elastic high-speed mechanisms considering three-dimensional off-set geometry: analytical and experimental Investigations[J]. AMSE, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1983, 105(3):498-510.
- [22] 王玉新,张策,陈予恕. 弹性连杆机构主振动[J]. 振动工程学报, 1996, 9(2): 116-127.
- [23] THOMPSON B S. An experimental and analytical study of the dynamic response of a linkage fabricated from a unidirectional fiber-Reinforced composite laminate[J]. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1983, 105(3):528-536.
- [24] SUNG C K, CHEN Y C. Vibration control of the elasticsdynamic response of high-speed flexible linkage mechanism[J]. ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 1991, 113(1): 14-21.
- [25] ZHANG X M, SHAO C J, SHEN Y W, et al. Complex mode dynamic analysis of flexible mechanism systems with piezoelectric sensors and actuators[J]. Multibody System Dynamics, 2002, 8(1): 51-70.
- [26] DUBOWSKY S, FREUDENSTEIN F. Dynamic analysis of mechanical system with clearances part 1: formation of dynamic mode, part 2: dynamic response [J]. Trans. ASME, Series B, 1971, 93(1): 305-316.
- [27] EARLES S, WU C. Motion analysis of a rigid-link mechanism with clearance at a bearing using lagrangian mechanics and digital computation [C]//Anon. Mechanisms. London, 1972.
- [28] SOONG K, THOMPSON B S. A theoretical and experimental investigation of the dynamic response of a slide-crank mechanism with radial clearance in the gudgeon-pin joint[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1990, 112(2):183-189.



- [29] FUNABASHI H, OGAWA K, HORIE M, et al. A dynamic analysis of the plane crank-and-rocker mechanisms with clearances[J]. Bulletin of the JSME, 1980, 23(177):446-452.
- [30] FURUHASHI T, MORITA N, MATSUURA M. Research on dynamics of four-bar linkage with clearance at turning pairs(including four reports) [J]. Bulletin of the JSME, 1978, 21:518-523.
- [31] 常宗瑜,张策,王玉新. 含间隙连杆机构的分叉和混沌现象[J]. 机械强度, 2001, 23(1): 77-79.
- [32] 黄铁球,吴德隆,阎绍泽. 带间隙伸展机构的非线性动力学建模[J]. 中国空间科学技术, 1999, (1):7-13.
- [33] 文荣,吴德隆. 带间隙空间结构的动力学特性分析[J]. 中国空间科学技术, 1998, (1): 7-12.
- [34] 文荣,吴德隆. 空间伸展机构动力学实验研究[J]. 导弹与航天运载技术, 1996, (2):1-10.
- [35] HSIEH S R, SHAW S W. The dynamic stability and nonlinear response of flexible connecting rod: continuous parameter model [J]. Nonlinear Dynamics, 1993, 4: 573-603.
- [36] HSIEH S R, SHAW S W. The dynamic stability and non-linear resonance of a flexible connecting rod: single-mode model [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 170(1): 25-217.
- [37] 王玉新. 弹性连杆机构的组合共振[J]. 天津大学学报, 1996, 29(5):704-708.
- [38] 郝淑英,陈予恕,张琪昌. 连接结构松动对系统非线性动力学特性的影响[J]. 天津大学学报, 2001, 34(4):452-454.
- [39] DU H, LING S F. A nonlinear dynamic model for three-dimensional flexible linkages[J]. Computers and Structures, 1995, 56(1):15-23.
- [40] DU H, LIM M K, LIEW K M. A nonlinear finite element model for dynamics of flexible manipulators. Mechanism and Machine Theory, 1996, 31(8):1109-1119.
- [41] 张宪民,刘济科,沈允文. 计入几何非线性时弹性机构通用动力学方程的建立[J]. 机械科学与技术, 1995, 54(2):9-12.
- [42] 张宪民,刘济科,沈允文. 计入几何非线性时弹性连杆机构动力学方程的求解[J]. 机械科学与技术, 1995, 55(3):13-16.
- [43] THOMPSON B S, SUNG C K. A variational formulation for the dynamic viscoelastic finite element analysis of robotics manipulations constructed from composite materials[J]. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1984, 106:183.
- [44] 蔡敢为,李兆军,朱天燕,等. 含对称叠层复合材料构件机构非线性动态特性分

