 21世纪机电专业规划教材

理论力学

主编 张洪霞 张玉贤

主审 王俊发



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

◎责任编辑 许雅莹 ◎封面设计 下秉利



2008

ISBN 978-7-5603-2611-5




9 787560 326115 >

定价 21.80 元

031/148

2008

 21 世纪机电专业规划教材

理论力学

主 编 张洪霞 张玉贤
副主编 陈 振 魏天路 刘明亮
王艳凤 张耀宇
主 审 王俊发

哈尔滨工业大学出版社

内容简介

本书是 21 世纪机电专业规划教材。字数较少,内容深浅适宜,全书简明、易学。

全书内容根据理论力学课程的基本要求,分静力学、运动学和动力学三篇共 14 章:静力学基础、平面基本力系、平面任意力系、空间力系、点的运动、刚体的基本运动、点的合成运动、刚体的平面运动、质点动力学基本方程、动量定理、动量矩定理、动能定理、达朗贝尔原理、虚位移原理。

本书适用于普通高等工科、高等职业院校的相关专业,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/张洪霞等主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.12

ISBN 978-7-5603-2611-5

I.理… II.张… III.理论力学—高等学校—教材
IV.031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 164395 号

责任编辑 许雅莹

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 10 字数 231 千字

版 次 2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-2611-5

印 数 1~5 000 册

定 价 21.80 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

21 世纪机电专业规划教材

编写委员会名单

主 任 魏天路

编 委 (按姓氏笔画排序)

于淑芳	王 冬	王俊发	王艳凤
刘力强	刘建军	刘明亮	刘新柱
孙红旗	朱向东	阮世鑫	张玉贤
张连军	张洪霞	张耀宇	李 东
李玉清	李亚芹	李 伟	李宪芝
李春玉	李清臣	杨 海	杨 康
陈永波	陈 振	姜永成	赵占鳌
赵玉冰	高士杰	黄嘉宁	黄 燕
董晓威	潘 锲	鞠红香	

总 序

“机电一体化”技术就是加工制造业为了适应现代生产环境及市场的动态变化,将微电子技术、计算机技术、信息技术、自动控制技术综合应用于制造加工生产全过程的一批高新复合技术群。21世纪中国将需要一大批掌握先进控制技术,能从事数控机床、加工中心、智能机器人以及其他新型机电一体化技术和产品的设计、安装、调试、操纵、编程与开发的高级复合应用型创新技术人才。按照人事部最新统计预测,“机电一体化”专业技术人才是我国今后几年急需紧缺的八大类热门专业人才之一。因此,加大机电专业的学科建设和人才培养迫在眉睫。

目前的机电专业呈现出两大特点:首先是机电专业的技术知识发展迅速。由于激光技术、模糊技术和信息技术的融入,使机电专业的知识领域向周围各领域扩展,形成许多新的边缘科学知识。其次是对专业技术能力的要求不断提高。

本系列教材从培养学生的技术应用能力、自我学习能力和实践能力出发,贯彻现代教育思想,遵循理论为技术应用服务的原则,突出专业教育特点,进行有效的课程整合,结合实践教学的条件积极编写教材,以过应教学模式,由现在的理论教学型向造教学、过实践工学结合型的施教模式转化。教材编写过程中,得到了各院技领导及一线教师的大力支持,在此一并表示感谢。

由于稿件编写时间有限,以及编者对知识的把握程度有限,所以,书中难免有所疏漏,教请读者给予批评指正。

教材编委会
2007年7月

前 言

本书是 21 世纪机电专业规划教材。

本教材根据培养应用型人才的教學需要,结合目前学生状况,以及培养人才的规格,由多所学校的具有丰富教學实践经验的教师联合编写。本书字数较少,内容深浅适宜,全书简明、易学;结合工程实际的应用,着重于学生的实际能力的培养,突出理论与实践相结合。

本书保留了“静力学-运动学-动力学”的理论力学教学体系,这个体系是符合学生的认识规律的;在介绍理论力学基本概念时,以矢量代数作为工具,描述简捷,易于掌握;从一般到特殊引入理论力学的基本概念、基本理论和基本方法,易于学生全面掌握;精选的例题结合实际,抓住问题的实质与特点作精练的讲述,易于读者了解问题的全貌,将理论应用到实际中;贯穿全书的思考题和习题难度适中,使学生加深对理论的理解,启迪智慧。

本书由黑龙江八一农垦大学张洪霞和黑龙江农垦农业职业技术学院张玉贤任主编,佳木斯大学陈振、魏天路和刘明亮、辽宁机电职业技术学院王艳凤、平顶山学院张耀宇任副主编。绪论及第 1、2、3 章由黑龙江八一农垦大学张洪霞编写,第 4 章由平顶山学院张耀宇编写,第 5、6、7、8 章由黑龙江农垦农业职业技术学院张玉贤编写,第 9、10 章由佳木斯大学陈振编写,第 11、12 章由佳木斯大学魏天路编写,第 13 章由佳木斯大学刘明亮编写,第 14 章由辽宁机电职业技术学院王艳凤编写,全书由张洪霞统稿。由佳木斯大学王俊发老师担任主审工作,王俊发老师对本书进行了认真审查,并提出了一些宝贵的修改意见和建议,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中难免有疏漏和不足之处,恳请读者批评指正。

编者
2007 年 7 月

目 录

绪 论	1
-----	---

第 1 篇 静力学

第 1 章 静力学基础	4
1.1 静力学基本概念	4
1.2 静力学公理	5
1.3 约束和约束反力	8
1.4 物体的受力分析和受力图	12
习题	15
第 2 章 平面基本力系	17
2.1 汇交力系的合成	17
2.2 平面力对点之矩的概念及计算	19
2.3 平面力偶理论	20
习题	23
第 3 章 平面任意力系	25
3.1 平面力系向一点简化	25
3.2 力系简化的各种结果分析	27
3.3 平面任意力系的平衡条件及平衡方程	28
3.4 刚体系统的平衡、静定和静不定问题	30
3.5 摩擦	33
习题	38
第 4 章 空间力系	40
4.1 空间汇交力系	40
4.2 力矩	42
4.3 空间力系向一点的简化 主矢和主矩	45
4.4 空间任意力系的平衡条件和平衡方程	47
4.5 物体的重心	49
习题	55

第 2 篇 运动学

第 5 章 点的运动	58
5.1 矢量法	58
5.2 直角坐标法	59

理论力学

5.3 自然坐标法	61
习题	65
第6章 刚体的基本运动	67
6.1 刚体的平行移动	67
6.2 刚体的定轴转动	69
习题	72
第7章 点的合成运动	74
7.1 点的合成运动的基本概念	74
7.2 点的速度合成	75
7.3 点的加速度合成	76
习题	81
第8章 刚体的平面运动	83
8.1 刚体的平面运动及其分解与合成	83
8.2 平面图形内各点的速度	85
8.3 平面图形内各点的加速度	90
习题	92

第3篇 动力学

第9章 质点动力学基本方程	95
9.1 动力学基本定律	95
9.2 质点运动微分方程	96
9.3 质点动力学的两类基本问题	96
习题	101
第10章 动量定理	104
10.1 动量和冲量	104
10.2 动量定理	105
习题	108
第11章 动量矩定理	110
11.1 质点及质点系的动量矩	110
11.2 动量矩定理	112
11.3 刚体对轴的转动惯量	115
11.4 刚体的定轴转动微分方程	118
习题	120
第12章 动能定理	122
12.1 力的功	122
12.2 动能	125
12.3 动能定理	126
习题	128

第 13 章 达朗贝尔原理	131
13.1 惯性力及其力系的简化	131
13.2 达朗贝尔原理	133
习题	136
第 14 章 虚位移原理	138
14.1 约束 自由度 广义坐标	138
14.2 虚位移及虚位移原理	140
习题	146
参考文献	148

绪 论

1. 理论力学的内容和研究对象

自然界中所有的物质都处在不断地运动之中。物质运动的形式是多种多样的,例如,物体在空间的位移、变形、发热、电磁现象以及人类思维、生命的兴衰等现象都是物质运动的形态。运动是物质存在的形式和固有属性。在各种各样的运动形态中,机械运动是最简单、最普遍的一种。机械运动就是物体在空间的位置随时间而变化的运动形态。机器的运转、车辆的行驶、河水的流动、飞机火箭的飞行、天体的运动等都属于机械运动。在物质高级和复杂的运动形式中,通常包含或伴随着机械运动。因此,研究机械运动不仅揭示自然界各种机械运动的规律,而且还是研究物质其他运动形式的基础,这就决定了理论力学在自然科学研究中所处的重要的基础地位。理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学。

每一门学科的研究体系,都有它的局限性。理论力学的研究体系是以伽利略和牛顿总结的物体机械运动的基本定律为基础,在 15~17 世纪中逐步形成、完善和发展起来的,因此这门学科仅适用于研究速度远小于光速的宏观物体的机械运动,属于古典力学的范畴。“古典”是相对于近代出现和发展起来的相对论力学和量子力学而言的。相对论力学研究物体速度可与光速相比较的运动;量子力学研究微观粒子的运动。由于在一般工程实际中,我们碰到的绝大多数是宏观物体,其运动速度远小于光速,所以解决这类物体机械运动中的力学问题,必须采用古典力学的原理。也就是说,古典力学在现代工程技术中仍具有十分重要的价值和现实意义。

研究物体的机械运动,必然要研究机械运动的基本形式及其传递和变换的规律,从而不可避免地要研究机械运动的传递和变换中物体相互之间的作用——力,所以理论力学的研究内容与力分不开。按照对问题的理解和认识特点,理论力学的内容一般分为静力学、运动学和动力学三个部分。静力学研究力的基本性质、力系的简化方法及力系平衡的理论;运动学从几何角度研究物体机械运动的规律,不考虑引起运动的原因;动力学研究物体机械运动与作用于物体上的力之间的关系。

2. 理论力学的研究方法

理论力学的研究方法与任何一门科学的研究方法一样,都必须遵循认识过程的客观规律,符合自然辩证法的认识论。理论力学是在人类对自然的长期观察、实验以及生产活动中获得的经验与材料进行分析、综合、归纳、总结的过程中逐步形成和发展的。

观察和实验是理论力学发展的基础。理论力学的基本概念和基本定律的建立正是以对自然的直接观察和生产生活中取得的经验为出发点并系统组织实验,从观察和实验的复杂现象中,抓住主要的因素和特征,去掉次要的、局部的和偶然的因素,深入现象的本质,找到事物的内在联系,从感觉经验上升到理性认识,总结出普遍规律性的东西,并经过数学演绎和逻辑推理而形成理论。

理论力学

在具体的学习过程中,要注意以下几点。

(1)正确理解有关力学概念的来源、含义和用途及有关理论公式推导的根据和关键步骤,公式的物理意义及应用条件和范围;理论力学分析和解决问题的方法;各章节的主要内容和要点;各章节在内容和分析问题的方法上的区别和联系。

(2)理论力学基本概念的理解和理论应用能力是通过大量习题的求解逐步加深和提高的,因此,在学习中必须要做一定量的习题。

(3)温故而知新,及时复习和常做小结。

3. 学习理论力学的目的

理论力学和其他学科一样,是随着人类社会的发展和生产发展的需要逐步形成和发展起来的。工程实践是理论力学形成的基础,而力学理论与工程实践经验的结合,又使各种工程逐渐由经验发展成为与之相关的科学,并进而指导和促进工程的发展与进步。以建筑结构的学科为例来看,人类社会的发展,必然形成对建筑结构不断的、新的需求,而要满足这些需求,就必须有新的材料、新的机械设备以及能源技术作为保证,这些都与力学息息相关,因而促进了理论力学的发展和其他力学学科分支(诸如材料力学、结构力学、流体力学、连续介质力学、弹性力学、计算力学等)的形成和发展。安全可靠、经济合理、造型精美,是人们对建造工程设施的追求,无论历史上还是现代的优秀建筑结构,无一不体现着力与美的和谐与统一。其中安全性的保证,就取决于对结构正确的受力分析和计算,对材料力学性能的正确认识和使用。因此要成为一名合格的工程技术人员,在学习专业知识的过程中,必须学习力学知识,它是学习其他专业课程必须具备的基础。理论力学作为一门理论性较强的技术基础课,又是基础的基础。学习理论力学课程,主要有以下目的。

(1)日常生活和工程实际中的机械运动现象十分普遍,学习理论力学,掌握机械运动规律,对提高工程技术人员的科学素质是必不可少的。这一方面可以为解决较复杂的工程实际问题打下一定的基础;另一方面也可以直接应用理论力学的理论解决一些较简单的工程问题。

(2)作为一门理论性较强的技术基础课,在工程类专业的课程中,它是材料力学、弹性力学、结构力学、振动理论、土力学及地基基础、钢结构、建筑结构抗震等一系列课程的基础,是学好这些课程的基本保证。

(3)理论力学的研究方法与其他学科的研究方法有许多相通之处,充分理解理论力学的研究方法,不仅可以深入掌握这门学科,而且有助于后续其他学科内容的学习。同时,因为理论力学具有研究内容涉及面广,系统性和逻辑性强,既抽象又联系实际等特点,所以通过这门课的学习,对培养辩证唯物主义的世界观,培养逻辑思维能力、抽象化能力、正确分析和解决问题的能力都有十分重要的作用。

第1篇 静力学

静力学研究作用于物体力系的平衡。

力系是指作用于物体上的一组力;平衡是物体机械运动的一种特殊情况。因为物体机械运动的传递和变换是通过物体间的相互作用力来实现的,所以作为理论力学的首篇,静力学首先建立理论力学中最重要的概念——力,并研究力的性质,在此基础上进一步研究物体和物体系统平衡时作用力之间的平衡条件。

在静力学中,主要研究以下3个问题。

(1) 物体的受力分析

分析某个物体共受几个力,以及每个力的大小、方向和作用位置。

(2) 力系的等效替换或简化

将作用在物体上的一个力系用另一个与它等效的力系来代替,这两个力系互为等效力系。如果用一个简单力系等效地替换一个复杂力系,则称为力系的简化。

研究力系等效替换并不限于分析静力学的问题,力学中关于力的概念、有关的分析理论和分析方法,在动力学部分的研究中还将用到,所以它也是研究运动学和动力学内容的基础。同时,静力学的内容也是后续的材料力学、结构力学等课程的重要基础。

(3) 建立各种力系的平衡条件

研究物体处于平衡状态时,作用在物体上的各个力所满足的条件。

工程上常见的力系,按其作用线位置分为平面力系和空间力系;按其作用线的相互关系,分为共线力系、平行力系、汇交力系和任意力系。不同力系的平衡条件各有其不同的特点。满足平衡条件的力系称为平衡力系。

力系的平衡条件在工程中具有十分重要的意义,是设计结构、构件和机械零件时静力计算的基础。由于建筑结构及其相关设施多数首先是作为静止物体受平衡力系作用来处理的,所以静力学在工程技术中有着广泛的应用。

第 1 章 静力学基础

1.1 静力学基本概念

在学习和工程实际中,常常要接触到一些十分重要的概念。本节首先介绍几个最常用又十分重要的静力学基本概念,包括它们的名称定义、主要特征、表达方式、计算方法、单位等。而这些概念的基本性质,将在后面的有关章节详细介绍。

1.1.1 力的概念

力是力学中一个极为重要的基本概念。它产生于生产实践,并经过人们对感性认识加以概括和改造,提高到理性认识而形成的科学概念。

力是物体间的相互机械作用,其效应是使被作用物体的运动状态发生变化,同时使物体产生变形。力使物体运动状态发生改变的效应称为力的外效应或运动效应;力使物体产生变形的效应称为力的内效应或变形效应。因为静力学只限于研究刚体,不考虑物体的变形,所以只涉及力的外效应,力的内效应将在材料力学等学科中研究。

物体间的相互作用力,一般分为两类:一类是由于两个物体相互接触而产生的力,如拉力、压力、摩擦力等;另一类是由于物体和场之间相互作用产生的力,如重力、电场力、电磁力等。在做受力分析的时候,必须注意区分施力物体和受力物体。

力对物体作用的效应取决于力的大小、方向和作用点,通常称为力的三要素。需要特别指出的是:

力的方向包括方位和指向两个要素。由于力的大小和方向具有矢量的特征,力的合成又服从矢量合成规则,所以力是一种矢量。力矢量在印刷时常用黑体字母表示,如图 1.1 所示,而力的大小则用普通字母表示。在书写中,由于写不出黑体字,常在字母的上方加一个箭头,以示该字母表示一个矢量,例如 \vec{F} 。表示力矢量与仅表示力的大小是不同的,这点初学者很容易混淆,需要特别注意。

力的单位在国际单位制(SI)中是个有专门名称的导出单位,用 N(中文符号为牛,单位名称为牛顿)或 kN(中文符号为千牛,单位名称为千牛顿)表示,1 kN = 1 000 N。

同时作用于物体上的若干个力称为力系。若两个力系分别作用于同一物体而效果相同,则称这两个力系为等效力系或互等力系。如果一个力与一个力系等效,则称该力为此力系的合力,而此力系中的各力称为合力的分力。求力系的合力称为力的合成;将一个力分解成两个或两个以上的分力,称为力的分解。若一个力系对物体作用后,并不改变物体原有的运动状态,则该力系称为平衡力系。平衡力系的外效应为零。

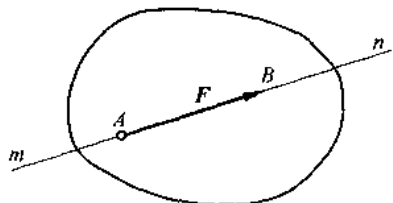


图 1.1

1.1.2 刚体的概念

刚体是指在力作用下不变形(即任意两点间的距离保持不变)的物体。显然,现实中并无刚体存在。这里所说的刚体,只是实际物体在一定条件下抽象的力学模型。

任何物体受力后或多或少都会发生变形。但有许多物体受力后变形十分微小,对静力学研究的问题,忽略变形不会对研究的结果产生显著的影响,却能使问题的研究大大简化。在这种情况下,把实际的物体抽象为刚体,是合理的,也是必要的。如桥梁问题,在计算承载时可视为刚体,在计算振动或温度的影响时就要视为变形体。由此可见,一个物体能否简化为刚体,应看在所研究的问题中,物体的变形(即使是很微小)是否起主要作用,而不应把刚体的概念绝对化。

理论力学中,主要研究力的外效应,此时微小变形在整体上对结果的影响可以忽略,所以将研究的物体都抽象为刚体,故又称刚体静力学,它是研究变形体力学的基础。

1.2 静力学公理

理论力学的研究方法,其特点之一就是将在观察和实验等实践过程中经反复验证的正确结果,提炼成具有普遍意义的公理。公理就是指符合客观实际,不能用更简单的原理去代替,也无需证明而为大家所公认的普遍规律。下面将要介绍的静力学公理,是人们关于力的基本性质的概括和总结,它们构成了静力学全部理论的基础,静力学的所有定理都是借助数学工具,从这些公理中推导出来的。学习时不要求去重复理解这些公理的形成过程,但是理解、掌握和熟练应用这些公理,对于学好理论力学却是十分重要的。

1. 二力平衡公理

刚体受两个力的作用而处于平衡,其充分必要条件是:此二力大小相等,方向相反,且作用在同一直线上。

满足此条件且作用于同一物体上的两个力,是一个最简单的平衡力系。二力平衡条件对于刚体是必要和充分条件,而对于非刚体,该条件只是平衡的必要条件而非充分条件。

工程上,常遇到只有两点受力而处于平衡的构件,称为二力构件或二力杆,如图1.2(a)、(b)中所示(不计自重)。不论构件的几何形状如何,只要符合二力平衡条件,就可按二力构件来处理。掌握了二力构件的这种受力特征,对物体进行受力分析是很有用的。