- 析[J]. 中国机械工程, 2008, 19(19): 2371-2375.
- [45] LIAO D X, THOMPSON B S. The optimal design of symmetric laminated beams considering damping[J]. *Journal of Composite Material*, 1986, 20(9): 485-501.
- [46] 蔡敢为, 陆俊华, 廖道训. 三维正交纤维复合材料弹性性能细观力学分析[J]. 华中理工大学学报, 1996, 24(4): 67-70.
- [47] 蔡敢为, 梁洁萍, 周晓红, 等. 四步法三维编织复合材料弹性性能的数值细观力学分析[J]. 湘潭矿业学院学报, 1999, 14(1): 58-61.
- [48] 蔡敢为, 周晓红, 廖道训. 四步法三维编程复合材料杆件的刚度与阻尼分析[J]. 机械强度, 1999, 21(1): 18-21.
- [49] 蔡敢为, 廖道训. 两步法三维编织复合材料梁的阻尼预测和优化[J]. 华中理工大学学报, 1998, 26(1): 91-94.
- [50] 蔡敢为, 廖道训. 三维正交纤维复合材料的剪切模量与非主轴本构方程[J]. 湘潭矿业学院学报, 1996, 11(1): 30-34.
- [51] 蔡敢为, 廖道训. 两步法编织复合材料梁的刚度优化[J]. 纤维复合材料, 1997, (1): 46-50.
- [52] 蔡敢为, 廖道训. 两步法编织复合材料矩形截面杆件的刚度系数[J]. 华中理工大学学报, 1996, 24(12): 26-28.
- [53] 蔡敢为, 钟掘, 廖道训. 三维编织复合材料构件的机构模态阻尼[J]. 中国机械工程, 2000, 11(5): 481-484, 501.
- [54] CAI G W, WANG R G, LI Z J. The dynamic equation and simulation of a linkage mechanism fabricated from three-dimensional braided composite materials[J]. *JSME International Journal, Series C*, 2006, 49(3): 727-733.
- [55] LIU F W, ERDMAN A G, LIN C S. Dynamic analysis of a motor-gear-mechanism system[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1991, 26(3): 239-252.
- [56] SMAILI A, KOPPARAPU M, SANNAH M. Elastodynamic response of a D. C. motor driven flexible mechanism system with compliant drive train components during start-up[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1996, 31(5): 659-672.
- [57] 刘建琴, 张策. 电机-弹性连杆机构系统的动力学分析[J]. 天津大学学报, 1999, 32(3): 265-269.
- [58] 邱家俊. 机电分析动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [59] 蔡敢为, 李兆军, 常平平. 电动机-弹性连杆机构系统的动态方程及其响应[J]. 固体力学学报, 2005, 26(4): 398-404.
- [60] LI Z J, CAI G W, HUANG Q B, et al. Analysis of nonlinear vibration of a motor-linkage mechanism system with composite links[J]. *Journal of Sound and Vibration*. 2008, 311(3-5): 924-940.
- [61] 王汝贵, 蔡敢为. 可控连杆机构系统预定轨迹下的动态优化综合[J]. 中国机械



- 工程,2008,19(22):2653-2656.
- [62] 李兆军,蔡敢为,黄其柏. 电动机-弹性连杆机构系统谐振机理研究[J]. 振动工程学报,2006,19(1):93-97.
- [63] LI Z J, CAI G W, MA C Z. Multiple resonance and stability of a motor-elastic linkage mechanism system[J]. Journal of Dong Hua University (English Edition) 2006,23(6):1-6.
- [64] 李兆军,蔡敢为,黄其柏. 电动机-弹性连杆机构系统参激振动的耦合研究. 中国机械工程,2005,16(22):2049-2051.
- [65] 李兆军,蔡敢为,黄其柏. 机电系统在电磁力作用下的主共振分析[J]. 机械科学与技术,2006,25(12):1491-1494.
- [66] 李兆军,蔡敢为,张晓斌. 被驱动机构对电动机轴扭振固有频率的影响[J]. 机械设计与研究,2005,21(5):33-36.
- [67] WANG R G, CAI G W. Coupling dynamic model of a hybrid elastic five-bar linkage mechanism system [C]//BATRA R C. Proceedings of the International Conference on Mechanical Engineering and Mechanics 2005. Monmouth Junction: Science Press USA Inc.,2005:631-636.
- [68] WANG R G, CAI G W. Subharmonic resonance analysis of a 2-DOF controllable linkage mechanism system effected by self-excited inertial force [J]. Advanced Materials Research,2010,139-141(1):2381-2385.
- [69] WANG R G, CAI G W, ZHOU X R, et al. Analysis of nonlinear vibration of a robotic manipulator electromechanical coupling system while plane motion [J]. IEEE Computer Society's CPS,2010.
- [70] WANG R G, CAI G W, ZHOU X R. An evolutionary analytic method of multi-DOF nonlinear coupling dynamic model for controllable close-chain linkage mechanism system[J]. Mathematical Problems in Engineering,2011(2011):1-7.
- [71] 王汝贵,蔡敢为,鲁华. 两自由度可控连杆机构系统机电耦联动态方程及其响应[J]. 机械强度,2007,29(3):356-364.
- [72] 王汝贵,蔡敢为. 两自由度可控连杆机构系统在电磁参数激励作用下的主共振分析[J]. 机械强度,2009,31(2):203-207.
- [73] 王汝贵,蔡敢为. 混合输入五杆机构双电机轴扭振固有频率分析[J]. 机械设计与制造,2008(8):67-69.
- [74] 王汝贵,蔡敢为. 两自由度可控平面连杆机构机电耦合系统的超谐波共振分析[J]. 山东大学学报(工学版),2008,38(3):58-63.
- [75] 王汝贵. 两自由度弹性连杆机构系统机电耦联动力学研究[D]. 南宁:广西大学,2008.
- [76] 李开成,马志云. 考虑空间谐波磁场作用的异步电机电磁转矩通用算法[J]. 大

- 电机技术,1996,(1):33-36.
- [77] 汤蕴璆. 电机学[M]. 北京:机械工业出版社,2005.
- [78] 刘锦波,张承慧. 电机与拖动[M]. 北京:清华大学出版社,2006.
- [79] DU G W, KO F K. Unit cell geometry of 3-D braided structure[J]. J. Reinf Plast Compos, 1993,12:752-768.
- [80] YANG J M, MA C L, CHOU T W. Fiber inclination model of three-dimensional textile structural composites[J]. Journal of Composite Materials,1986,20(5):472-484.
- [81] 肖丽华,杨佳. 三维编织多功能结构复合材料的发展[J]. 复合材料学报,1994,11(2):23-27.
- [82] Ni R G, ADAMS R D. The damping and dynamic module of symmetric laminated composite beams-theoretical and experimental results[J]. J. Composite Materials, 1984, 18 (2):104-121.
- [83] ADAMS R D, BACON D G C. Effect of orientation and laminated geometry on the dynamic properties of CFRP. Composite Material, 1973,1 (10):402-409.
- [84] 师汉民,谌刚,吴雅. 机械振动系统——分析·测试·建模·对策[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2004:70-74.
- [85] 杨志勇,李桂青,瞿伟廉. 结构阻尼的发展及其研究近况[J]. 武汉工业大学学报,2000,22(3):38-41.
- [86] 褚亦清,李翠英. 非线性振动分析[M]. 北京:北京理工大学出版社,1996.
- [87] 侯书军,陈予恕,刘习军. 柔性机械臂的非线性振动分析[J]. 振动工程学报,1999,12(4):492-498.
- [88] 余跃庆,李哲. 现代机械动力学[M]. 北京:北京工业大学出版社,1998.
- [89] ZHANG X M, LIU J, SHEN Y W. A high efficient frequency analysis method for closed flexible mechanism systems[J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33 (8):1117-1125.
- [90] ESCALONA J L, MAYO J, DOMINGUEZ J. A new numerical method for the dynamic analysis of impact loads in flexible beams[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34:765-780.
- [91] LI D, ZU J W, GOLDENBERG A A. Dynamic modeling and mode analysis of flexible-link, flexible-joint robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 1998,33 (7):1031-1044.
- [92] 于德介,吕东. 弹性连杆机构的时域子结构综合方法[J]. 湖南大学学报,1998,25(3):41-44.
- [93] 张宪民,刘宏昭,曹惟庆. 高速弹性机构动力学建模及其解的研究[J]. 工程力学,1995,12(1):72-80.