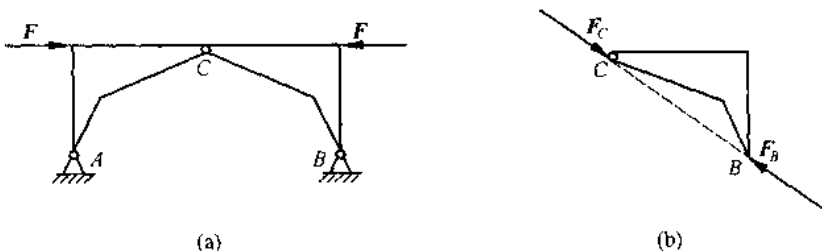


图 1.2

理论力学

2. 力的平行四边形公理

作用于物体上同一点的两个力,可以合成为一个合力。合力的作用点仍在该点,其大小和方向由以这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线表示。

平行四边形公理表述的法则,实际是一般矢量合成的法则。因为力是矢量,所以求合力也就是求力系矢量的矢量和。此公理给出了进行力系合成的理论依据,对多个力相交于一点的力系也可以用这一法则进行合成。图 1.3 所示是平行四边形公理所描述的两个共点力合成的几何关系。由图可以看出,求两个共点力的合力时,只要作出力的平行四边形的一半就可以了。具体做法如图 1.3(c) 所示:从任选 a 点画 ac 表示力矢 F_1 ,再从其末端 c 点起画 cd 表示力矢 F_2 ,则 ad 即表示合力矢 F_R 。至于先画 F_1 还是先画 F_2 ,这种作图的先后顺序不影响合成的最终结果,如图 1.3(d) 是先画 F_2 ,再画 F_1 ,所得最终合力与图 1.3(c) 所得最终合力完全相同。三角形 acd 或 abd 称为力三角形,这种求两个共点力合力的方法称为力的三角形法则。为了使图形清晰可见,分析时常把力三角形画在力所作用的物体之外。这样,按力三角形法则只是求出合力的大小和方向,其作用线实际应通过这两个力的作用点。

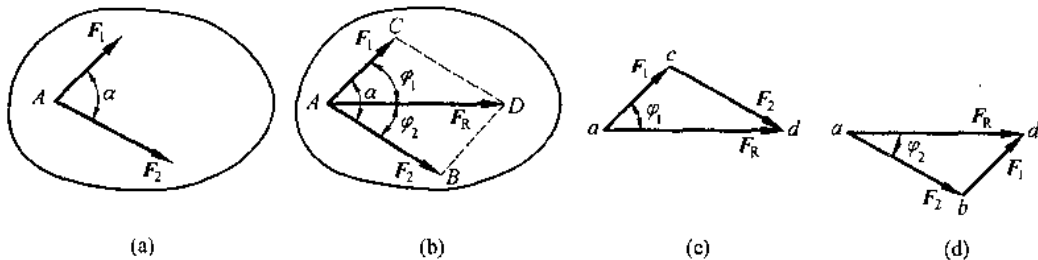


图 1.3

其数学表达式为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

要注意,这是一个矢量等式。

平行四边形公理还表明:作用于同一点上的两个力 F_1 和 F_2 对物体的作用可由其合力 F_R 等效替代。反之,根据此公理也可以将一个力分解为作用于同一点的两个分力。由于同一对角线可以画出无穷多个不同的平行四边形,所以若不附加任何条件,这种分解的结果是不定的。要使分解的力大小或方向确定,必须附加足够的条件。通常遇到的具体问题是将一个力分解为方向已知的两个分力,特别是分解为方向互相垂直的两个力,这种分解称为正交分解,所得的两分力称为正交分力。

3. 加减平衡力系公理

在已知力系上加上或减去任意的平衡力系,并不改变原力系对刚体的作用。就是说,如果两个力系只相差一个或几个平衡力系,则它们对刚体的作用是相同的,因此可以等效替换。这个公理是研究力系等效变换的重要依据。

根据上述公理可以导出如下推理。

推理一 力的可传性

作用于刚体的二力,若矢量相等,且其作用线重合,则它们各自对刚体的单独作用效

应完全相同。

这一性质说明,作用于刚体的力,其作用点沿其作用线移动,只要不改变其大小和方向,则不会改变它对刚体的作用效应。所以这一性质称为力的可传性。

设某一刚体按图 1.4(a)、(b)、(c)3 种情况分别受力 (F_1) 、 $(F_1 F_2 F_3)$ 和 (F_3) ,且 $F_1 = F_3 = -F_2$,其中 F_1 和 F_3 即为作用线重合、矢量相等的二力。下面我们证明它们对刚体的作用必等效。

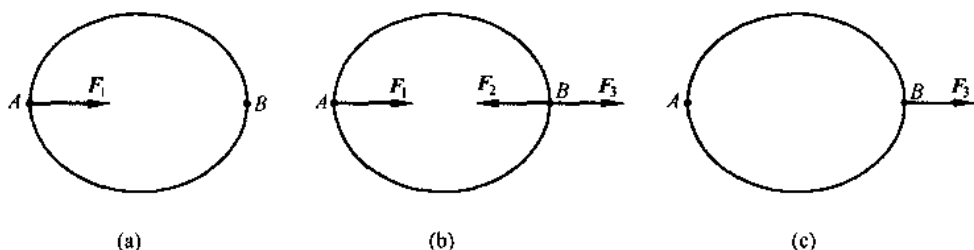


图 1.4

根据二力平衡公理,显然, $(F_2 F_3)$ 和 $(F_1 F_2)$ 均为平衡力系,故图 1.4(a)和 1.4(c)的受力可视为图 1.4(b)的受力分别减去平衡力系 $(F_2 F_3)$ 和 $(F_1 F_2)$ 的结果。根据加减平衡力系公理可知,力 F_1 和 F_3 分别与力系 $(F_1 F_2 F_3)$ 等效,所以, F_1 和 F_3 这两个矢量相等、作用线重合的力对刚体的作用完全等效。

正是力的可传性,使力的三要素中力的作用点可由力的作用线而代之。

推理二 三力平衡汇交定理

作用于刚体上的三个力使刚体处于平衡时,若其中二力的作用线相交,则第三力的作用线也必交于同一点,且与此二力必共面。

证明如下:

设力系 $(F_1 F_2 F_3)$ 三力为平衡力系,且 F_1 和 F_2 的作用线相交于 O 点,如图 1.5 所示。根据力的平行四边形公理, F_1 和 F_2 存在一合力 F ,则 F 和 F_3 必为一平衡力系。根据二力平衡公理, F 和 F_3 必共线。又因 F 与 F_1 和 F_2 共面,且相交于点 O ,故 F_3 也与 F_1 、 F_2 共面,并交于点 O ,证明完毕。

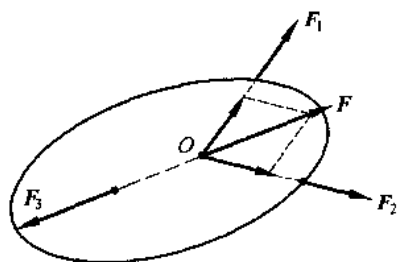


图 1.5

4. 作用和反作用公理

两物体间相互作用的力总是同时存在,大小相等,方向相反,沿同一直线,分别作用在这两个物体上。

这个公理概括了自然界中物体间相互作用力的关系,表明一切力总是成对出现在两个相互作用的物体之间。根据这个公理,已知作用力则可得知反作用力。这个公理是分析物体及物体系统受力时必须遵循的原则。

必须注意,作用力与反作用力虽然等值反向共线,但却是分别作用在两个物体上的,因此不是一对平衡力,不要与公理一混淆。此公理的理解不困难,但在具体问题的分析中,要能正确判断哪两个力之间是作用力与反作用力的关系。

5. 刚化原理

已知变形体在某力系作用下处于平衡,如将此变形体刚化为刚体,其平衡状态保持不变。

将一个变形体变成大小和形状完全相同的刚体,称为这个变形体的刚化,所以上述公理称为刚化原理或硬化原理。这个公理提供了把变形体抽象为刚体模型的条件,如一根绳索在等值、反向、共线的两个拉力作用下处于平衡,如将此绳索刚化为刚体,则平衡状态保持不变。而绳索在两个等值、反向、共线的压力作用下则不能平衡,这时绳索就不能刚化成刚体。但是刚体在上述两种力系的作用下都是平衡的,因此,刚体的平衡条件是变形体平衡的必要条件,而非充分条件。

刚化原理建立了刚体静力学与变形体静力学之间的关系,同时也说明了刚体平衡规律的普遍意义,在刚体静力学的基础上,考虑变形体的特性可进一步研究变形体的平衡问题。

1.3 约束和约束反力

在力学问题的研究中,求未知力是重要内容之一,而在未知力中又以求解约束反力最多。了解约束的概念,掌握各种约束反力的特点,常是对物体进行正确受力分析的关键。本节介绍约束的概念、各种常见的理想约束及其相应约束反力的特点,包括它们的作用位置、方位和指向的确定等,为进一步对物体进行受力分析和计算打下基础。

凡是可能在空间具有任意位移的物体,称为自由体。凡位移受到限制的物体,称为非自由体。在空中飞行的飞机等是自由体,着陆时沿跑道滑行的飞机则是非自由体,工程结构的构件或机械的零件都是非自由体。

非自由体之所以不可能在空间具有任意的运动,是由于它们总是以某种形式与周围其他物体相联系,使其某些位移受到周围这些物体的限制。着陆的飞机只能沿跑道滑行才能安全停下来。对飞机而言,跑道对飞机的滑行起到了限制作用;车床主轴与轴承相联系,对主轴而言,轴承限制了它的移动而只能转动。在力学中,将限制物体某些位移的其他物体称为约束。对飞机而言,跑道是约束;对车床主轴而言,轴承是约束。

对常见的约束,一般分为几何约束和运动约束。对于运动约束的研究及应用,将在运动学及动力学中涉及。在静力学中,仅涉及几何约束的问题。仅限制物体几何位置的约束称为几何约束。由上述各例可知,几何约束对物体所加的限制是通过相互接触而实现的。力是物体间相互的机械作用,当物体的某些位移(线位移或角位移)被约束阻止,则约束必承受此物体对它的作用(力或力偶)。根据作用与反作用定律,此约束必然也给予物体以反作用(反作用力或反作用力偶)。由此可见,几何约束的效果可以用力来代替,也就是说,几何约束给予被约束物体的反作用力,称为约束反力,简称约反力。停在机坪上的飞机,对飞机而言,机坪是约束,它阻止飞机向下的运动,因而,机坪给飞机的约束反力向上。一般地,约束反力的方向与该约束所能够阻碍的位移方向相反,这是确定约束反力的一般原则,而约束反力的大小则由物体的平衡方程求出。求约束反力大小的问题将在后续章节介绍。

以上说明了分析约束反力的一般原则和方法.约束反力的方向与约束的性质有关.在解决实际问题时,如果对每个具体的约束都用上述的一般原则去分析,是不方便的.在工程实际中,约束的具体形式多种多样.为便于以后分析,下面将工程中常见的约束按其性质归纳为几种基本类型,并分析约束反力的方向特征。

(1) 柔性约束

柔性约束指不可伸长的绳索、皮带、链条等,如图 1.6(a)、(c) 所示.这类约束的特点是能承受拉力,对压缩和弯曲的抵抗能力很差.这一约束特征决定了柔性约束的约束反力,只能是沿柔性体的轴线而背离被约束物体的拉力,如图 1.6(b)、(d) 所示。

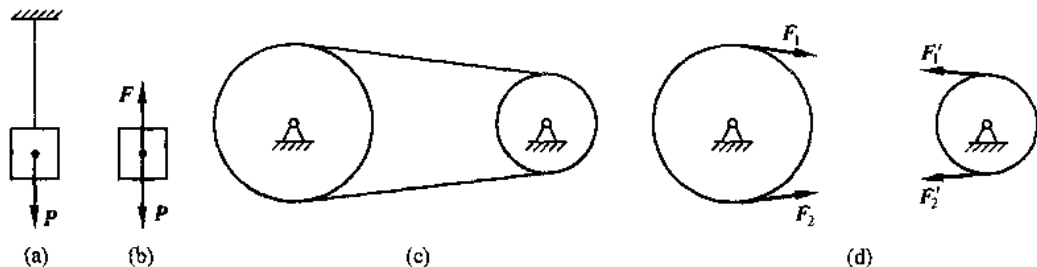


图 1.6

(2) 光滑面约束

光滑面约束指物体间的接触面比较光滑,以至于可以忽略摩擦的影响.这类约束的特征是阻止物体沿接触面的公法线相对位移,或阻止沿接触处公法线脱离接触,而不限限制沿接触面在接触处的切线方向的滑动.因此,光滑面约束的约束反力,作用点在接触处,作用线沿接触点处的公法线并指向被约束物体,如图 1.7 所示.如齿轮的齿面接触,加了润滑油的机床导轨对机床工作台的接触等都属于此类型约束。

这类约束在工程实际中有多种具体形式,其中主要有如下几种。

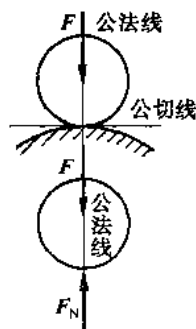


图 1.7

① 光滑圆柱铰链约束.这种约束是以圆柱形销钉将两个钻有直径大小与销钉相同的孔的构件连接在一起而构成,如图 1.8(a)、(b) 所示.若不计摩擦,则此二构件均视为受光滑圆柱铰链约束.图 1.8(c) 是这类约束的简化符号.这种约束的特点是:只能限制两构件沿任何径向的相对位移,但不能限制绕铰链(销钉)中心(即孔的中心)轴线的相对转动.如果不计销钉的长度与构件的厚度,则构件与销钉的接触是光滑圆弧面上的点接触.图 1.8(d) 示出了构件与销钉的接触情况.光滑圆柱铰链对构件的约束反力应沿光滑圆弧面在接触点 K 处沿公法线指向构件,即约束反力的作用线通过铰链中心.由于接触点 K 的位置不能预知,因此,约束反力 F_N 的具体方向亦不能预定.即光滑圆柱铰链的约束反力是压力,该力在垂直于圆柱销轴线的平面内,通过圆柱销中心,方位不定.通常,为了计算方便,将约束反力用垂直于销钉轴线的两个正交分力 F_x 、 F_y 代替,如图 1.8(e) 所示.当用圆柱销连接两个构件时,连接处称为铰接点或中间铰,简称节点。

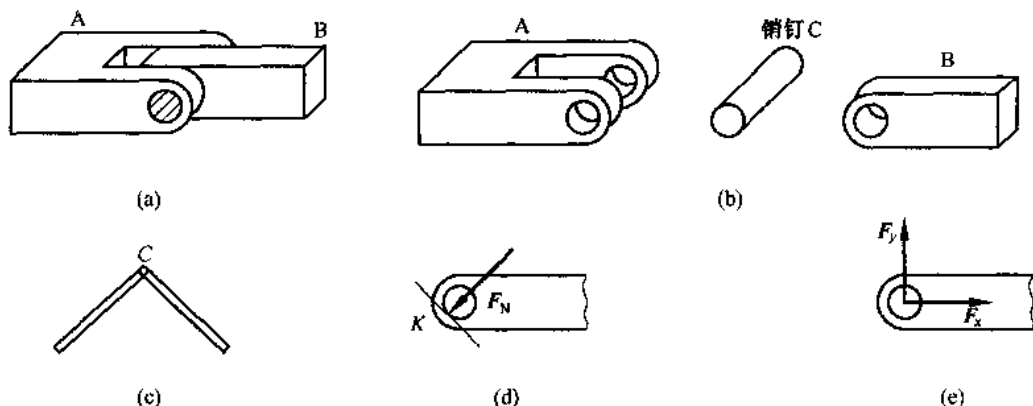


图 1.8

② 固定铰(或固定铰支座)。若将上述的光滑圆柱铰链约束的构件 A(或构件 B) 与地面固连,则称固定铰支座,如图 1.9(a) 所示。固定铰支座对构件的约束反力的方向特征与上面的光滑圆柱铰链约束相同。图 1.9(b) 为这种约束的简图,图 1.9(c) 为其约束反力的简图。

③ 辊轴支座(或活动铰链支座)。这是一种复合约束。在上述光滑圆柱铰链约束中,若将构件 A 与构件 B 的底部放上可滚动的一排辊轴,如图 1.10(a) 所示,如不计辊轴与支承面的摩擦,则这种约束只能限制构件沿支承面法线方向的运动,而不能阻止沿支承面切线方向的移动和绕销钉的转动。因此,这种约束的性质与光滑接触面约束相同,其约束反力的方向应垂直于支承面且通过铰链中心,图 1.10(b) 为这种约束的简图,图 1.10(c) 为这种约束对应的约束反力的简图。

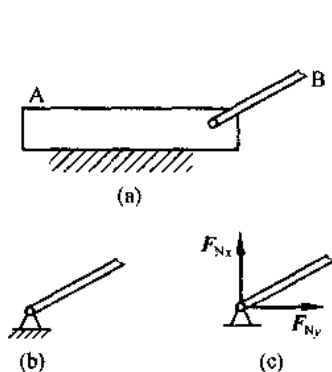


图 1.9

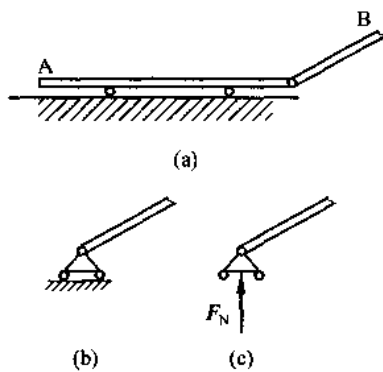


图 1.10

④ 向心轴承(或径向轴承)。向心轴承是机器中常见的一种约束。由于轴颈长度远小于轴长,故可略去不计。通常,轴承润滑状况良好或采用滚动轴承,可略去轴承的摩擦,如图 1.11(a) 所示。因此,该约束可归入光滑圆柱铰链约束,图 1.11(b) 为该约束的简图,该约束的约束反力可用 F_x 、 F_y 两正交分力表示,如图 1.11(c) 所示。

⑤ 球形铰链。其结构是某一物体上的一个球形体,被嵌入另一面定的球壳中,球与球

壳的半径近似相等,球心固定不动,构件只能绕球心任意转动,但不能取得任何径向的位移。因此,若略去摩擦,则球形铰的约束反力必过球心,但其作用线的方位和指向都难以预先确定。由于这种约束反力可能在空间具有任意方向,因此,它可以阻止球体沿过球心的空间任意三个正交轴方向的线位移。即球形铰链的约束反力,可用过球心并沿任意三个正交轴方向的三个分力来表示。图 1.12(a) 为球形铰链的示意图,图 1.12(b) 为计算简图,图 1.12(c) 为球形铰链的约束反力的简图。球形铰链属于空间约束的类型,机床上的照明灯座就是这种约束。