- [94] CARACCIOLO R, TREVISANI A. Simultaneous rigid-body motion and vibration control of a flexible four-bar linkage[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2001, 36: 221-243.
- [95] DADO M, SONI A H. Complete dynamic analysis of elastic linkages. *ASME Journal of Mechanisms*[J]. *Transmissions and Automation Design*, 1987, 109(4): 481-486.
- [96] 王毓东. 电机学[M]. 杭州:浙江大学出版社,1991.
- [97] WANG Y X. Multifrequency resonances of flexible linkages[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1997, 33(3): 255-271.
- [98] 沈祖炎,叶继红. 运动稳定性理论在结构动力分析中的应用[J]. *工程力学*, 1997, 8: 21-281.
- [99] 王生泽. 弹性连杆机构线性时变振动系统的动力学研究[D]. 武汉:华中理工大学,1991.
- [100] CLEGHORN W L, FENTON R G, TABARROK B. Steady-state vibrational response of high-speed flexible mechanisms[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1984, 19: 417-423.
- [101] GAO X C, KING Z Y, ZHANG Q X. A closed-form linear multi-step algorithm for the steady-state response of high speed flexible mechanisms[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1988, 23: 361-366.
- [102] 王玉新. 弹性连杆机构的非线性行为[D]. 天津:天津大学,1994.
- [103] 李兆军,蔡敢为,杨旭娟. 求解非线性动力学方程的模态叠加多尺度法[J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*,2010,38(8): 115-117.
- [104] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2003:479-484.
- [105] 周洪,邹慧君,王石刚. 混合输入型五杆轨迹机构的分析与设计[J]. *上海交通大学学报*,1999, 33 (7):865-869.
- [106] 周双林. 实现轨迹的混合驱动五杆机构设计理论及其实验研究[D]. 上海:上海交通大学,2001.

主要符号表

u_1 :三相交流电动机单元的广义坐标向量	对速度向量
$W_{1y}(x,t)$:三相交流电动机轴的轴线上任一点沿 y 方向的弹性横向位移	\bar{m}_1 :三相交流电动机单元的质量矩阵
$W_{1z}(x,t)$:三相交流电动机轴的轴线上任一点沿 z 方向的弹性横向位移	N_{11} :三相交流电动机单元的弹性势能
$V_1(x,t)$:三相交流电动机轴的轴线上任一点的弹性扭角	E_1 :三相交流电动机轴材料的弹性模量
$\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x)$:三相交流电动机单元的型函数	$I_1(x)$:三相交流电动机轴抗弯截面惯性矩分布函数
T_{E1} :三相交流电动机单元的动能	G_1 :电动机轴材料的剪切弹性模量
l_1 :三相交流电动机轴长度	$J_{01}(x)$:三相交流电动机轴极惯性矩分布函数
$m_1(x)$:三相交流电动机轴的质量分布函数	δ :三相交流电动机气隙长度
ρ_1 :三相交流电动机轴的材料密度	e :三相交流电动机转子的气隙偏心
A_1 :三相交流电动机轴的横截面积	e_0 :三相交流电动机转子的转动偏心
m_{10} :三相交流电动机转子的质量	φ_1 :三相交流电动机轴的转角
$J_1(x)$:三相交流电动机轴的转动惯量分布函数	R_1 :三相交流电动机定子内圆半径
J_{10} :三相交流电动机转子的转动惯量	L_{01} :三相交流电动机转子的有效长度
$\dot{W}_{1ya}(x,t)$:三相交流电动机轴的轴线上坐标为 x 的任一点沿 y 方向的横向绝对速度	ε_1 :三相交流电动机有效相对偏心
$\dot{W}_{1za}(x,t)$:三相交流电动机轴的轴线上坐标为 x 的任一点沿 z 方向的横向绝对速度	δ_0 :三相交流电动机均匀气隙长度
$\dot{V}_{1a}(x,t)$:三相交流电动机轴上距离原点为 x 的任意横截面的绝对角速度	k_μ :三相交流电动机气隙饱和度
\dot{u}_{1a} :三相交流电动机单元节点的绝对速度	k_1 :三相交流电动机平均气隙的计算气隙系数
	δ_{Fe} :三相交流电动机磁铁材料当量气隙长度
	Λ_0 :三相交流电动机均匀气隙磁导
	μ_0 :空气磁导率
	s :三相交流电动机转差率
	ω_0 :三相交流电动机的同步转速
	f :供电电源频率



p :三相交流电动机合成磁场磁极对数	l :伺服电动机轴长度
ϕ :三相交流转子电流滞后定子电流的相位角	$m_5(x)$:伺服电动机轴的质量分布函数
F_{1m} :三相交流定子三相合成磁通势的幅值	m_{s0} :伺服电动机转子质量
F_{2m} :三相交流转子三相合成磁通势的幅值	$J_5(x)$:伺服电动机轴的转动惯量分布函数
α :径向气隙与 y 轴的夹角	J_{50} :伺服电动机转子转动惯量
N_{12} :三相交流电动机气隙磁场能	\dot{u}_5 :伺服电动机单元节点的绝对速度向量
N_1 :三相交流电动机单元的总势能	\bar{m}_5 :伺服电动机单元的质量矩阵
\bar{k}_1 :三相交流电动机单元与弹性势能 N_{11} 相关的刚度矩阵	E_5 :伺服电动机轴材料的弹性模量
\bar{k}_{01} :三相交流电动机单元与电动机气隙磁场能 N_{12} 相关的刚度矩阵	G_5 :伺服电动机轴材料的剪切弹性模量
u_1 :三相交流电动机单元广义坐标向量	$I_5(x)$:伺服电动机轴抗弯截面惯性矩分布函数
\bar{E}_0 :与三相交流电动机转子转动偏心相关的向量	$J_5(x)$:伺服电动机轴极惯性矩分布函数
Ω_0 :三相交流电磁参数激励频率	m_1 :伺服电动机定子相数
\bar{c}_1 :三相交流电动机单元的阻尼矩阵	m_2 :伺服电动机转子相数
\bar{f}_1 :三相交流电动机单元外加载荷的广义力列阵	x_m :伺服电动机激磁电抗
\bar{q}_1 :与三相交流电动机单元相连接的其他单元给予该单元的作用力列阵	r'_2 :伺服电动机转子绕组的电阻归算值
\ddot{u}_{1r} :三相交流电动机单元的刚体加速度列阵	x'_2 :伺服电动机转子绕组的等效自感电抗的归算值
u_5 :伺服电动机单元广义坐标向量	R_s :伺服电动机定子内圆半径
$W_5(x, t)$:伺服电动机轴的轴线上任一点的横向位移	l_s :伺服电动机转子的有效长度
$V_5(x, t)$:伺服电动机轴的轴线上任一点的弹性扭角	Λ_s :伺服电动机均匀气隙磁导
$\chi_1(x), \chi_2(x), \chi_3(x), \chi_4(x)$:伺服电动机单元型函数	δ_s :伺服电动机均匀气隙长度
T_{E5} :伺服电动机单元动能	$k_{\mu s}$:伺服电动机气隙饱和度
	k_{1s} :平均气隙的计算气隙系数
	δ_{Fe_s} :伺服电动机铁磁材料当量气隙长度
	ε :伺服电动机有效相对偏心
	ω_s :伺服电动机的同步转速
	p_s :伺服电动机合成磁场磁极对数
	φ_{s1} :伺服电动机转子正序电流滞后