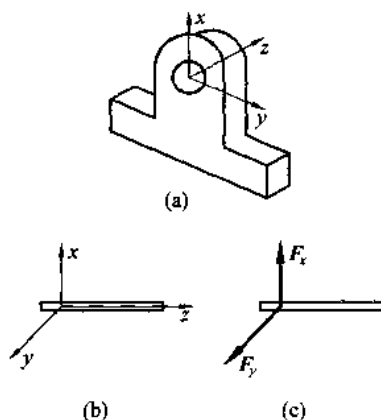


图 1.11

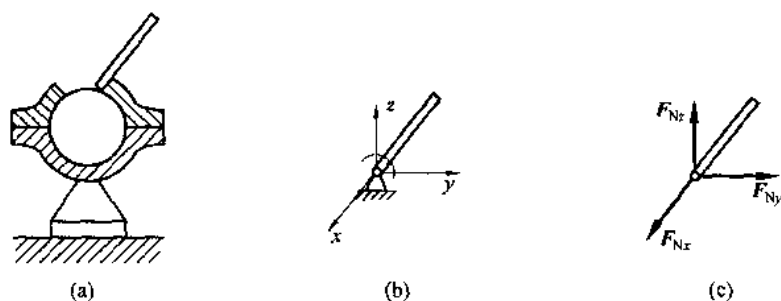


图 1.12

⑥ 止推轴承。止推轴承是机器中常见的一种约束。图 1.13(a) 为该约束的简图。忽略轴颈长度,则止推轴承相当于一个向心轴承与一个光滑面约束的组合,如图 1.13(b) 所示。因此,止推轴承约束的作用与球形铰链约束相当,如图 1.13(c) 所示。该约束的约束反力与球形铰链约束相同。

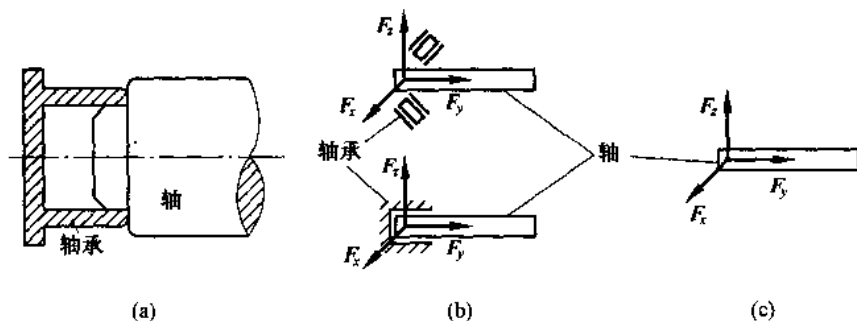


图 1.13

⑦ 固定端。固定端约束是工程中一种常见的约束,如图 1.14(a) 所示。它是将两个物体固连在一起后,相互之间不能产生相对运动的一种约束。如车床刀架对车刀的约束,建筑中一端嵌入墙内的水泥梁等。由于固定端约束阻止了物体相对于约束的任何线位移和

角位移,因此,对于受空间力系作用的物体,固定端约束属于空间约束,其约束反力为沿过该固定端处的任意三个正交轴方向的约束反力和作用面与此三轴垂直的三个约束反力偶,如图 1.14(b) 所示。另外,若物体受平面力系作用,则固定端约束为平面固定端约束,如图 1.14(c) 所示。即平面固定端,约束反力为沿载荷作用平面内两正交轴方向的力和位于载荷平面内的约束力偶,如图 1.14(d) 所示。

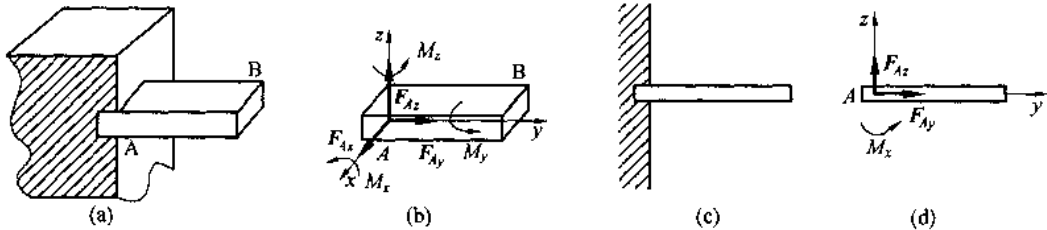


图 1.14

以上介绍的仅是几种工程中常见的基本约束。工程实际中的约束类型远不止这些,有的约束比较复杂,分析时需要加以简化或抽象化,从而确定出对物体的约束性质和类型。应该指出,对实际约束进行抽象,仅学习本课程的内容是不够的,常常需要一定的工程实际和专业的综合知识,读者应在后续课程的学习中注意积累这方面的知识。

1.4 物体的受力和受力图

研究刚体的运动规律(包括平衡规律),必须先研究刚体所受的全部外力,包括主动力和约束力。为了清楚地表示出刚体所受力的全部状况,要把所研究的刚体(即研究对象)从周围的约束物体中分离出来,单独画出它的轮廓图形,分析它受到哪些外力(包括主动力和约束反力),这一过程称为受力分析,然后将分析出来的全部力用矢量符号画在该刚体的轮廓图上就得到了此研究对象的受力图。对任何选定的研究对象,进行正确的受力分析,并画出其受力图,是研究物体各种力学问题的基本方法,也是能否熟练地解决各类问题的关键步骤。

前面将物体所受的力分为主动力和约束反力,主动力在工程中也称荷载。确定物体所受的荷载,是进行受力分析的前提。荷载又可以按其分布情况分为集中力和分布力。作用在物体上的力一般都是分布在一定面积上的,但若力分布的面积比物体尺寸小得多时,可以认为此力是作用在物体的一点上,称为集中力。例如,车轮的压力可以看做是车轮作用在地面上的集中力。分布力是指连续分布在物体或其某部分上的荷载。当分布力在物体或结构上均匀分布时,称为均布荷载。当荷载分布于某一体积上时,通常称为体荷载,如重力;当荷载分布于某一面积上时,称为面荷载,如风、雪、水、汽等对物体的压力;当荷载分布于长条状的体积或面积上时,或者研究的问题简化成平面问题时,其上作用的分布力也相应地简化为作用于某一直线上的线荷载。

物体上每单位体积、单位面积、单位长度上承受的荷载分别称为力的体集度、面集度和线集度,它们分别表示对应分布荷载在体内、固上、线上分布的密集程度。荷载集度要乘以相应的体积、面积和长度后,才是作用在整个体积、固积和长度上的力。

在国际单位制中,力的线集度的单位是 N/m ,这是在分布力中用得最多的。面集度和体集度的单位分别是 N/m^2 和 N/m^3 。

确定研究对象,取分离体,分析其受力并画出受力图,这一全过程称为对物体进行受力分析,准确地说,是对物体的受力作定性分析。其中的关键就是分析物体所受的约束反力。一般情况下,可根据约束性质、平衡条件和作用力与反作用力的关系来分析和判断约束力。下面通过例题说明。

例 1.1 水平梁 AB , A 端为固定铰支座, B 端为辊轴支座,受集中力 F 作用,如图 1.15(a) 所示,梁重不计,画出梁 AB 的受力图。

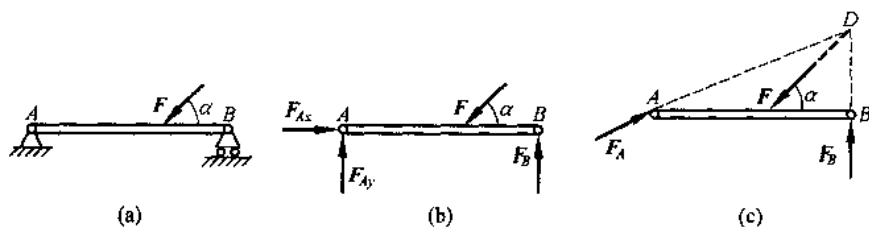


图 1.15

解 取梁 AB 为研究对象。梁 AB 上的主动力为 F 。

梁 AB 周围的约束反力(按约束的性质): B 处为辊轴支座,其约束反力 F_B 垂直于支承面上,大小未知; A 处为固定铰支座,其约束反力用通过 A 点并相互垂直、大小未知的正交分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 表示。受力图如图 1.15(b) 所示。

梁 AB 的受力图还可以依据三力平衡汇交定理画成图 1.15(c) 的形式,即先判定出 F_B 的方向,并找出 F 与 F_B 的交点 D ,再依据 F_A 必沿 AD 的连线确定出的 F_A 方位。

画受力图时确定出未知力方向的好处是在求解过程中可减少未知量的个数。本例中,图 1.15(b) 中为 3 个未知量,而图 1.15(c) 中为两个未知量。

例 1.2 如图 1.16(a) 所示结构中,已知物块 E 的质量为 G ,不计各杆自重,试分析各杆及物块的受力,并画出以各物件和以整体为对象的受力图。

解 按题意,应分别取杆 AB 、 CD 、物块 E 及整体为研究对象进行受力分析,并画出其受力图。

(1) 取物块 E 为研究对象,它受主动力 G 和绳索拉力 F 作用,其受力图如图 1.16(d) 所示。

(2) 取杆 AB 为研究对象,不计自重,它只在两 endpoint A 和 B 处受到铰链的二力作用而处于平衡。根据二力平衡条件知,此二力必共线、反向,并由杆 CD 的平衡可以判断杆 AB 所受此二力为压力,受力图如图 1.16(c) 所示。

(3) 取杆 CD 为研究对象,它在 D 端受绳索拉力 F' ,则此力与 F 等值、反向、共线。在 B 、 C 两处分别受到铰链的约束反力。虽然一般情况下,可用二正交分力分别表示此二力,但是,其中 B 处的约束力与 AB 在 B 处所受约束反力 F_B 构成作用与反作用的关系,故 CD 于 B 处的力必与 F_B 等值、反向、共线,即如图 1.16(c) 中 F_B 所示。再根据三力平衡汇交定理, CD 所受的三力必相交于一点 F ,故 C 点的受力 F_C 的方向如图 1.16(b) 所示。由于在一般情况下,如要知道 F_C 与 CD 的夹角为多少时,还必须进行一定的几何计算,所以通常也

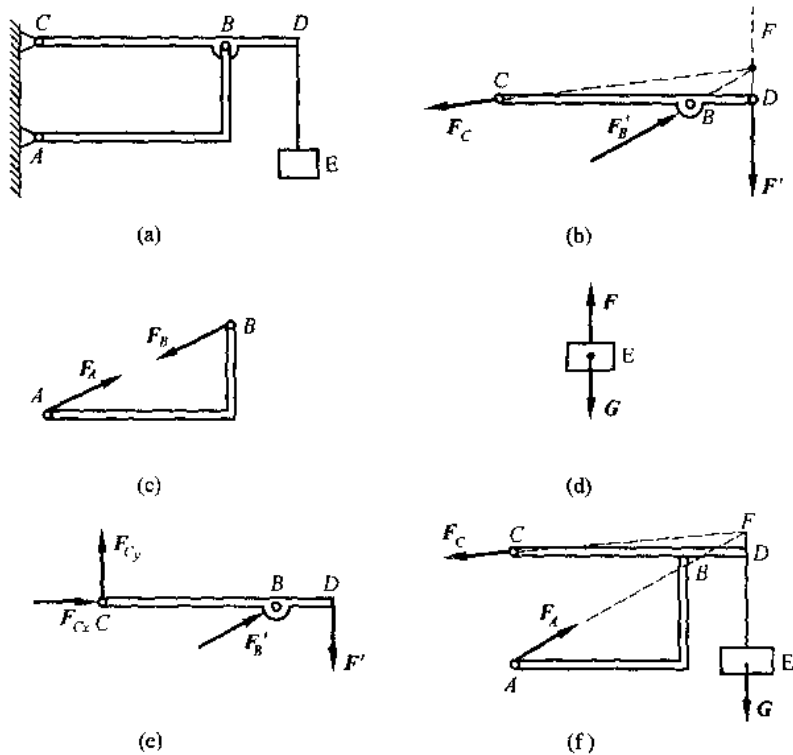


图 1.16

可以把 F_C 分解成正交的二力 F_{Cx} 和 F_{Cy} , 如图 1.16(e) 所示。

(4) 取整体为研究对象, 这时 F 、 F' 、 F_B 、 F'_B 均为内力, 不予分析, 故整体在重力 G 和约束反力 F_C 、 F_A 三力作用下处于平衡, 其受力图如图 1.16(f) 所示。

例 1.3 三铰拱如图 1.17(a) 所示, 试求整体、AC 部分和 BC 部分的受力图。

解 以整体为研究对象。作用于其上的主动力有 F ; 约束反力有 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_{Bx} 和 F_{By} , 其受力图如图 1.17(b) 所示。

以 AC 部件为研究对象。作用于其上的主动力有 F ; 约束反力有 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_{Cx} 和 F_{Cy} , 其受力图如图 1.17(c) 所示。

以 BC 部件为研究对象。作用于其上的主动力有 F ; 约束反力有 F'_{Cx} 、 F'_{Cy} 、 F_{Bx} 和 F_{By} , 其受力图如图 1.17(d) 所示。

该问题的各受力图也可画为图 1.17(e)、(f)、(g) 的形式, 为什么? 请读者自己解释。

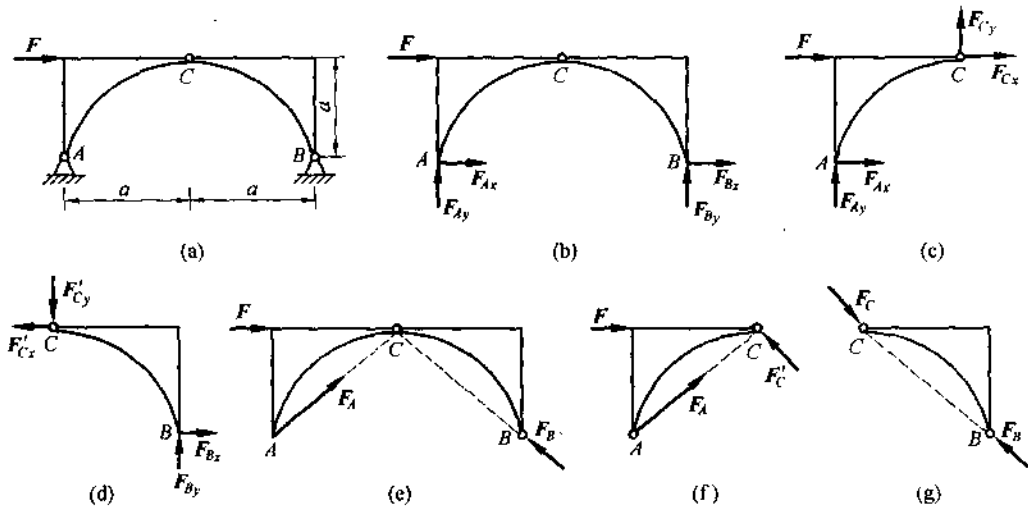
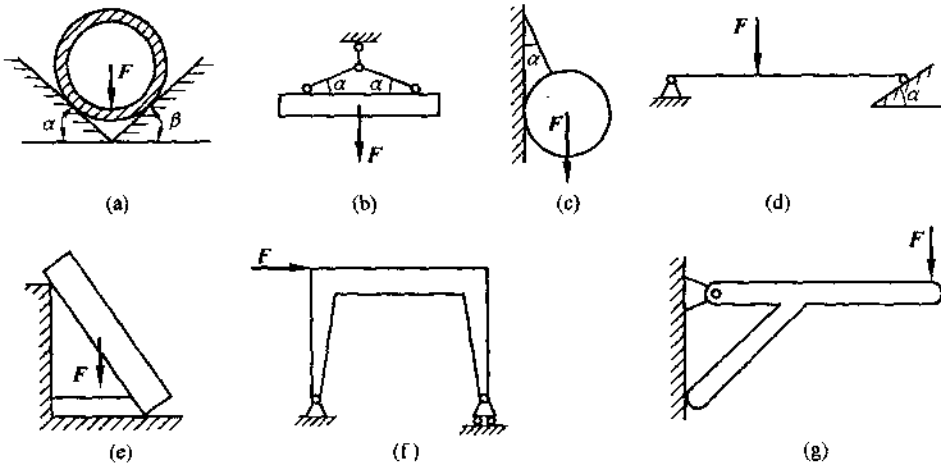


图 1.17

习 题

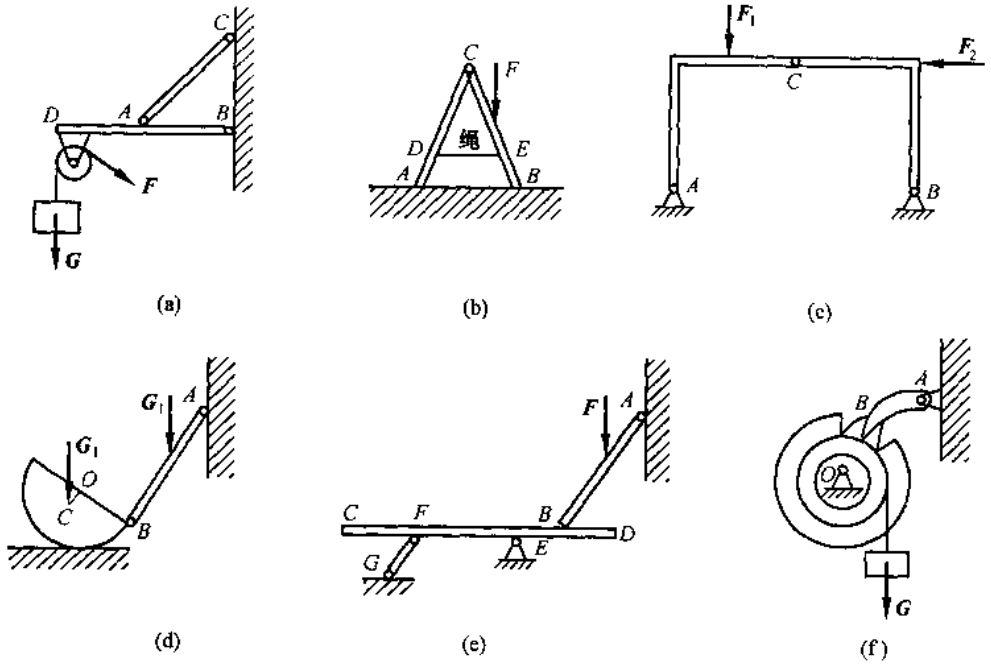
1.1 画出题 1.1 图所示各物体的受力图, 设所有接触处均为光滑接触, 除注明者外, 各物体自重不计。



题 1.1 图

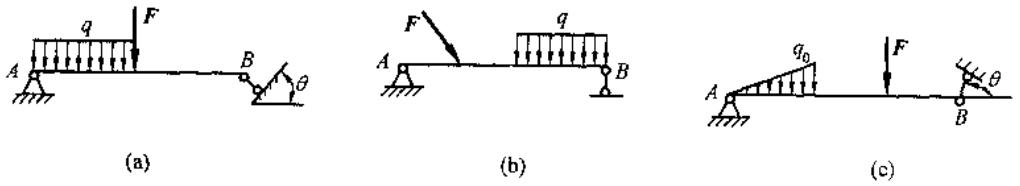
理论力学

1.2 画出题 1.2 图中指定物体的受力图。凡未特别注明者, 物体的自重均不计, 且所有接触面都是光滑的。



题 1.2 图

1.3 画出题 1.3 图中各梁的受力图, 梁的自重均不计。



题 1.3 图

第 2 章 平面基本力系

平面汇交力系与平面力偶系是两种简单力系,是研究复杂力系的基础。本章将分别用几何法与解析法研究平面汇交力系的合成与平衡问题,同时分绍平面力偶的基本特性及平面力偶系合成与平衡问题。

2.1 汇交力系的合成

平面汇交力系是指各力的作用线都在同一平面内且汇交于一点的力系。

2.1.1 汇交力系合成的几何法

力系简化的几何法是以第 1 章介绍的公理为依据,主要应用几何作图,简单的可结合三角关系计算的方法,研究力系中各分力与合力的几何关系,得出力系简化的几何条件。由于空间力系作图不方便,所以这种方法主要适用于平面力系。对于平面汇交力系,并不要求力系中各分力的作用点位于同一点,因为根据力的可传性原理,只要它们的作用线汇交于同一点即可。

先分析用几何法简化两个汇交力 F_1 和 F_2 。直接应用力的平行四边形法则,结果得合力 F_R ,几何关系如图 2.1 所示。

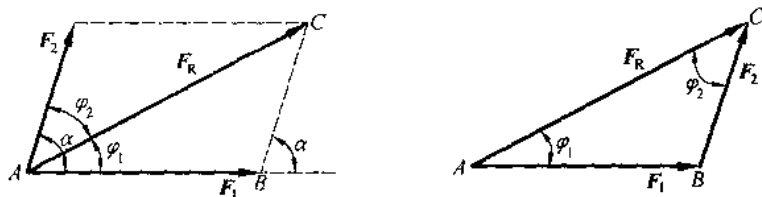


图 2.1

这一矢量关系的数学表达式为

$$F_R = F_1 + F_2 \quad (2.1)$$

图 2.2(a) 所示为作用于任一刚体上的力 F_1 、 F_2 、 F_3 和 F_4 ,它们的作用线汇交于 A 点,形成一平面汇交力系。根据力的可传性原理,将各力沿其作用线移动至汇交点 A 形成作用点相同的力系,称为共点力系,如图 2.2(b) 所示,这是汇交力系的一种特例。对此力系进行简化,求其合力,可以连续应用力的三角形法则,先将 F_1 、 F_2 合成得 F_{R1} ,再把 F_{R1} 与 F_3 合成得 F_{R2} ,以此类推,最终得到的力 F_R 就是原汇交力系 F_1 、 F_2 、 F_3 和 F_4 的合力,图 2.2(c) 所示是此力系简化的几何表达。矢量关系的数学表达式为

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (2.2)$$

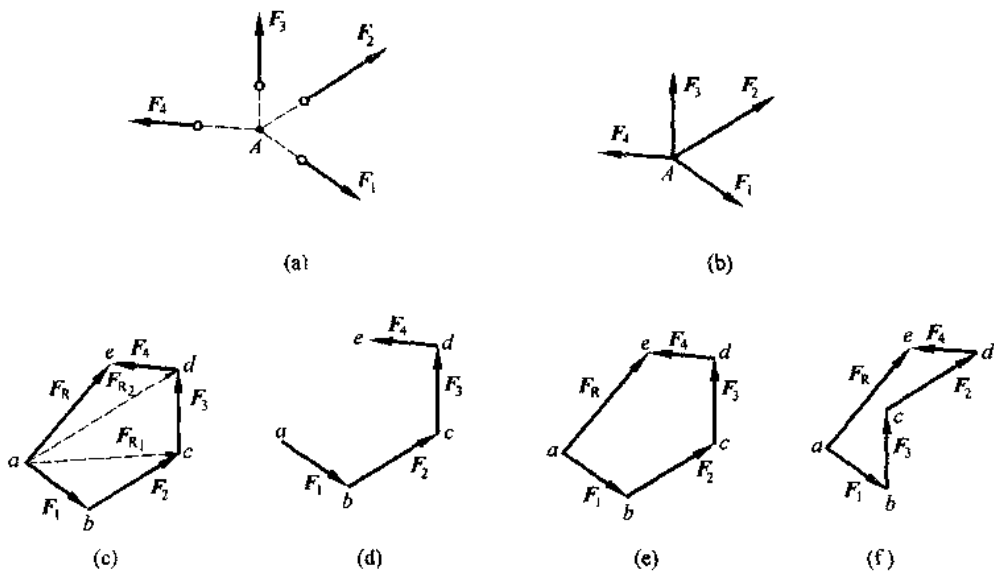


图 2.2

实际作图时,不必画出虚线所示的中间合力,只要根据一定的比例尺将表达各力矢的有向线段首尾相接,形成一个不封闭的多边形,如图 2.2(d) 所示。再用有向线段由最先画的分力矢的起点连至最后画的分力矢的终点,将不封闭的多边形封闭起来,这一有向线段表达的就是此力系的合力矢 F_R ,如图 2.2(e) 所示。各分力矢和合力矢构成的多边形 $abcde$ 称为力多边形,合力矢是力多边形的封闭边。按与各分力同样的比例,封闭边的长度表示合力的大小,合力的方位与封闭边的方位一致,指向由力多边形的起点至终点,合力的作用线通过汇交点。这种求合力矢的几何作图法称为力多边形法则。由图 2.2(f) 可见,改变各分力矢相连的先后顺序,会影响力多边形的形状,但不会影响合成的最终结果。

推广到由 n 个力组成的平面汇交力系,可得结论:

平面汇交力系合成的最终结果是一个合力,合力的大小和方向等于力系中各力的矢量和,可由力多边形的封闭边确定,合力的作用线通过力系的汇交点。

矢量关系式为

$$F_R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (2.3)$$

2.1.2 汇交力系合成的解析法

如图 2.3 所示,以各力作用线的汇交点为坐标原点建立坐标系,根据合力投影定理:合力在某一坐标轴上的投影等于各分力在同一坐标轴上投影的代数和,有

$$\begin{cases} F_{Rx} = \sum F_{ix} = \sum F_x \\ F_{Ry} = \sum F_{iy} = \sum F_y \end{cases}$$

合力的大小为

$$F_R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

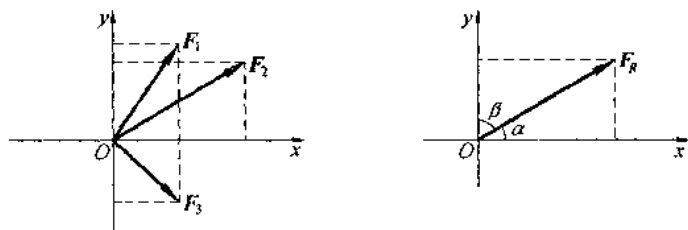


图 2.3

合力的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{F_{Rx}}{F_R}$$

$$\cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R}$$

式中 α 、 β 分别为合力 F_R 与坐标轴正向之间的夹角。

2.2 平面力对点之矩的概念及计算

力对刚体的作用效应使刚体的运动状态发生改变(包括移动与转动),其中力对刚体的移动效应可用力矢来度量;而力对刚体的转动效应可用力对点的矩(简称力矩)来度量,即力矩是度量力对刚体转动效应的物理量。

2.2.1 力对点之矩

力对点之矩是一个代数量,其绝对值等于力的大小与力臂的乘积,它的正负可按下列方法确定:力使物体绕矩心逆时针转向为正,反之为负。

力 F 与点 O 位于同一平面内,点 O 称为矩心,点 O 到力的作用线的垂直距离 h 称为力臂,如图 2.4 所示。力 F 对于点 O 的矩以 $M_O(F)$ 表示,即

$$M_O(F) = \pm Fh = \pm 2A_{\triangle OAB}$$

其中 $A_{\triangle OAB}$ 为三角形 OAB 的面积。

当力的作用线通过矩心,即力臂等于零时,它对矩心的力矩等于零。力矩的单位为 $N \cdot m$ 。

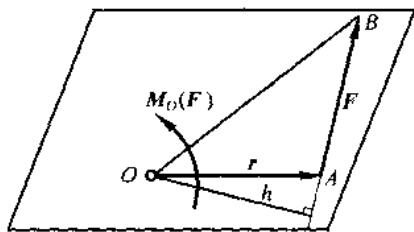


图 2.4

2.2.2 合力矩定理

定理:平面汇交力系的合力对于平面内任一点之矩等于所有各分力对于该点之矩的代数和。

证明:设 F_R 是作用于 A 点的各力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ 的合力,即

$$F_R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (2.4)$$

$$[M_O(F_R)]_x = \sum_{i=1}^n [M_O(F_i)]_x \quad (2.5)$$

上式说明:可用力矩方程式代替投影方程式求解平面汇交力系的平衡问题。

例 2.1 力 F 作用于支架上的 C 点,如图 2.5 所示。已知 $F = 1\,200\text{ N}$, $a = 140\text{ mm}$, $b = 120\text{ mm}$ 。试求力 F 对其作用面内点 A 之矩。

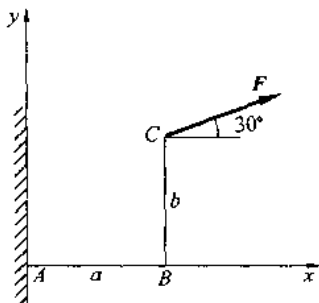


图 2.5

解 本题直接用力对点之矩计算力臂不易求得,若把力分解为水平和铅直两个分力,并利用合力矩定理计算比较方便,即

$$M_A(F) = M_A(F_x) + M_A(F_y) = -bF_x + aF_y = -40.7\text{ (N}\cdot\text{m)}$$

负号表示力矩的转向为顺时针转向。

2.3 平面力偶理论

2.3.1 力偶与力偶矩

大小相等,方向相反,作用线相互平行但不在同一直线上的两个力组成的力系称为力偶。如图 2.6(a) 所示,力偶中两个力作用线之间的距离 d 称为力偶臂,力偶所在的平面称为力偶作用面,力偶常用符号 (F, F') 表示。

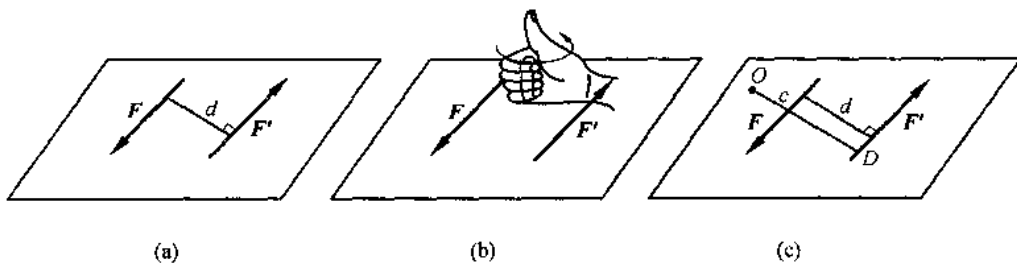


图 2.6

力偶对物体的作用效果,实际是组成力偶的两个力作用效果的叠加。由于这两个力大小相等,方向相反,所以它们在任意轴或任意方向的投影之和恒等于零,其作用效果是力使物体平移的运动效应相互抵消,但使物体转动的效应却一致。因而,力偶对物体作用的外效应是仅使物体发生转动。例如,图 2.7 所示用绞板绞管子的螺纹,将管子夹在台钳上,操作者在绞板套杆的两端各施大小相等,方向相反的平行力 F 和 F' ,这两个力组成一个力偶,使绞板转动。由于力偶的合力恒为零,所以不能用一个力与力偶等效,也不能用一个力与力偶平衡,力偶只能与力偶等效,只能用力偶与力偶平衡。力偶和力一样,是一种物体间相互机械作用的基本形式。

力偶使物体转动的效应用力偶矩度量。力偶矩表示为 $M(F, F')$ ，也可以简写为 M ，它等于力偶中力的大小与力偶臂长的乘积，即

$$M(F, F') = M = \pm Fd$$

式中的正负号表示力偶在其作用面内的转向，规定与力矩的相同，即逆时针转向时为正，反之为负。也可以用右手螺旋法则确定，如图 2.6(b)、图 2.6(c) 所示为求力偶中的两个力对力偶作用面内任一点 O 的矩，可以发现：力偶对其作用面内任一点的矩与矩心 O

的位置无关。也就是说，力偶对其作用面内任一点的矩都等于力与力偶臂的乘积，这是力偶与力矩的主要区别。力偶矩的单位与力矩的单位相同，即 $N \cdot m$ 或 $kN \cdot m$ 。

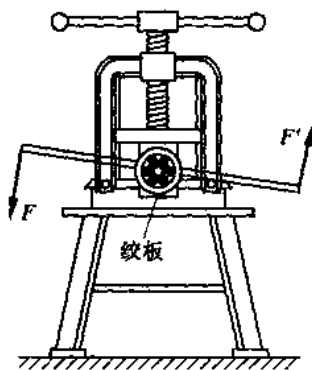


图 2.7

2.3.2 力偶的性质

性质 1 力偶中的两力对空间任一点矩的矢量和等于其力偶矩矢，而在平面情况下力偶中二力对力偶作用面内任一点之矩的代数和恒等于力偶矩，即

$$M_O(F) + M_O(F') = M$$

性质 2 力偶对刚体的转动效应完全由力偶矩矢决定。

性质 3 只要保持力偶矩的大小和转向不变，力偶可移至与其作用面相平行的任一平面，而不改变力偶对刚体的作用效应。

综合以上性质，可归纳力偶的等效条件：作用于刚体上的两个力偶，只要它们的力偶矩矢相等，则它们对刚体的作用等效。对于同一平面内的两个力偶，若两力偶矩代数相等，则它们对刚体的作用等效。

由于力偶可以在同平面内以及平行平面内移动，故力偶矩矢可以平移至刚体内的任何位置，而无需确定力偶矩矢的起点，因而力偶矩矢是自由矢量。

2.3.3 平面力偶系的合成及平衡条件

(1) 平面力偶系的合成

设在刚体的同一平面内作用有两个力偶 M_1 和 M_2 ， $M_1 = F_1 d_1$ ， $M_2 = -F_2 d_2$ ，如图 2.8(a) 所示。根据上述力偶的性质，在保持原力偶矩不变的条件下，同时改变这两个力偶的力和力偶臂，使它们具有相同的力偶臂长 d ，经变换后力偶中的力可由 $M_1 = \bar{F}_1 d$ ， $M_2 = -\bar{F}_2 d$ 算出。将这两个同臂力偶在作用面内作适当移转，使力的作用线两两重合，如图 2.8(b) 所示。将 A 点的力 \bar{F}_1 、 \bar{F}_2 及 B 点的力 \bar{F}'_1 、 \bar{F}'_2 分别合成得

$$F_R = \bar{F}_1 - \bar{F}_2 \quad F'_R = \bar{F}'_1 - \bar{F}'_2$$

由 F_R 和 F'_R 组成的力偶 (F_R, F'_R) 就是原来两个力偶的合力偶，如图 2.8(c) 所示。该合力偶的力偶矩为

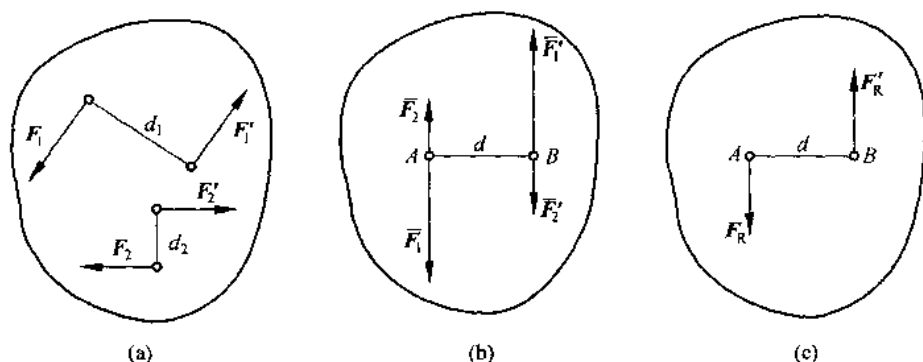


图 2.8

$$M = F_R d = (\overline{F_1} - \overline{F_2}) d = M_1 + M_2 \quad (2.6)$$

此关系推广到由任意 n 个力偶组成的平面力偶系,有

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i \quad (2.7)$$

可见,平面力偶系合成的最终结果是一个合力偶,合力偶的力偶矩等于力偶系中各力偶矩的代数和。

(2) 平面力偶系的平衡

由合成结果可知,力偶系平衡时,其合力偶的矩等于零。因此,平面力偶系平衡的必要和充分条件是:所有合力偶矩的代数和等于零,即

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (2.8)$$

例 2.2 图 2.9(a) 所示为一简支梁,在梁的 C 处作用一力偶,梁的跨度 $l = 5 \text{ m}$,求 A 、 B 两处的支座反力。

解 取 AB 梁为研究对象,因梁处于平衡状态,作用在梁上的主动力只有力偶。根据力偶只能与力偶平衡的性质, A 、 B 处的支座反力必须组成一个力偶才能满足平衡条件,同时根据可动铰支座约束反力的性质判知,支座 B 处的约束反力 F_B 必沿铅垂方向,由此可知, A 处的约束反力 F_A 必与 F_B 等值、反向、相互平行,受力分析如图 2.9(b) 所示。

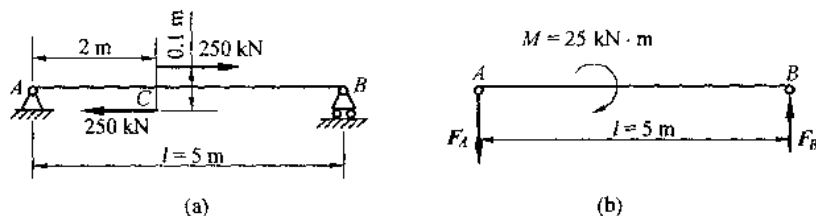


图 2.9

列力偶平衡方程

$$\sum M = 0 \quad -M + F_B \times l = 0$$

因 $M = 25 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $l = 5 \text{ m}$, 所以求得

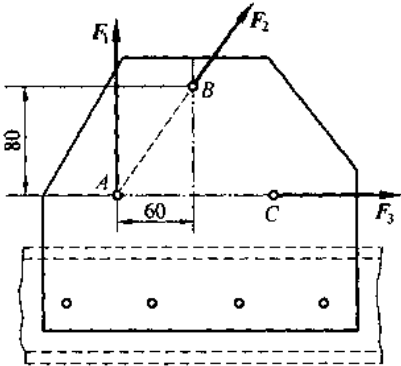
$$F_B = \frac{M}{l} = \frac{25 \text{ kN} \cdot \text{m}}{5 \text{ m}} = 5 \text{ kN}$$

$$F_A = F_B = 5 \text{ kN}$$

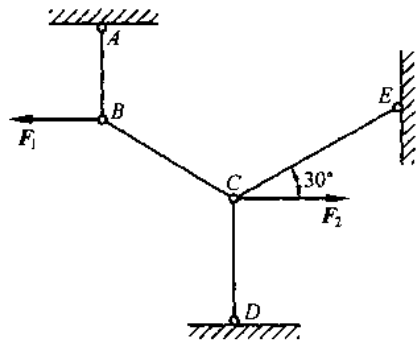
习 题

2.1 在铆接的薄板 A、B 和 C 处受力作用, 如题 2.1 图所示。\$F_1 = 100 \text{ N}\$, 沿铅直方向; \$F_2 = 50 \text{ N}\$, 力的作用线通过点 A; \$F_3 = 50 \text{ N}\$, 沿水平方向, 也通过点 A。尺寸如图所示, 求此力系的合力。

2.2 题 2.2 图所示结构中各杆的自重不计, AB 和 CD 两杆铅垂, 力 \$F_1\$ 和 \$F_2\$ 的作用线水平。已知 \$F_1 = 2 \text{ kN}\$, \$F_2 = 1 \text{ kN}\$, 求杆 CE 所受的力。