于定子正序电流的相位角	N_f : 直流电动机每一磁极上励磁绕组的总匝数
φ_{s2} : 伺服电动机转子逆序电流滞后于定子逆序电流的相位角	I_f : 直流电动机直流励磁电流
F_{+s} : 伺服电动机定子绕组正序旋转时磁势的幅值	S : 直流电动机电枢表面的总元件(导体)数
F_{-s} : 伺服电动机定子绕组负序旋转时磁势的幅值	p_d : 直流电动机极对数
F_{+r} : 伺服电动机转子绕组正序旋转时磁势的幅值	N_y : 直流电动机元件的匝数
F_{-r} : 伺服电动机转子绕组负序旋转时磁势的幅值	i_a : 直流电动机元件电流
ω_s : 伺服电动机的同步转速	N_{61} : 直流电动机单元的弹性势能
s_s : 伺服电动机转动滑差率	N_{62} : 直流电动机单元的气隙磁场能
N_5 : 伺服电动机单元总势能	N_6 : 直流电动机单元的总势能
N_{51} : 伺服电动机单元弹性势能	R_d : 直流电动机定子内圆半径
N_{52} : 伺服电动机单元气隙磁场能	l_d : 转子的有效长度
\bar{k}_{51} : 与伺服电动机转子材料参数有关的电动机单元的刚度矩阵	Δ_d : 直流电动机均匀气隙磁导
\bar{k}_{52} : 与伺服电动机转子电磁参数有关的电动机单元的刚度矩阵	δ_d : 直流电动机均匀气隙长度
\bar{k}_{05} : 与伺服电动机转子静偏心、振动偏心和转动偏心有关的四阶向量	$k_{\mu d}$: 直流电动机气隙饱和度
T_{e6} : 直流电动机单元的动能	k_{1d} : 直流电动机平均气隙的计算气隙系数
$m_6(x)$: 直流电动机轴的质量分布函数	δ_{Fed} : 直流电动机铁磁材料当量气隙
$J_6(x)$: 直流电动机轴的转动惯量分布函数	\bar{k}_{61} : 与直流电动机转子材料参数有关的电动机单元的刚度矩阵
$W_6(x, t), V_6(x, t)$: 直流电动机轴的轴线上任一点的横向位移和弹性扭角	\bar{k}_{62} : 与直流电动机转子电磁参数有关的电动机单元的刚度矩阵
F_δ : 直流电动机气隙磁势	\bar{k}_{06} : 与直流电动机转子静偏心、振动偏心和转动偏心有关的 4 阶向量
F_f : 直流电动机励磁磁势	E_6 : 直流电动机轴材料的弹性模量
F_a : 直流电动机电枢磁势	G_6 : 直流电动机轴材料的剪切弹性模量
F_{fm} : 直流电动机每一极上的励磁磁势幅值	$I_6(x)$: 直流电动机轴抗弯截面惯性矩分布函数
F_{am} : 直流电动机每一极上的电枢磁势的幅值	$J_6(x)$: 直流电动机轴极惯性矩分布函数
	$\bar{W}_2(x, t)$: 金属材料梁单元中性层中轴线上任一点的弹性横向位移
	$\bar{V}_2(x, t)$: 金属材料梁单元中性层中轴线上任一点的弹性纵向位移