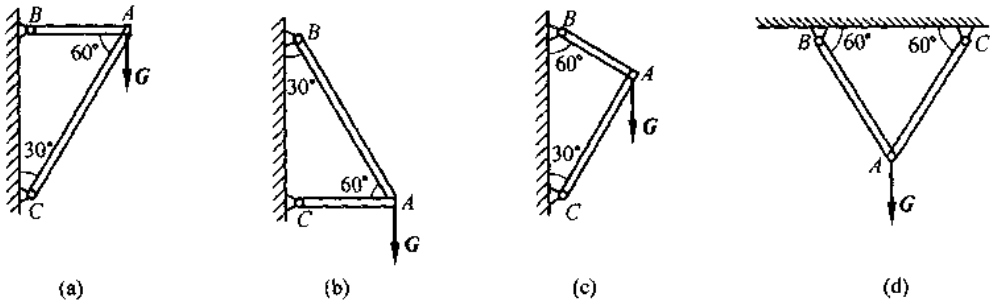


题 2.1 图



题 2.2 图

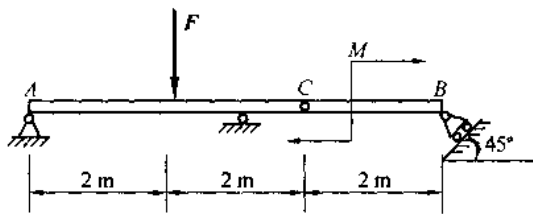
2.3 支架由杆 AB、AC 构成, A、B、C 三处都视为铰链连接, A 点作用有铅垂力 G, 求题 2.3 图所示 4 种情况下 AB、AC 杆所受的力, 并说明是拉力还是压力, 各杆自重不计。



题 2.3 图

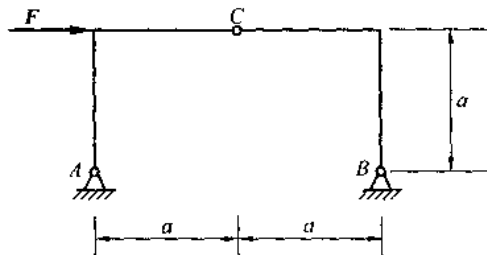
理论力学

2.4 如题 2.4 图所示,组合梁自重不计, $F = 60 \text{ kN}$, $M = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 求 C 、 B 处的约束反力。



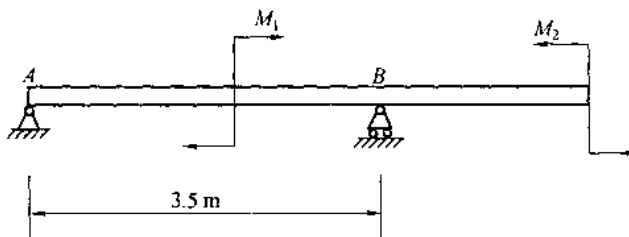
题 2.4 图

2.5 如题 2.5 图所示,三铰拱架受水平力 F 的作用,求固定铰支座 A 、 B 和铰链 C 处的约束反力。



题 2.5 图

2.6 如题 2.6 图所示,水平梁上作用着两个力偶,其中一个力偶矩 $M_1 = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 另一个力偶矩 $M_2 = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 已知 $AB = 3.5 \text{ m}$, 求 A 、 B 两处支座的约束反力。



题 2.6 图

第 3 章 平面任意力系

工程中经常遇到平面任意力系的问题,即作用在物体上的力的作用线都分布在同一平面内(或近似地分布在同一平面内),并呈任意分布力系。当物体所受的力都对称于某一平面时,也可将它视作平面任意力系问题。

本章将在前面两章的基础上,详述平面任意力系的简化和平衡问题。

3.1 平面力系向一点简化

3.1.1 力的平移定理

力系向一点简化是一种较为简便并具有普遍性的力系简化方法,此方法的理论基础是力的平移定理。

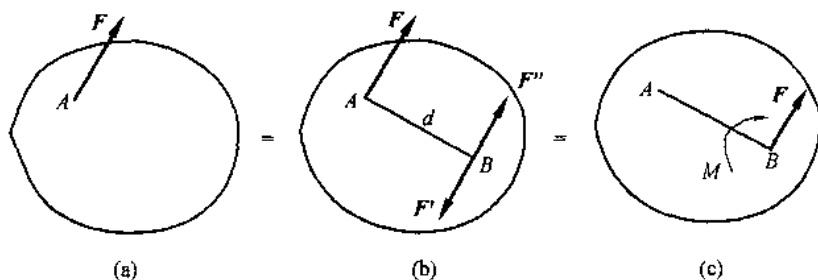


图 3.1

设一任意刚体上的点 A 处作用一力 F ,如图 3.1(a) 所示,根据加减平衡力系公理,在刚体上的另外任意点 B 处加上一对平衡力 F' 和 F'' ,如图 3.1(b) 所示,令 $F' = -F'' = F$ 。显然, F 与 F'' 构成一个力偶,其力偶矩为 $M(F, F'') = -F \cdot d$ 。可见,原作用于点 A 的力 F 与作用于点 B 的力 F' 和力偶 M 的共同作用等效,如图 3.1(c) 所示,力偶 M 称为附加力偶。而力 F 对点 B 的矩为

$$M_B(F) = -F \cdot d \quad (3.1)$$

比较可见,附加力偶的力偶矩等于原来力 F 对新作用点 B 之矩,即 $M = M_B(F)$ 。这就是力的平移定理:作用在刚体上某点 A 的力 F 可以等效地平行移到刚体上的其他任意点 B ,但必须同时附加一个力偶,此附加力偶的力偶矩等于原来点 A 的力 F 对新作用点 B 的矩。

力的平移定理说明,一个力可以用一个作用于另一点的同样大小和方向的力及一个力偶等效替代。那么反过来,一个力和一个力偶,能否由一个力等效替代呢?请读者自己思考。

3.1.2 力系向任意一点简化 主矢和主矩

设有一由 n 个力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ 组成的平面力系作用于刚体上,如图 3.2(a) 所示。将该力系向平面内任一点简化,这个任意的点称为简化中心。为了简化力系,利用力的平移定理将力系中各力向简化中心 O 等效平移,得到作用在简化中心的一个平面汇交力系 $F'_1, F'_2, F'_3, \dots, F'_n$ 和一个力偶系 $M_1 = M_O(F_1), M_2 = M_O(F_2), \dots, M_n = M_O(F_n)$,如图 3.2(b) 所示。利用已讨论过的结果,可得作用于 O 点的力 F'_R 和一个力偶 M_O ,如图 3.2(c) 所示,称 F'_R 为原力系的主矢, M_O 为原力系对简化中心 O 的主矩。也就是说,平面力系向平面任一点简化,其结果为作用于该点的一正主矢和一正主矩,即

$$\left. \begin{aligned} F'_R &= \sum F'_i = \sum F_i \\ M_O &= \sum M_O(F_i) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

在解析法中,主矢的大小和方向为

$$\left. \begin{aligned} F'_{Rx} &= \sum F_{ix}, F'_{Ry} = \sum F_{iy} \\ F'_R &= \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} \\ \cos \alpha &= F'_{Rx}/F'_R, \cos \beta = F'_{Ry}/F'_R \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

式中, α, β 分别为主矢 F'_R 与坐标轴 x, y 正向之间的夹角。

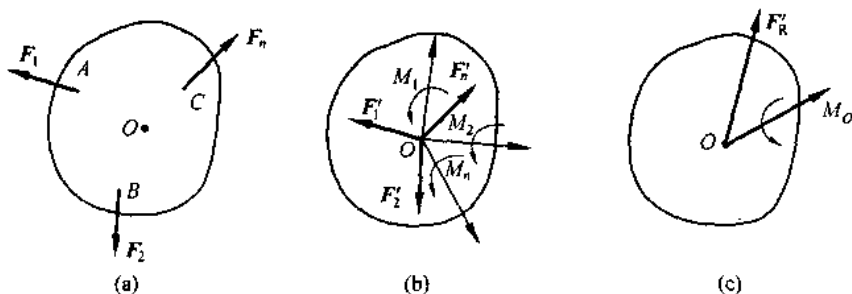


图 3.2

主矩的大小和方向为

$$\left. \begin{aligned} M_{Ox} &= \sum M_x(F_i), M_{Oy} = \sum M_y(F_i) \\ M_O &= \sqrt{[\sum M_x(F_i)]^2 + [\sum M_y(F_i)]^2} \\ \cos \alpha' &= M_{Ox}/M_O, \cos \beta' = M_{Oy}/M_O \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

式中, α', β' 分别为主矩 M_O 与坐标轴 x, y 正向之间的夹角。

特别注意:在应用力的平移定理时,力的大小、方向没变,而附加的力偶矩是按力对点的矩计算的,因此,主矢与简化中心的选取无关,主矩与简化中心的选取有关。由于上述简化中心的选取是任意的,随着简化中心选取的不同,会有不同的主矩,因而就有不同的最终结果。

3.2 力系简化的各种结果分析

平面任意力系向作用面内一点简化的结果,可能有4种情况,即

(1) $F'_R = 0, M_O \neq 0$; (2) $F'_R \neq 0, M_O = 0$; (3) $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$; (4) $F'_R = 0, M_O = 0$ 。下面分别讨论。

1. 平面任意力系简化为一个力偶的情形

如果力系的主矢等于零,而力系对于简化中心的主矩不等于零,即

$$F'_R = 0, M_O \neq 0$$

则原力系向简化中心等效平移后的汇交力系已自行平衡,只剩下附加力偶系,而附加力偶系最终合成得一个合力偶,因此原力系与此合力偶等效。即原力系简化成一个力偶,这个力偶是原力系的合力偶,因力系中各力的矢量和等于零,这时无论向平面内哪一点简化得到的都是这个力偶,所以此合力偶矩与简化中心的位置不再有关,其大小、转向都是确定的常数。这是平面力系简化的一种最简形式。

2. 平面任意力系简化为一个合力的情形

如果力系的主矢不等于零,而力系对于简化中心的主矩等于零,即

$$F'_R \neq 0, M_O = 0$$

则力系等效于经过简化中心 O 的一个力 F'_R ,这个力与原力系等效,故原力系简化的结果是一个合力。

如果平面力系向点 O 简化的结果是主矢和主矩都不等于零,即 $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$,则合力矢等于主矢, $M_O(F_R) = \sum M_O(F_i)$,其大小和方向为

$$\left. \begin{aligned} F'_R &= \sqrt{(\sum F'_{ix})^2 + (\sum F'_{iy})^2} \\ \cos \alpha &= F'_{ix}/F'_R, \cos \beta = F'_{iy}/F'_R \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中, α, β, γ 分别为主矢 F'_R 与坐标轴 x, y 正向之间的夹角。

3. 平面任意力系平衡的情况

如果力系的主矢、主矩均等于零,即

$$F'_R = 0, M_O = 0$$

则原力系平衡,这种情况将在下节详细讨论。

例 3.1 如图 3.3 所示的支架, A 端固定, B 端作用一力 $F = 100 \text{ N}$, 试求 F 力对 A 端之矩 $M_A(F)$ 。

解 1 根据定义直接求解,首先求力 F 的作用线到 A 点的距离 h , 即

$$h/m = AC \cos \alpha = 1 \times \frac{1.5}{\sqrt{1.5^2 + 2^2}} = 0.6$$

$$M_A(F)/(N \cdot m) = F \cdot h = 60$$

解 2 用解析法求解,将力 F 沿坐标轴方向分解为 $F_x = F \cos \alpha, F_y = F \sin \alpha$, 则

$$M_A(F)/(N \cdot m) = M_A(F_x) + M_A(F_y) = F \cos \alpha \times 3 + F \sin \alpha \times 1.5 =$$

$$100 \times \frac{1.5}{\sqrt{1.5^2 + 2^2}} \times 3 - 100 \times \frac{2}{\sqrt{1.5^2 + 2^2}} \times 1.5 = 60$$

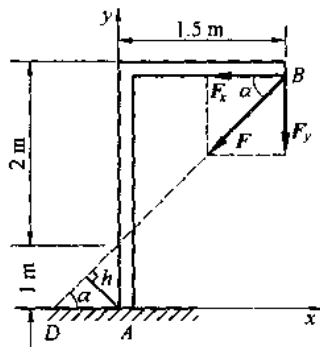


图 3.3

3.3 平面任意力系的平衡条件及平衡方程

1. 平面任意力系平衡的充分必要条件

由第 2 章平面任意力系简化理论可知：当力系的主矢和对任一确定点 A 的主矩全为零时，则合力为零，即力系为平衡力系；相反，当二者至少有一个不为零时，则力系的最简结果或是一力偶，或是一不为零的合力，即力系均为非平衡力系。前者说明，主矢和主矩全为零是力系平衡的充分条件，后者则说明主矢和主矩为零均是力系平衡的必要条件。即平面任意力系平衡的充分必要条件是：力系的主矢和对任一确定点的主矩同时为零。写成数学表达式则为

$$\left. \begin{aligned} \sum \mathbf{F}_i &= \mathbf{0} \\ \sum M_O(\mathbf{F}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

2. 平面任意力系平衡方程的基本形式

平面任意力系平衡的充分必要条件式(3.6)中第一方程为矢量方程式，在实际问题的应用中，常用两个与之等价的投影代数方程来取代之，即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

这两个投影方程与 $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ 是等价的。于是，我们就得到了完全由代数方程给出的一组平面任意力系平衡的充分必要条件，即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

按此公式，平面任意力系平衡的条件也可以表述为：力系中所有各力在两个任选正交

轴上投影的代数和分别等于零,各力对任意点之矩的代数和也同时等于零。上式也称为平面任意力系的平衡方程。

3. 平面任意力系平衡方程的其他两种形式

平面任意力系平衡方程除了基本形式外,还可以写成以下两种等价形式。

(1) 两个力矩方程和一个投影方程

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum M_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

其中 x 轴与 AB 的连线互不垂直。

(2) 三矩式

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \\ \sum M_C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

其中 A 、 B 、 C 三点不共线。

上述3组方程(3.8)、(3.9)、(3.10)都可用来解决平面任意力系的平衡问题,究竟选用哪一组方程,需要根据具体条件决定。对于受平面任意力系作用的单个刚体的平衡问题,只能写出3个独立的平衡方程,求解3个未知量。

例3.2 起重机自重 $P = 10 \text{ kN}$,以可绕铅直轴 AB 转动,起重机的挂钩上挂有重 $Q = 40 \text{ kN}$ 的重物,起重机尺寸如图3.4(a)所示。求在止推轴承 A 和轴承 B 处的约束反力,两轴承的厚度不计。

解 首先,以起重机为研究对象,建立坐标系如图3.4(b)所示。因主动力 P 和 Q 均作用在铅垂面内,故轴承 B 的约束反力 F_B 沿水平方向,假定指向右边。止推轴承 A 处的约束反力用水平力 F_{xA} 和垂直力 F_{yA} 表示,受力分析如图3.4(b)所示。

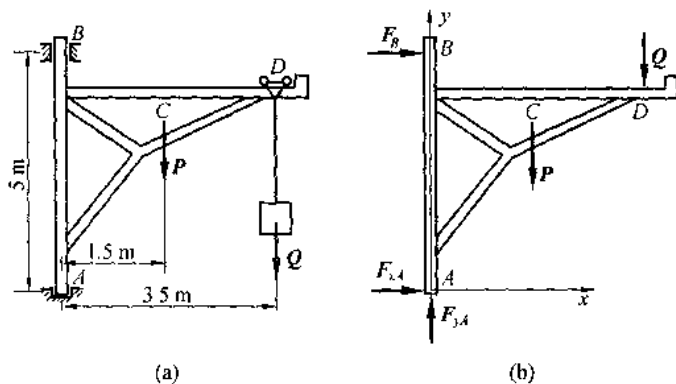


图 3.4

其次,列平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & F_{xA} + F_{xB} = 0 \\ \sum F_y = 0 & F_{yA} - P - Q = 0 \\ \sum M_A(F) = 0 & -5F_B - 1.5P - 3.5Q = 0 \end{cases}$$

最后, 带入数据求解, 得

$$F_B = -(1.5P + 3.5Q)/5 = -31 \text{ kN}$$

$$F_{xA} = -F_B = 31 \text{ kN}$$

$$F_{yA} = P + Q = 50 \text{ kN}$$

凡为负值的量, 表明它的实际指向与假定方向相反。

3.4 刚体系统的平衡、静定和静不定问题

3.4.1 刚体系统的静定问题

在工程实际问题中往往遇到由若干个物体通过适当的约束相互连接而成的系统, 这种系统称为物体系统, 简称物系。在物体系统问题中, 每个隔离体上的力系, 它的独立方程的数目是一定的, 可求解的未知数也是一定的。如果单个物体或物体系统未知量的数目正好等于独立的平衡方程的数目, 通过静力学平衡方程可完全确定这些未知量, 这种平衡问题称为静定问题。如果未知量的数目多于独立的平衡方程的数目, 仅通过静力学平衡方程不能完全确定这些未知量, 这种问题称为静不定问题或者超静定问题。对于静不定或者超静定问题, 必须考虑物体因受力作用而产生的变形, 加入某些补充方程后才能使问题得到求解。静不定问题已经超出理论力学范畴, 需在材料力学和结构力学中研究。

这里说的静定与静不定问题是对整个系统而言的, 若从该系统中取出一分离体, 它的未知量的数目多于它的独立平衡方程的数目, 并不能说明该系统就是静不定问题, 而要分析整个系统的未知量数目和独立方程式数目。

下面举一些静定和静不定问题的例子。

吊车起吊重物, 重物用 2 根绳子挂在吊钩上, 如图 3.5(a) 所示。若重物的重力 P 已知, 求绳子的拉力。以重物为研究对象, 则 2 根绳子的拉力是未知力。由图可见, 重物所受的力在吊钩处形成一平面汇交力系, 平面汇交力系有两个独立的平衡方程, 可以求解两个未知数, 所以这是个静定问题。有时为了安全起见, 用 3 根绳子悬挂重物, 如图 3.5(b) 所示, 这时重物受的仍然是平面汇交力系, 但未知的绳子拉力有 3 个, 所以变成静不定问题。

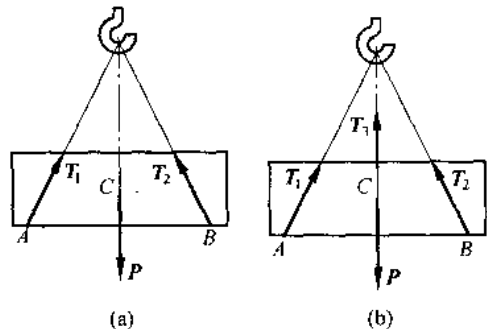


图 3.5

图 3.6(a) 所示一悬臂梁, 其面定端一般有 3 个未知的约束反力, 因对受平面任意力系作用的刚体可列出 3 个独立的平衡方程, 独立的平衡方程数与未知力的个数相等, 所

以这是个静定问题。工程实际中,为防止梁产生过大的弯曲变形,常在 B 端增加一个滚动支座,如图 3.6(b) 所示,支座增加,相应的约束反力也增加,但独立的平衡方程数没有增加,因此问题变为静不定。

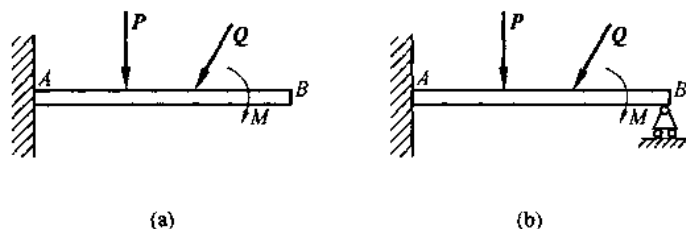


图 3.6

如图 3.7(a) 所示的三铰拱,拱由 AC 和 CB 两部分铰接而成。每个铰处有 2 个约束反力,3 个铰共有 6 个约束反力。拱受的是平面任意力系,受力分析如图 3.7(b) 所示,对其每个部分可以列 3 个独立的平衡方程,所以共有 6 个独立的平衡方程,可求 6 个未知数,是静定问题。但若将三铰拱改为二铰拱,如图 3.7(c) 所示,这种拱不再可分,只有 3 个独立的平衡方程,但 A 和 B 处共有 4 个约束反力,约束反力的个数多于独立的平衡方程数,所以这是个静不定问题。