$\phi_5(\bar{x}), \phi_6(\bar{x}), \dots, \phi_{12}(\bar{x})$: 金属材料梁单元的型函数

\mathbf{u}_2 : 金属材料梁单元的广义坐标向量

T_{E2} : 金属材料梁单元的动能

l_2 : 金属材料梁单元长度

$m_2(\bar{x})$: 金属材料梁单元的质量分布函数

ρ_2 : 金属材料梁单元材料密度

A_2 : 金属材料梁单元横截面积

$\dot{W}_{2a}(\bar{x}, t)$: 金属材料梁单元任意截面处的横向绝对速度

$\dot{V}_{2a}(\bar{x}, t)$: 金属材料梁单元任意截面处的轴向绝对速度

$\dot{\mathbf{u}}_{2a}$: 金属材料梁单元节点的绝对速度向量

$\bar{\mathbf{m}}_2$: 金属材料梁单元的质量矩阵

N_2 : 金属材料梁单元的应变能

Ω : 梁单元体积

$\boldsymbol{\varepsilon}_2$: 金属材料梁单元在局部坐标系中的应变向量

$\boldsymbol{\sigma}_2$: 金属材料梁单元在局部坐标系中的应力向量

E_2 : 金属材料梁单元材料的弹性模量

I_2 : 金属材料梁单元抗弯截面惯性矩

$\bar{\mathbf{k}}_2$: 金属材料梁单元的刚度矩阵

$\bar{\mathbf{c}}_2$: 金属材料梁单元的阻尼矩阵

$\bar{\mathbf{f}}_2$: 金属材料外加载荷的广义力列阵

$\bar{\mathbf{q}}_2$: 与梁单元相连接的其他单元给予该单元的作用力列阵

$\ddot{\mathbf{u}}_{2r}$: 金属材料梁单元的刚度加速度列阵

$W_3(\bar{x}, t)$: 三维编织复合材料梁单元中性层中轴线上任一点的弹性横向位移

$V_3(\bar{x}, t)$: 三维编织复合材料梁单元中性层中轴线上任一点的弹性纵向位移

$\phi_{13}(\bar{x}), \phi_{14}(\bar{x}), \dots, \phi_{20}(\bar{x})$: 三维编织复合材料梁单元的型函数

\mathbf{u}_3 : 三维编织复合材料梁单元的广义坐标向量

T_{E3} : 三维编织复合材料梁单元的动能

l_3 : 三维编织复合材料梁单元长度

$m_3(\bar{x})$: 三维编织复合材料梁单元的质量分布函数

ρ_3 : 三维编织复合材料梁单元材料的平均密度

ρ_{3f} : 三维编织复合材料纤维的密度

ρ_{3m} : 三维编织复合材料基体的密度

v_{3f} : 三维编织复合材料纤维的体积百分比

v_{3m} : 三维编织复合材料基体的体积百分比

A_3 : 三维编织复合材料梁单元的横截面积

$\dot{W}_{3a}(\bar{x}, t)$: 三维编织复合材料梁单元任意截面处的横向绝对速度

$\dot{V}_{3a}(\bar{x}, t)$: 三维编织复合材料梁单元任意截面处的轴向绝对速度

$\dot{\mathbf{u}}_{3a}$: 三维编织复合材料梁单元节点的绝对速度向量

$\bar{\mathbf{m}}_3$: 三维编织复合材料梁单元的质量矩阵

N_3 : 三维编织复合材料梁单元的应变能

$\boldsymbol{\varepsilon}_3$: 三维编织复合材料梁单元在局部坐标系中的应变向量

$\boldsymbol{\sigma}_3$: 三维编织复合材料梁单元在局部坐标系中的应力向量

N_{3j} : 三维编织复合材料梁单元第 j 部分的应变能

Ω_j :四分之一三维编织复合材料梁单元体积	层材料的平均密度
ϵ_{3j} :三维编织复合材料梁单元第 j 部分在其正轴坐标系 $Ox'y'z'$ 中的应变向量	ρ_{4f}, ρ_{4m} :对称叠层复合材料梁单元第 k 层纤维和基体的密度
σ_{3j} :三维编织复合材料梁单元第 j 部分在其正轴坐标系 $Ox'y'z'$ 中的应力向量	v_{4f}, v_{4m} :对称叠层复合材料梁单元第 k 层纤维和基体的体积百分比
C_{3j} :三维编织复合材料梁单元第 j 部分在其正轴坐标系 $Ox'y'z'$ 中的本构关系矩阵	t :对称叠层复合材料梁单元单层厚度
L_{3j} :三维编织复合材料梁单元第 j 部分在梁单元局部坐标系中的应变转换矩阵	h :对称叠层复合材料梁单元每层的厚度
\bar{k}_{3j} :三维编织复合材料梁单元第 j 部分的刚度矩阵	A_4 :对称叠层复合材料梁单元横截面积
\bar{k}_3 :三维编织复合材料梁单元的刚度矩阵	$\dot{W}_{4a}(\bar{x}, t)$:对称叠层复合材料梁单元任意截面处的横向绝对速度
\bar{c}_3 :三维编织复合材料梁单元的阻尼矩阵	$\dot{V}_{4a}(\bar{x}, t)$:对称叠层复合材料梁单元任意截面处的轴向绝对速度
\bar{f}_3 :三维编织复合材料梁单元外加载荷的广义力列阵	\bar{m}_4 :对称叠层复合材料梁单元的质量矩阵
\bar{q}_3 :与三维编织复合材料梁单元相连接的其他单元给予该单元的作用力列阵	C_{4j} :对称叠层复合材料梁单元弹性矩阵
\ddot{u}_{3r} :三维编织复合材料梁单元的刚度加速度列阵	ν_{12}, ν_{21} :对称叠层复合材料梁单元弹主(轴向)泊松比和次泊松比
u_4 :对称叠层复合材料梁单元的广义坐标向量	\bar{k}_4 :对称叠层复合材料梁单元的质量矩阵
T_{E4} :对称叠层复合材料梁单元的动能	R_i :第 i 单元坐标与整体坐标间的转换矩阵
N_4 :对称叠层复合材料梁单元的势能	B_i :第 i 单元局部编号与系统编号间的坐标协调矩阵
l_4 :对称叠层复合材料梁单元长度	U :系统在整体坐标系中的广义坐标向量
$m_4(\bar{x})$:对称叠层复合材料梁单元的质量分布函数	\ddot{U}_r :系统在整体坐标系中的刚体加速度向量
ρ_4 :对称叠层复合材料梁单元材料的平均密度	M :系统的质量矩阵
$\rho_4^{(k)}$:对称叠层复合材料梁单元第 k	K :系统的刚度矩阵
	C :系统的阻尼矩阵
	F :作用于系统的外力向量