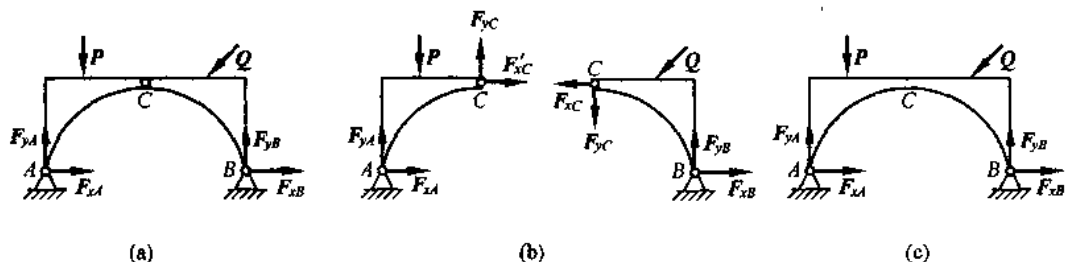


图 3.7

3.4.2 刚体系统的平衡问题

两个以上的刚体通过相互之间存在的某种约束形式所组成的系统称为刚体系或物系。物系的平衡问题仍可分为静定问题、静不定问题以及有条件的平衡问题。一个平衡的物系,其中每一个刚体所受到的力系一定是平衡力系。根据每个刚体所受力系的类型,可知每个力系所具有的独立平衡方程数 m_i , 求和即得物系整体所具有的独立平衡方程数 $m = \sum m_i$ 。如果各个力系中总的未知约束力数为 n (由于各刚体之间的相互作用力为等值、反向,所以每一对作用与反作用的约束力只能计为一个未知约束力), 则,当 $n = m$ 时,物系的平衡问题为静定问题;当 $n > m$ 时,物系的平衡问题为静不定问题;当 $n < m$ 时,物系的平衡问题为有条件的平衡问题。此时,如不满足平衡条件,则物系的力学问题(包括求未知的约束力)不属于静力学问题,而是一个动力学的问题。

在求解静定的物体系的平衡问题时,可选每个物体为研究对象,列出全部平衡方程,然后求解;也可以先取整个系统为研究对象,列出平衡方程,这样的方程不包含内力,式中未知量较少,解出部分未知量后,再从系统中选取某些物体作为研究对象,列出另外的平

理论力学

衡方程,直至求出所有的未知量为止。在选择研究对象和列平衡方程时,应使每一个平衡方程的未知量个数尽可能少,最好是只含有一个未知量,以避免求解联立方程。此外,在求解过程中应注意以下几点。

(1) 首先判断物体系统是否属于静定问题。

(2) 恰当地选择研究对象。在一般情况下首先以系统的整体为研究对象,这样不会出现未知的内力,易于解出未知量。当不能求出未知量时,应立即选取单个物体或部分物体的组合为研究对象,一般应先选受力简单而作用有已知力的物体为研究对象,求出部分未知量后再研究其他物体。

(3) 受力分析。首先从二力构件入手可使受力图比较简单有利于解题,解除约束时要严格地按照约束的性质画出相应的约束力,切忌凭主观想象画力。对于一个销钉连接 3 个或 3 个以上物体时,要明确所选对象中是否包括该销钉,解除了哪些约束,然后正确画出相应的约束力。画受力图时关键在于正确画出铰链反力。除二力构件外,通常用二分力表示铰链反力,不画研究对象的内力,两物体间的相互作用力应该符合作用与反作用定律,即作用力与反作用力必定等值反向和共线。

(4) 列平衡方程求未知量。列出恰当的平衡方程,尽量避免在方程中出现不要求的未知量。为此可恰当地运用力矩方程,适当选择两个未知力的交点为矩心,所选的坐标轴应与较多的未知力垂直,判断清楚每个研究对象所受的力系及其独立方程的个数,物体系统独立平衡方程的总数。避免列出不独立的平衡方程,解题时应从未知力最少的方程入手,尽量避免联立求解。

(5) 校核。求出全部所需的未知量后可再列一个不重复的平衡方程,将计算结果代入,若满足方程则计算无误。

例 3.3 如图 3.8(a) 所示,平面结构由 AB 、 BC 两均质杆在 B 处用销钉连接, A 、 C 处由固定支座支承,在销钉 B 上悬挂一重物。已知重物重 Q ,均质杆 AB 重 P_1 , BC 杆重 P_2 。试求销钉 B 对杆 BC 的约束反力。

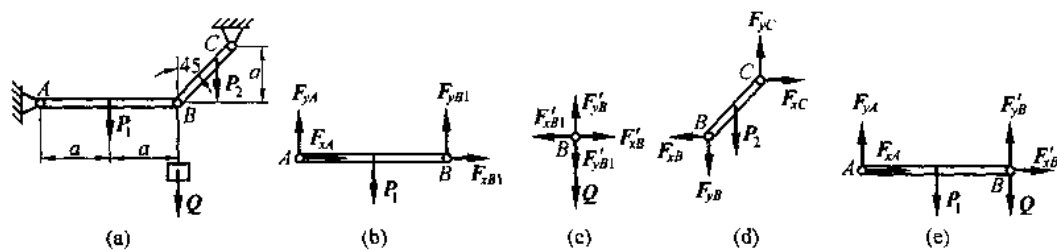


图 3.8

题意分析:就此系统整体而言,销钉 B 对杆 BC 的约束反力是内力,所以必须取分离构件为研究对象才能求出。另外,因 AB 杆、 BC 杆和销钉 B 上都作用有主动力,它们通过销钉 B 相互影响,所以仅取 BC 杆或销钉 B 为研究对象,也求不出此约束反力。

解 1 分别取杆 AB 、销钉 B 及杆 BC 为研究对象,受力分析如图 3.8(b)、3.8(c) 及 3.8(d) 所示。根据题意,欲求的力是 F_{xB} 和 F_{yB} ,销钉上的 F'_{xB} 和 F'_{yB} 与 F_{xB} 和 F_{yB} 、 F'_{xB1} 和 F'_{yB1} 与 F_{xB1} 和 F_{yB1} 是作用力与反作用力的关系。

对图 3.8(b), 有

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \quad 2aF_{yB1} - aP_1 = 0 \quad (\text{a})$$

对图 3.8(c), 有

$$\sum F_y = 0 \quad F'_{yB} - F'_{yB1} - Q = 0 \quad (\text{b})$$

对图 3.8(d), 有

$$\sum M_C(\mathbf{F}) = 0 \quad aF_{xB} - aF_{xB} + \frac{a}{2}P_2 = 0 \quad (\text{c})$$

注意到:

$$F'_{yB} = F_{yB} \quad F'_{yB1} = F_{yB1}$$

由式(a)和(b)得

$$F_{yB} = Q + \frac{P_1}{2}$$

$$F_{xB} = \frac{P_1 + P_2}{2} + Q$$

解2 分别以杆 BC 和杆 AB 与销钉 B 的组合体为研究对象, 受力分析如图 3.8(d) 和 3.8(e) 所示。

对图 3.8(e), 有

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \quad 2F'_{yB} - 2aQ - aP_1 = 0 \quad (\text{d})$$

对图 3.8(d), 有

$$\sum M_C(\mathbf{F}) = 0 \quad aF_{yB} - aF_{xB} + \frac{1}{2}aP_2 = 0 \quad (\text{e})$$

由式(d)得

$$F_{yB} = Q + \frac{1}{2}P_1$$

带入式(e)得

$$F_{xB} = \frac{P_1 + P_2}{2} + Q$$

3.5 摩 擦

在以前的讨论中, 把物体间的接触都假设是理想光滑的。实际上, 这种完全光滑的接触是不存在的, 两物体的接触面之间一般都有摩擦。只是在有些问题中, 摩擦力很小, 对所研究的问题影响较小, 可以忽略不计, 因而把接触面看做是光滑的。但是, 对于另外一些实际问题, 如汽车在公路上行驶, 皮带轮和摩擦轮的传动等, 摩擦是明显的, 甚至起主要作用, 此时摩擦不能被忽略而必须加以考虑。

任何物体的表面都不可能是绝对光滑的, 所以任何相互接触物体的表面, 如果存在相对滑动或滑动的趋势, 在接触面的切面上必然产生阻碍滑动的阻力, 这种阻力就称为摩擦力。摩擦力是两个相互接触物体表面起阻碍其相对滑动趋势的阻力。若两个接触的表而有相对滑动的趋势而尚未产生运动, 此时的摩擦力称为静滑动摩擦力; 若已产生滑动, 此时的摩擦力称为动滑动摩擦力。下面分别讨论这两种状态下的摩擦力。

3.5.1 滑动摩擦

(1) 静滑动摩擦力, 静滑动摩擦力定理

将重 P 的物体放在粗糙的水平面上, 并施加一水平力 F , 如图 3.9 所示。根据观察可知, 当 F 的大小不超过某一数值时, 物体虽有向右滑动的趋势, 但仍保持相对静止。这个现象表明, 物体除受法向反力 F_N 之外, 还有一水平向左的反力 F_s , 如图 3.9(b) 所示。 F_s 即为静滑动摩擦力。当力 F 从零开始逐渐增加, 使物体处于将动未动的临界状态时所对应的

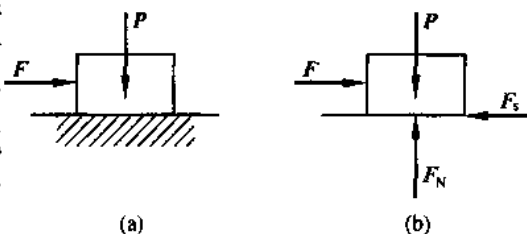


图 3.9

静滑动摩擦力称为最大静滑动摩擦力, 简称为最大静摩擦力, 记作 F_{max} 。此后如果力 F 继续增大, 物体与水平面之间产生相对滑动, 静滑动摩擦力也就变成动滑动摩擦力。这是静摩擦力与一般约束反力不同的地方。

静滑动摩擦力的性质如下。

① 当物体与约束面之间有正压力并有相对滑动趋势时, 沿接触面切面方向产生静滑动摩擦力, 摩擦力的方向与物体滑动趋势的方向相反。

② 静摩擦力的大小由平衡条件确定, 其数值在零与最大值之间, 即

$$0 < F_s < F_{max}$$

当物体处于由静止到运动的临界状态时, 静摩擦力达到最大值。

使物体保持静止的最大摩擦力 F_{max} 的大小与正压力 F_N 成正比, 引入比例系数 f , 有

$$F_{max} = fF_N \quad (3.11)$$

式中 F_N ——正压力, 即接触面的法向约束反力;

f ——静滑动摩擦系数, 它与材料的性质和擦触面情况有关, 一般通过实验测定, 是个无量纲量。

式(3.11)称为静滑动摩擦力定律(又称库仑摩擦定律)。

(2) 动滑动摩擦力, 动滑动摩擦力定理

若力 F 继续增大, 临界状态将被打破, 物体开始运动。对应物体运动时的摩擦力称为动滑动摩擦力, 简称动摩擦力, 记为 F_d 。通常

$$F_{max} > F_d \quad (3.12)$$

物体相对滑动时产生的动摩擦力 F_d 的大小与正压力 F_N 成正比, 即

$$F_d = \mu F_N \quad (3.13)$$

式中, μ 称为动滑动摩擦系数, 为无量纲量, 它与材料属性及接触面情况有关。

式(3.13)称为动滑动摩擦力定律。

表 3.1 列出了几种材料的摩擦系数。

表 3.1

材料名称	静滑动摩擦系数(f)		动滑动摩擦系数(μ)	
	无润滑	有润滑	无润滑	有润滑
钢 - 钢	0.15	0.10 ~ 0.20	0.15	0.05 ~ 0.10
钢 - 铸铁	0.30	—	0.18	0.05 ~ 0.15
钢 - 青铜	0.15	0.10 ~ 0.15	0.15	0.10 ~ 0.15
铸铁 - 皮革	0.30 ~ 0.50	0.15	0.60	0.15
木材 - 木材	0.40 ~ 0.60	0.10	0.20 ~ 0.50	0.07 ~ 0.15
青铜 - 青铜	—	0.10	0.20	0.07 ~ 0.17

3.5.2 摩擦角与自锁现象

1. 摩擦角

正压力 F_N 与静摩擦力 F_s 的合力 F_R 称为全约束反力, 设全约束反力与接触面法线的夹角为 α , 如图 3.10 所示, 则

$$\tan \alpha = \frac{F_s}{F_N}$$

当物体处于临界状态时, 摩擦力达到最大值, 即 F_{\max} , 这时 α 也达到其最大值, 用 φ_f 表示, 即 $\varphi_f = \alpha_{\max}$, 有

$$\tan \varphi_f = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{F_N f}{F_N} = f$$

式中, φ_f 称为摩擦角。

由于物体可以在切平面上沿任意方向滑动, 而每一个方向的滑动都可以找到一条与摩擦角对应的全约束反力的作用线, 所有方向的全约束反力作用线在空间形成一个锥形, 称为摩擦锥, 如图 3.11 所示。

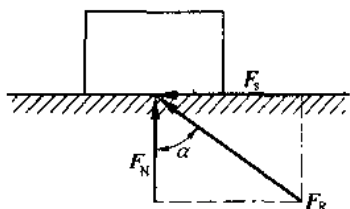


图 3.10

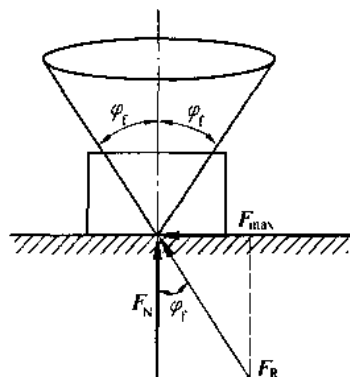


图 3.11

2. 自锁现象

主动力 P 与 T 的合力 Q 称为全主动力。设全主动力 Q 与法线之间的夹角为 φ , 则由上述讨论可知, 随着 P 增大, φ 减小; 随着 T 增大, φ 增大(见图 3.12)。

理论力学

由于摩擦力的特性全约束反力的作用线不可能在摩擦锥之外,而全主动力的作用线与接触面法线之间的夹角则可任意。当 $\varphi \leq \varphi_f$ 时,物体不会移动,因为全约束反力与全主动力总能构成二力平衡力系;当 $\varphi > \varphi_f$ 时,全约束反力与全主动力不能构成平衡力系,物体将发生滑动。亦即当主动力的作用线在摩擦锥之内($\varphi \leq \varphi_f$)时,不论全主动力 Q 有多大,物体都能保持静止不动,这种现象称为自锁现象。自锁现象所对应的条件 $\varphi \leq \varphi_f$ 称为自锁条件。

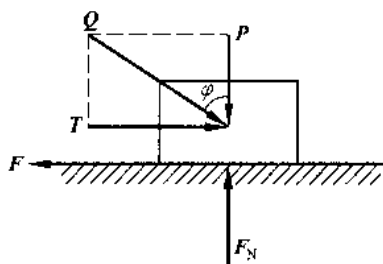


图 3.12

工程中常利用和避免自锁现象,如螺纹千斤顶的螺纹杆应保证能自锁,而车床的丝杆则要避免自锁。

3. 考虑摩擦的平衡问题

考虑摩擦的平衡问题与不考虑摩擦的平衡问题在解法上无本质区别,但是考虑摩擦的平衡问题,在受力分析时,必须考虑摩擦力。摩擦力总是沿着接触面的切面并与物体相对滑动的趋势相反。求解时还必须判断物体是处于何种状态。若物体处于非临界平衡态,则摩擦力的大小是未知量,要应用平衡方程确定;若物体处于临界平衡态,则此时的摩擦力 $F = F_{\max} = fF_N$,相当于多了一个补充方程,或者可以认为摩擦力是已知量。要注意的是,由于静摩擦力 F 的值可以在 $0 \sim F_{\max}$ 之间变化,所以在考虑摩擦的平衡问题中,主动力的值也允许在一定范围变化。

例 3.4 重 P 的物体放在倾角为 θ 斜面上,物体与斜面间的摩擦角为 α_m ,且 $\theta > \alpha_m$ 。如在物体上作用一力 F_Q ,此力与斜面平行,如图 3.13(a) 所示。求能使物体保持平衡的力 F_Q 的值。

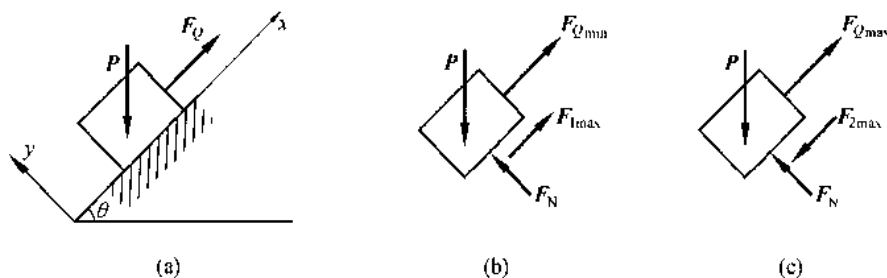


图 3.13

解 由于 $\theta > \alpha_m$,物体在自重作用下不能在斜面上保持平衡。当作用力逐渐增大使其刚好拉住物块时,物块处于平衡的临界状态,此时 $F_Q = F_{Q\min}$,受力如图 3.13(b) 所示。继续增大 F_Q 的值,可能使物块向上滑动,当物块处在向上滑动的临界状态时, $F_Q = F_{Q\max}$,受力如图 3.13(c) 所示。根据物体不下滑与不上滑两个临界状态,可确定出平衡时 F_Q 的取值范围应为

$$F_{Q\min} < F_Q < F_{Q\max}$$

为求出两个临界状态时的 F_Q 值,取物块为研究对象。首先考虑物体不下滑的临界状态,受力如图 3.13(b) 所示,列方程如下

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Q\min} + F_{1\max} - P\sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_N - P\cos\theta = 0$$

另有
得

$$F_{1\max} = F_N \tan \alpha_m$$

$$F_{Q\min} = P(\sin\theta - \tan \alpha_m \cos\theta)$$

再考虑物体不上滑的临界状态,受力如图 3.13(c) 示,列方程如下

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Q\max} + F_{2\max} - P\sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_N - P\cos\theta = 0$$

另有
得

$$F_{2\max} = F_N \tan \alpha_m$$

$$F_{Q\max} = P(\sin\theta + \tan \alpha_m \cos\theta)$$

于是,物体平衡时力 F_Q 大小为

$$P(\sin\theta - \tan \alpha_m \cos\theta) \leq F_Q \leq P(\sin\theta + \tan \alpha_m \cos\theta)$$

例 3.5 如图 3.14(a) 所示,钳形夹具夹住一重物 M, M 重 P , 已知 $DE = 2a$, $AB = BC = 2a$, $H = 4a$, $\angle AOB = \angle OCB = 90^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$, 夹具自重不计。求保持重物不至落下的最小摩擦系数 f 。

解 取整体为研究对象,受力分析如图 3.14(a) 所示,显然有

$$T = P$$

再取节点 O 研究,受力分析如图 3.14(b) 所示,显然有

$$T_A = T_C = T = P$$

再研究 CBD 部分,受力分析如图 3.14(c) 所示,设夹具与重物接触点处于即将滑动的临界状态,列平衡方程:

$$\sum M_B(F) = 0 \Rightarrow T'_C \cdot 2a - F'_N \cdot 4a + F_{\max} \cdot a = 0$$

因为 $F_{\max} = fF_N$,代入上式,得

$$F_N = \frac{2P}{4-f}$$

$$F_{\max} = F_N f = \frac{2P}{4-f} f$$

下面研究重物 M 受力,如图 3.14(d) 所示,设重物处于即将下滑的临界平衡状态,列平衡方程:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2F'_{\max} - P = 0$$