$\mathbf{K}_{01}, \mathbf{K}_{01}^c$: 含机电耦合项的刚度矩阵分量	I_r : 三相交流电动机转子电流
$\mathbf{U}_\omega, \mathbf{U}_\varepsilon$: 与机构几何尺寸及位置有关的 24 阶系数列阵	I'_r : 三相交流电动机转子的换算电流
T_e : 三相交流电动机电磁转矩	I_0 : 三相交流电动机励磁电流
T_{Cu} : 三相交流电动机转子铜耗转矩	R_s : 三相交流电动机定子电阻
T_l : 三相交流电动机负载转矩	R_r : 三相交流电动机转子电阻
T_{t0} : 电动机的空载制动转矩	R'_r : 三相交流电动机转子的换算电阻
J_0 : 电动机轴(含转子)的转动惯量	R_m : 三相交流电动机励磁电阻
\mathbf{Q} : 系统的自激惯性力向量	n_1 : 三相交流电动机定子的相数
N : 自激惯性力傅里叶级数的项数	θ : 三相交流电动机功率因素角;
\mathbf{F}_{Dk} : 自激惯性力傅里叶级数的第 k 阶简谐项列阵	Newmark 积分常数
Q_{Dki} : 自激惯性力傅里叶级数第 k 阶简谐项的幅值	m : 傅里叶级数的项数
φ_{ki} : 自激惯性力傅里叶级数第 k 阶简谐项的相位角	ν_1 : 混合驱动五杆机构中伺服电动机转子的 工作频率
Ω_1 : 三相交流电动机转速	ν_2 : 混合驱动五杆机构中三相交流电 动机转子转动频率
ε : 小项标志符号	ν_3 : ν_1 和 ν_2 的最小公倍数
$\boldsymbol{\phi}$: 正则模态矩阵	ν_6 : 混合驱动五杆机构中伺服电动机 定子绕组旋转磁场转动频率
$\boldsymbol{\eta}$: 模态坐标列阵	ν_7 : 混合驱动五杆机构中三相交流电 动机定子绕组旋转磁场转动频率
T_m : 不同尺度的时间变量	ν_8 : ν_1, ν_2, ν_6 和 ν_7 的最小公倍数
Ω_2 : 外力的激励频率	ζ_n : 五杆机构系统在一个运动周期内 的第 n 阶正则振型阻尼比
ω_r : 系统在一个运动周期内第 r 阶固有 频率的平均值	ω_n : 五杆机构系统在一个运动周期 内的第 n 阶正则振型固有频率均值
U_s : 三相交流电动机定子相电压	ζ : Newmark 积分常数
I_s : 三相交流电动机定子电流	