得

$$F'_{\max} = \frac{P}{2}$$

由

$$F'_{\max} = F_{\max}$$

得

$$\frac{2P}{4-f} f = \frac{P}{2}$$

$$f = 0.8$$

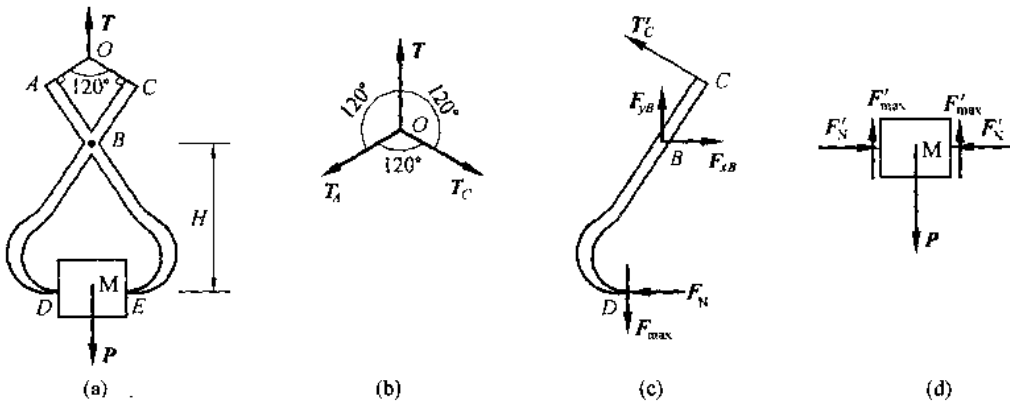
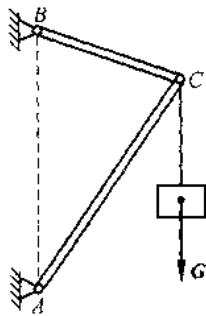


图 3.14

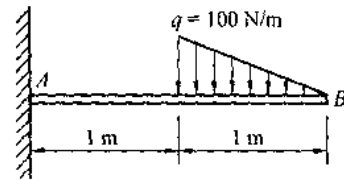
习 题

3.1 如题 3.1 图所示,光滑三角铰支架中,已知 $AB = AC = 2\text{ m}$, $BC = 1\text{ m}$,在 C 上悬挂一重为 10 kN 的重物。不计杆重,求两杆所受的力。

3.2 作用在悬臂梁上的分布载荷如题 3.2 图所示,试求该载荷对 A 端的力矩。

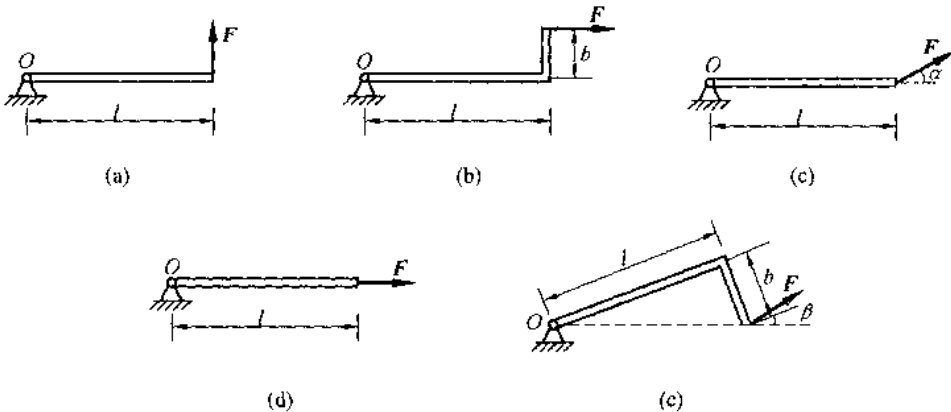


题 3.1 图



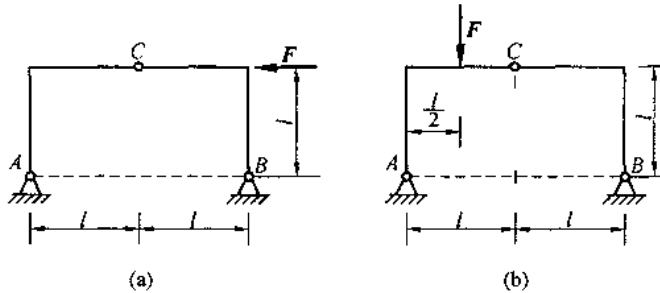
题 3.2 图

3.3 试计算题 3.3 图中各杆件上的力 F 对点 O 的矩。



题 3.3 图

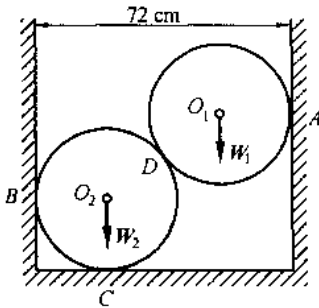
3.4 三铰拱钢架受集中载荷 F 作用,不计架自重,求题 3.4 图所示两种情况下支座 A 、 B 的约束力。



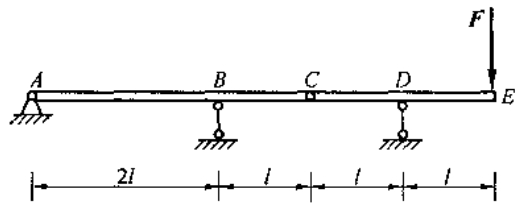
题 3.4 图

3.5 如题 3.5 图所示,将两个相同的光滑圆柱放在矩形槽内,各圆柱的半径 $R = 20\text{ cm}$,重 $W_1 = W_2 = 600\text{ N}$,求接触点 A 、 B 、 C 的约束反力。

3.6 多跨梁的支承及载荷情况如题 3.6 图所示,求支座 A 、 B 和 D 的反力。



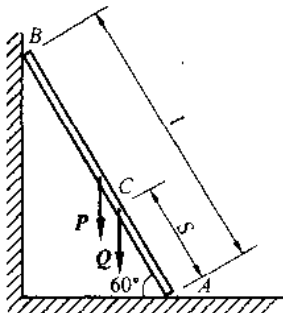
题 3.5 图



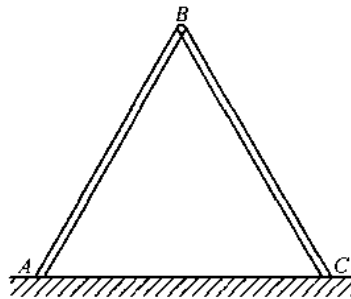
题 3.6 图

3.7 梯子 AB 靠在墙上,其质量为 $P = 200\text{ N}$,如题 3.7 图所示,梯长为 l ,并与水平面交角为 60° ,已知接触面间的摩擦系数均为 $f = 0.25$ 。有一重为 $Q = 650\text{ N}$ 的人沿梯子上爬,问人所能达到的最高点 C 到 A 点的距离 S 应为多少?

3.8 两根相同的均质杆 AB 和 BC ,端点 B 用铰链连接, A 、 C 端放在粗糙水平面上,如题 3.8 图所示。当 ABC 成等边三角形时,系统在铅直面内处于临界平衡态。求杆端与水平面的摩擦系数。



题 3.7 图



题 3.8 图

第 4 章 空间力系

力的作用线在空间任意分布的力系称为空间力系。工程中常见物体所受各力的作用线并不都在同一平面内,而是空间分布的,例如,车床主轴、起重设备、高压输电线塔和飞机的起落架等结构。设计这些结构时,需要空间力系的平衡条件进行计算。

与平面力系一样,空间力系分为空间汇交力系、空间力偶系和空间任意力系。

4.1 空间汇交力系

4.1.1 力在直角坐标轴上的投影及其分解

若已知力 F 在正交坐标系 $Oxyz$ 三轴间的夹角分别为 α 、 β 、 γ ,如图 4.1 所示,则力在 3 个轴上的投影等于力 F 的大小乘以与各轴夹角的余弦,即

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

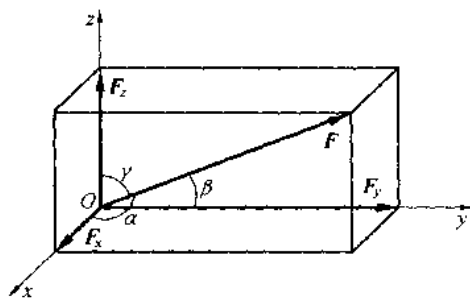


图 4.1

在空间力系问题中计算力在轴上的投影时,由于受给定的条件所限,常常会遇到力与某轴之间的夹角不易求得,这时可采用二次投影法,即先将力投影到某坐标平面上,得到一力矢量,然后再将此力矢量投影到坐标轴上。如图 4.2(a) 所示的力 F ,已知角 γ 和 φ ,则力 F 在各坐标轴上的投影分别为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cos \varphi = F \sin \gamma \cos \varphi \\ F_y &= F_{xy} \sin \varphi = F \sin \gamma \sin \varphi \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

当力 F 沿直角坐标轴分解时,分力 F_x 、 F_y 、 F_z 为矢量,它们应由力的平行四边形法则或平行六面体法则的逆运算而求得。若用 i 、 j 、 k 分别表示沿 x 、 y 、 z 方向的单位矢量,则

$$F = F_x + F_y + F_z = F_x i + F_y j + F_z k \quad (4.3)$$

由此,力 F 在坐标轴上的投影和力沿坐标轴的正交分矢量间的关系可表示为

$$F_x = F_x i \quad F_y = F_y j \quad F_z = F_z k \quad (4.4)$$

如果已知力 F 在正交轴系 $Oxyz$ 的 3 个投影,则力 F 的大小和方向余弦分别为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos(F, i) &= \frac{F_x}{F} \\ \cos(F, j) &= \frac{F_y}{F} \\ \cos(F, k) &= \frac{F_z}{F} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

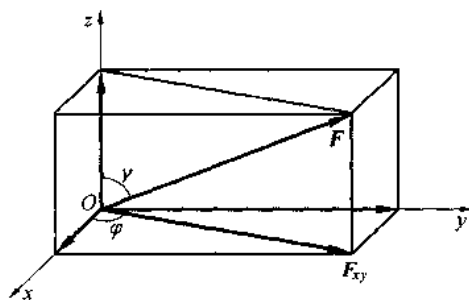


图 4.2

4.1.2 空间汇交力系的合成与平衡条件

推广平面汇交力系合成法则得:空间汇交力系的合力等于各分力的矢量和,合力的作用线通过汇交点。合力矢为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (4.6)$$

由式(4.3)可得

$$\mathbf{F}_R = \sum F_{xi} \mathbf{i} + \sum F_{yi} \mathbf{j} + \sum F_{zi} \mathbf{k} \quad (4.7)$$

其中, $\sum F_{xi}$ 、 $\sum F_{yi}$ 、 $\sum F_{zi}$ 为 \mathbf{F}_R 沿 x 、 y 、 z 轴的投影。

由此可得合力的大小和方向余弦为

$$\left. \begin{aligned} F_R &= \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} \\ \cos(F_R, i) &= \frac{\sum F_x}{F_R} \\ \cos(F_R, j) &= \frac{\sum F_y}{F_R} \\ \cos(F_R, k) &= \frac{\sum F_z}{F_R} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

例 4.1 棱长为 a 的正立方体上作用有力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 , 如图 4.3(a) 所示, 试计算各力在 3 个坐标轴上的投影。

解 求 \mathbf{F}_1 的投影可应用二次投影法。如图 4.3(b) 所示, 先将 \mathbf{F}_1 投影到 xOy 平面内得

$$F_{1xy} = F_1 \cos \alpha = \sqrt{6} F_1 / 3$$

然后将 F_{1xy} 投影于 x 、 y 轴, 得

$$F_{x_1} = -F_{1xy} \sin 45^\circ = -\sqrt{3} F_1 / 3$$

$$F_{y_1} = -F_{1xy} \cos 45^\circ = -\sqrt{3} F_1 / 3$$

F_1 在 Oz 轴上的投影为

$$F_{z_1} = F_1 \sin \alpha = \sqrt{3} F_1 / 3$$

同理, 求得 F_2 的投影为(见图 4.3(c))

$$F_{x_2} = -F_2 \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_2$$

$$F_{y_2} = 0$$

$$F_{z_2} = F_2 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} F_2$$

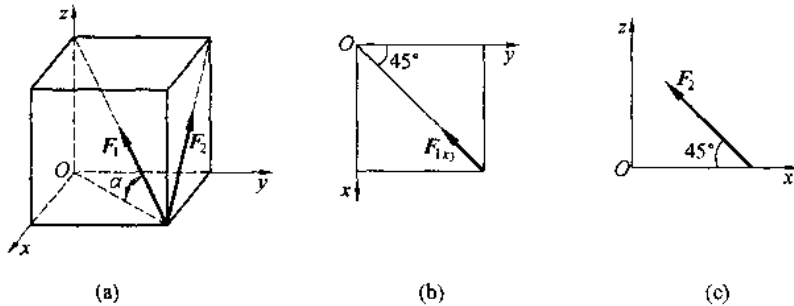


图 4.3

4.2 力 矩

研究空间力系问题, 需要引入两个新的概念, 即空间力对轴之矩和空间力对点之矩。

4.2.1 空间力对轴之矩

为了描述力使刚体绕某轴转动的效应, 引入力对轴之矩的概念, 即力 F 对某轴的矩是力使刚体绕该轴转动作用的度量。

设力 F 在坐标平面 xOy 的投影为 F_{xy} , 如图 4.4 所示, 则力 F 对 z 轴之矩等于 F_{xy} 在平面上对其坐标原点 O 之矩, 以 $M_z(F)$ 表示力 F 对 z 轴之矩, 则有

$$M_z(F) = M_O(F_{xy})$$

而且规定 $M_O(F_{xy})$ 的正转向为在 xOy 平面上的逆时针转向。

同样可定义力 F 分别对 x 、 y 轴之矩为

$$M_x(F) = M_O(F_{yz})$$

$$M_y(F) = M_O(F_{zx})$$

设力 F 的作用点 A 的坐标为 (x, y, z) , 力的矢量为 $F = F_x i + F_y j + F_z k$, 则

$$M_z(F) = M_O(F_{xy}) = M_O(F_x, i) + M_O(F_y, j) = -F_{xy} + F_{yx}$$

即

$$M_z(F) = F_y x - F_x y$$

同理可得

$$M_x(F) = F_z y - F_y z$$

$$M_y(F) = F_x z - F_z x$$

式中 F_x, F_y, F_z —— 力 F 沿 3 个坐标轴分力的大小;

x, y, z —— 力 F 在 3 个坐标轴上的坐标。

此组解析式, 在求力对轴的矩时很有用, 掌握这种计算方法, 特别是力对轴之矩正负的判定, 学会灵活运用。

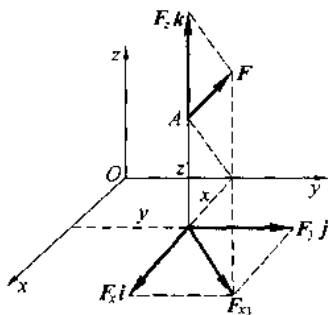


图 4.4

4.2.2 空间力对点之矩

力矩, 即力对点之矩, 是力使物体绕某点 (称为力矩中心, 简称矩心) 转动效应的量度, 它也是力学中的一个重要概念。实践表明, 力使物体绕某点转动的效应, 取决于: ① 力的大小以及矩心到力作用线的距离 (称为力臂); ② 力和矩心所组成的平面的位置 (力矩作用平面在空间的方位, 如图 4.5 所示); ③ 力使物体绕矩心转动的转向。

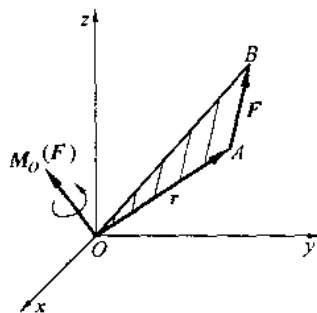


图 4.5

图 4.5 所示作用于刚体上的空间力系中的某一力 F , 其作用点在 A 点, 力矢的终点在 B 点, 力 F 使刚体绕空间某点 O (定的矩心) 转动的效应可以用力作用点的位置矢 r 与力 F 的矢积来表示, 记为 $M_O(F)$, 称为力 F 对 O 点之矩矢。显然指定了矩心之后, 力对点之矩矢为一固定矢量。若以 (x, y, z) 表示力 F 作用点的位置坐标, 以 (F_x, F_y, F_z) 表示力 F 在 3 个坐标轴上的投影, 则力对点 O 的矩可表示为

$$M_O(F) = r \times F = (xi + yj + zk) \times (F_x i + F_y j + F_z k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

力矩矢 $M_O(F)$ 指向按右手螺旋法则由力使物体绕矩心的转向来确定。

展开上式可得力矩矢 $M_O(F)$ 在 3 个坐标轴上的投影分别为

$$\begin{aligned} [M_O(F)]_x &= yF_z - zF_y \\ [M_O(F)]_y &= zF_x - xF_z \\ [M_O(F)]_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{4.9}$$

理论力学

在平面力系的特殊情况下,各力作用线在同一平面内,这些力对该平面内某一点之矩皆垂直于此平面而成共线矢量,这时把力对点之矩定义为代数量,即用正负号表示转向,并规定力使刚体绕矩心逆时针方向旋转取正号,反之取负号。

力对点之矩的单位在国际单位制中是 $\text{N} \cdot \text{m}$ (牛·米) 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ (千牛·米)。

4.2.3 力对点之矩与力对通过该点的轴之矩的关系

取矩心 O 为坐标原点,建立直角坐标系 $Oxyz$,以 x, y, z 和 F_x, F_y, F_z 分别表示矢径 r 和力矢 F 在各坐标轴上的投影,则 r 和 F 可表示为

$$\begin{aligned} r &= xi + yj + zk \\ F &= F_x i + F_y j + F_z k \end{aligned}$$

根据矢积运算规则有

$$M_O(F) = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)i + (zF_x - xF_z)j + (xF_y - yF_x)k$$

由式(4.9)得

$$M_O(F) = [M_O(F)]_x i + [M_O(F)]_y j + [M_O(F)]_z k \quad (4.10)$$

可见, $[M_O(F)]_x, [M_O(F)]_y, [M_O(F)]_z$ 既是力 F 对过 O 点的 3 个坐标轴的矩,也是矩矢 $[M_O(F)]$ 在 3 个坐标轴上的投影。

由此可以得出结论:力对点之矩矢在过该点坐标轴上的投影就等于力对该轴之矩,这是空间任意力系简化的依据之一。力矩矢的数学运算与力矢的运算类似,可以利用已知的矩矢向坐标轴投影来求力对轴之矩;也可以由矩矢在坐标轴上的投影值算出矩矢的大小和方向。

例 4.2 直角曲杆 $OABC$ 的 O 端固定, C 端受力 F 的作用, F 在 ABC 平面内且与 BA 平行,如图 4.6 所示。已知 $F = 100 \text{ N}$, $a = 200 \text{ mm}$, $b = 150 \text{ mm}$, $c = 125 \text{ mm}$,试求力 F 对 O 点之矩矢 $M_O(F)$ 。

解 本题属空间力对点之矩的问题,可用力对轴之矩求出该矩矢在轴上的分量,然后再求出矩矢。直角坐标轴 $Oxyz$ 如图 4.6 所示,则 F 对 3 个坐标轴之矩分别为

$$\begin{aligned} M_x(F) &= 0 \text{ (N} \cdot \text{m)} \\ M_y(F) &= Fc = 12.5 \text{ (N} \cdot \text{m)} \\ M_z(F) &= Fa = 20.0 \text{ (N} \cdot \text{m)} \end{aligned}$$

F 对点 O 的矩矢为

$$M_O(F) = 12.5j + 20k$$

位于 yOz 平面,大小为

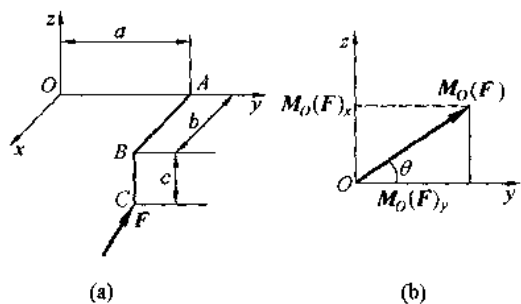


图 4.6

$$|M_O(F)| = \sqrt{[M_x(F)]^2 + [M_y(F)]^2 + [M_z(F)]^2} = 23.58 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

与 y 轴的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{M_z(F)}{|M_y(F)|} = \arctan \frac{20.2}{12.5} = 58.25^\circ$$

如图 4.6(b) 所示。

4.3 空间力系向一点的简化 主矢和主矩

以前面研究过的平面任意力系、空间汇交力系、空间力偶系的简化结果为基础,便可进一步研究空间任意力系的简化问题。设有一由力 F_1, F_2, \dots, F_n 组成的空间任意力系,如图 4.7 所示,为简化此力系,首先根据力的平移定理,任选简化中心 O ,将各力向 O 点等效平移。与平面力系不同的是,各力等效平移后所附加的力偶不是位于同一平面,而是形成不同方位的力偶矩矢 $M_1 = M_O(F_1), M_2 = M_O(F_2), \dots, M_n = M_O(F_n)$ 。这样,平移后的各力在 O 点形成一个空间汇交力系和一个空间力偶矩矢系。根据平行四边形法则,将这两个矢量系进一步合成,空间汇交力系合成得一个作用于 O 点的力矢 F'_R ,空间力偶矩矢系合成得一力偶矩矢 M'_O ,也就是说,空间任意力系向任意简化中心 O 点简化,一般可得一个力矢 F'_R 和一个力偶矩矢 M'_O 。 F'_R 称为原力系的主矢,主矢等于力系中各力的矢量和,作用于简化中心; M'_O 称为原力系对简化中心的主矩,主矩等于原力系中各力对简化中心之矩的矢量和。主矢和主矩的矢量表达式为

$$\left. \begin{aligned} F'_R &= \sum F'_Ri = \sum F_i \\ M'_O &= \sum M_i = \sum M_O(F_i) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

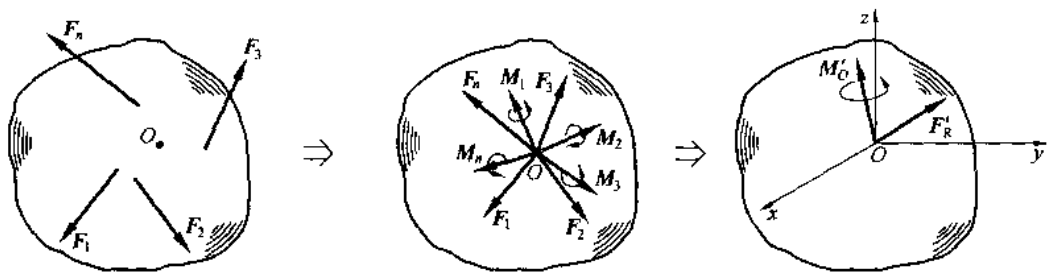


图 4.7

显然,主矢 F'_R 只取决于力系中各力的大小和方向,与简化中心的位置无关;而主矩 M'_O 大小和方向一般与简化中心的位置有关。

以简化中心为坐标原点,建立直角坐标系 $Oxyz$,类似空间汇交力系合力的计算,主矢 F'_R 的投影计算式为

$$F'_{Rx} = \sum F_{xi} \quad F'_{Ry} = \sum F_{yi} \quad F'_{Rz} = \sum F_{zi}$$

主矢 F'_R 的大小和方向余弦为

$$\left. \begin{aligned}
 F'_R &= \sqrt{(F'_{Rx})^2 + (F'_{Ry})^2 + (F'_{Rz})^2} = \sqrt{(\sum F_{xi})^2 + (\sum F_{yi})^2 + (\sum F_{zi})^2} \\
 \cos \alpha &= \frac{F'_{Rx}}{F'_R} \\
 \cos \beta &= \frac{F'_{Ry}}{F'_R} \\
 \cos \gamma &= \frac{F'_{Rz}}{F'_R}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

式中 α, β, γ ——主矢 F'_R 与 x, y, z 轴正向之间的夹角。

设 $M'_{Ox}, M'_{Oy}, M'_{Oz}$ 分别表示主矩 M'_O 在 x, y, z 轴上的投影, 并注意到力对点之矩与力对通过此点的轴之矩之间的关系, 有

$$\left. \begin{aligned}
 M'_{Ox} &= \sum [M_O(F_i)]_x = \sum M_x(F_i) \\
 M'_{Oy} &= \sum [M_O(F_i)]_y = \sum M_y(F_i) \\
 M'_{Oz} &= \sum [M_O(F_i)]_z = \sum M_z(F_i)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

主矩 M'_O 的大小和方向余弦为

$$\left. \begin{aligned}
 |M'_O| &= \sqrt{[\sum M_x(F_i)]^2 + [\sum M_y(F_i)]^2 + [\sum M_z(F_i)]^2} \\
 \cos \alpha' &= \frac{M'_{Ox}}{|M'_O|} \\
 \cos \beta' &= \frac{M'_{Oy}}{|M'_O|} \\
 \cos \gamma' &= \frac{M'_{Oz}}{|M'_O|}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

式中 α', β', γ' ——主矩 M'_O 与 x, y, z 轴正向之间的夹角。

空间力系向任意一点简化可能出现以下 4 种情况。

(1) $F'_R \neq 0, M_O = 0$ 。说明原力系与一个汇交点在简化中心的空间汇交力系等效, 主矢 F'_R 就是原力系的合力。

(2) $F'_R = 0, M_O \neq 0$ 。这种情况下主矩矢与简化中心的位置无关。

(3) $F'_R \neq 0, M'_O \neq 0$ 。如果二者相互垂直, 说明主矢的作用线所在平面, 或者与主矩的力偶作用面重合, 或者与主矩的力偶作用面平行。根据空间力偶的基本性质和平面简化理论, 原力系可以进一步简化为一个合力。若主矢与主矩不垂直, 则可将主矩矢分解为与主矢平行和垂直的两个分量, 最终形成力螺旋。

(4) $F'_R = 0, M'_O = 0$ 。则原力系为平衡力系。

4.4 空间任意力系的平衡条件和平衡方程

4.4.1 空间任意力系的平衡条件

由前述讨论可知,若主矢 F'_R 和主矩 M'_O 均为零,则该力系为平衡力系。反之,若某一力系为平衡力系,则该力系的主矢 F'_R 及对任一点 O 的主矩 M'_O 必为零。因此,空间任意力系平衡的充分必要条件是,力系的主矢和对任一点的主矩分别为零,即

$$\left. \begin{aligned} F'_R &= \sum F_i = \mathbf{0} \\ M'_O &= \sum M_O(F_i) = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

4.4.2 空间任意力系的平衡方程

式(4.15)是矢量式,若该矢量为零,则它们在直角坐标 x, y, z 轴上的投影必须都为零,即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{Rx} &= 0 \\ \sum F_{Ry} &= 0 \\ \sum F_{Rz} &= 0 \\ \sum M_x(F) &= 0 \\ \sum M_y(F) &= 0 \\ \sum M_z(F) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

空间力系平衡的充要条件也可表示为:力系中各力分别在3个坐标轴上的投影的代数和,以及各分力分别对3个坐标轴的矩的代数和均等于零。这就是空间任意力系的平衡方程,称为空间力系平衡方程的基本形式(或三矩式)。它们相互独立,表明研究刚体在空间力系作用下的平衡问题时,最多只能列6个独立的平衡方程,求解6个未知数。在解决实际问题时,这6个方程也可以是2个投影方程,4个对轴的力矩方程(称四矩式)。同理,亦可列五矩式和六矩式。在实际应用中,一般采用平衡方程的基本形式,在特殊需要时采用其他形式。选择投影轴与矩轴时,如有需要也可任意选择不是坐标轴的轴为投影轴和矩轴。

综上所述,对于一个刚体用空间力系的平衡方程,由于其在空间位置上有6个自由度,因此只能求解不超过6个未知量的问题。

例4.3 一手摇绞车如图4.8所示,其中A处是止推轴承,B处是径向轴承,若在手柄上作用一力 $P = 200 \text{ N}$,方向如图所示。求所能绞起的重物的质量 Q 以及A处和B处的约束反力。

解 取整个系统为研究对象,除作用于手柄上的 P 力外,重物的重力 Q 以及轴承处的约束反力都是未知量。止推轴承的约束反力一般用3个正交分力表示,径向轴承的约束

理论力学

反力用 2 个正交分力表示,所以共有 6 个未知量。系统所受的所有力形成一空间任意平衡力系,有 6 个独立的平衡方程,问题可以求解。建立 $Oxyz$ 坐标系,受力分析如图 4.8 所示,列方程求解。

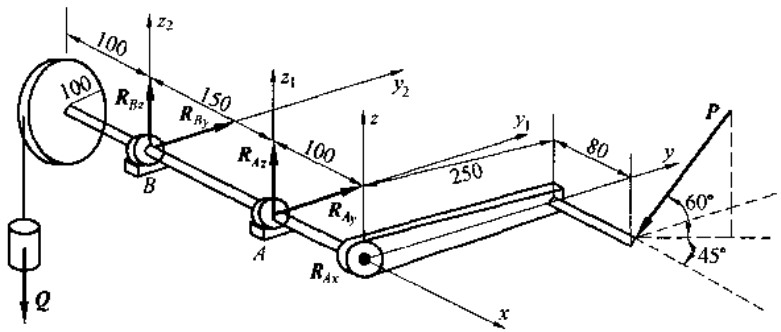


图 4.8

首先,对于 $\sum M_x(F) = 0$,有

$$10Q - 25P \cos 30^\circ = 0 \quad \text{得} \quad Q = 433 \text{ N}$$

其次,对于 $\sum R_x = 0$,有

$$R_{Ax} - P \cos 60^\circ \cos 45^\circ = 0 \quad \text{得} \quad R_{Ax} = 70.7 \text{ N}$$

为了做到一个方程只含一个未知量,可以重新再建立 Ay_1z_1 和 By_2z_2 坐标轴,如图 4.8 所示。对于

$$\sum M_{z_1}(F) = 0$$

$$\sum M_{z_2}(F) = 0$$

有

$$- 15R_{By} + 25P \cos 60^\circ \cos 45^\circ - 18P \cos 60^\circ \cos 45^\circ = 0$$

$$- 15R_{Ay} + 25P \cos 60^\circ \cos 45^\circ - 33P \cos 60^\circ \cos 45^\circ = 0$$

得

$$R_{By} = 33 \text{ N}$$

$$R_{Ay} = 37.7 \text{ N}$$

对于

$$\sum M_{y_1}(F) = 0$$

$$\sum M_{y_2}(F) = 0$$

有

$$15R_{Bz} - 25Q + 18P \cos 30^\circ = 0$$

$$- 15R_{Az} - 10Q + 33P \cos 30^\circ = 0$$

得

$$R_{Bz} = 548.5 \text{ N}$$

$$R_{Az} = 92.4 \text{ N}$$

通过此题的求解,可以再次看到,坐标轴的位置和方向是可以任意设定的,但又不能盲目乱设,如果设定不好,造成联立方程不仅求解困难,而且容易产生错误;设定得好,则可以大大减少计算的工作量。

4.5 物体的重心

4.5.1 重心的概念

任何一个物体均可视为由诸多质点所组成,这些组成物体的每一个质点都受地球引力(重力)作用。由于物体的大小相对于地球的半径是甚小的,故各质点受的引力可视为同时垂直于地平面的一个同向平行力系。理论和实践均可证明,物体受到的同向平行力系总可等效为一合力,此合力的矢量等于各力的矢量和。而且,当各质点的相对位置保持不变时,无论物体相对于地球的方位如何改变,物体所受地球引力系的合力之作用线都必须通过相对于物体上的某一确定的点,该点就称为物体的重心,而引力系的合力则是整个物体的重力。

物体重心位置的确定在工程实际中具有十分重要的意义,因为它与物体的平衡、稳定、运动及内力分布密切相关。例如,飞机的重心必须位于确定的区域才能安全飞行,超前会增加起飞和着陆的困难,偏后又不能保证稳定飞行。对各种转动机械,其重心的位置也很重要,若重心偏离轴线,轻则引起振动,降低零部件的使用寿命,重则造成破坏。又如,起重机要保证在额定起吊重量范围的任何情况下都不会倾翻,所加的配重必须保证起重机的重心处于恰当的位置。

4.5.2 重心的坐标

当物体上各质点的相对位置确定后,则对于任一直角坐标系,各质点的坐标 (x_i, y_i, z_i) 及重心 C 的坐标 (x_C, y_C, z_C) 均应是一组确定的值。根据重心的定义,无论物体和坐标系 $Oxyz$ 相对于地球如何放置,物体的重力均可视为作用于 C 点。因此,由合力矩定理不难得到坐标 (x_C, y_C, z_C) 和 (x_i, y_i, z_i) 之间应满足的关系。

首先将 $Oxyz$ 与物体一起放置于 xOy 平面,如图4.9所示,则根据合力矩定理必有

$$M_x = \sum M_x(G_i)$$

$$M_y = \sum M_y(G_i)$$

$$-Gy_C = \sum -G_i y_i$$

$$Gx_C = \sum G_i x_i$$

其中 G_i 为第 i 质点的重; $G = \sum G_i$ 为整个物体的重。

其次,再将 $Oxyz$ 连同物体放置于 xOy 平

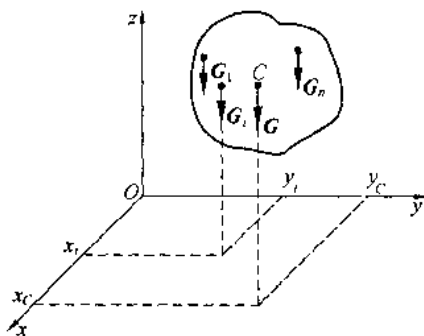


图 4.9

面,由合力矩定理可得

$$M_x(G) = \sum M_x(G_i) \quad Gz_C = \sum G_i z_i$$

由以上关系,得重心坐标的表达式为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= (\sum G_i x_i) / G \\ y_C &= (\sum G_i y_i) / G \\ z_C &= (\sum G_i z_i) / G \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

对于均质物体,其重心和形心(数学上称物体的几何中心为形心)重合。但要注意的是,重心和形心不是同一个概念,重心只在重力场中才有,它与物体的质量分布有关,而形心是纯几何量,它与物体的质量分布无关。

4.5.3 求重心的几种常用方法

1. 对称判定法

如果图形对称,则其形心一定在对称轴上。一般,对于有对称中心、对称平面、对称轴的均质物体,其形心一定位于对称中心、对称平面或对称轴上。由此可以根据物体的对称性方便地判断形心的位置,减少计算量,如图 4.10 所示。

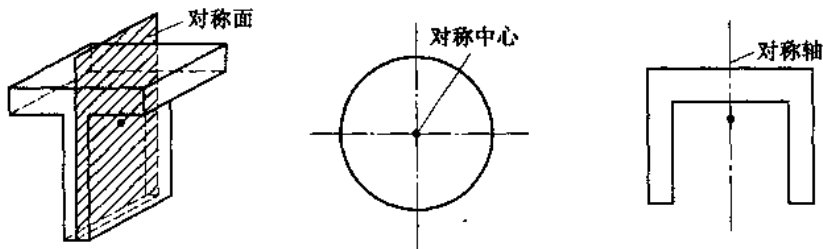


图 4.10

2. 积分法

令式(4.17)中 $\Delta V_i \rightarrow 0$, 则求和并积分, 式(4.17)变为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\int_V x dG}{G} \\ y_C &= \frac{\int_V y dG}{G} \\ z_C &= \frac{\int_V z dG}{G} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

同理,对匀质物体,取求和极限得

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\int_V x dV}{V} \\ y_c &= \frac{\int_V y dV}{V} \\ z_c &= \frac{\int_V z dV}{V} \end{aligned} \right\} (4.19)$$

式(4.18)和(4.19)即为求重心和形心的基本公式。

对匀质等厚板,设厚度为 h ,板的面积为 A ,则, $dV = d(Ah) = h dA$,板平面在 xOy 坐标平面内,如图4.11所示,则重心坐标为

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int_A x dA}{A} \\ y_c &= \frac{\int_A y dA}{A} \end{aligned}$$

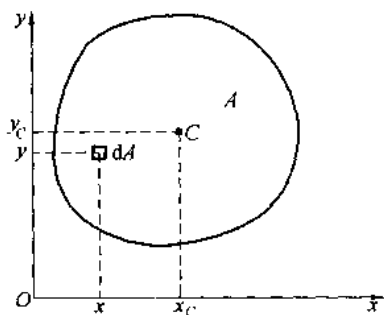


图 4.11

这也是求平面图形形心的积分公式。

对三维匀质等截面线状物体,设横截面面积为 A ,物体长度为 L ,则 $V = AL$ 。 $dV = d(AL) = AdL$,代入式(4.19)可得

$$x_c = \frac{\int_L x dL}{L} \quad y_c = \frac{\int_L y dL}{L} \quad z_c = \frac{\int_L z dL}{L}$$

例 4.4 求如图 4.12 所示半径为 R ,圆心角为 2φ 的扇形图面的形心。

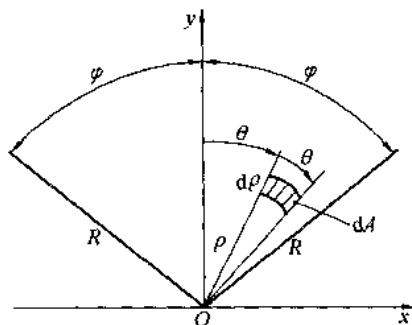


图 4.12

解 建立如图所示坐标系 xOy ,由其对称性知形心必在 y 轴上,故有

$$x_c = 0$$

取图示微分面积元(极坐标 θ, ρ)有

$$\begin{cases} dA = (\rho d\theta) d\rho \\ y = \rho \cos \theta \end{cases}$$

理论力学

所以有

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{\iint_A \rho^2 \cos \theta d\theta d\rho}{\iint_A \rho d\theta d\rho} = \frac{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\varphi}^{\varphi} \cos \theta d\theta}{\int_0^R \rho d\rho \int_{-\varphi}^{\varphi} d\theta} = \frac{2R}{3\varphi} \sin \varphi$$

即扇形的形心为 $C(0, \frac{2R}{3\varphi} \sin \varphi)$

3. 分割法

工程实际中的有些物体形状虽然比较复杂,但仔细分析会发现它们是由几个形状简单的形体组成的。求这种物体的重心或形心,通常可以将它们分割成几个形状简单的形体,而这些简单形体的重心通常是已知的或容易求得的,这样整个组合形体的重心就可以用组合法求得。若一均质物体由 n 个简单形体组成,其中第 i 个简单形体的体积为 V_i ,重心坐标为 $(x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i})$,则用组合法求整个物体重心的公式为

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_{c_i} V_i}{V} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} V_i}{V} \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_{c_i} V_i}{V}$$

对于平面图形,组合法求形心公式为

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_{c_i} V_i}{V} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_{c_i} V_i}{V}$$

若物体或薄板内切去了一部分(如有空穴的物体),则求其重心仍可以用上面两式计算,只是切去部分的体积或面积要取为负值,这种方法也称为负体积(或负面积)法。

例 4.5 计算图示空心截面图形的形心位置(单位:mm)。

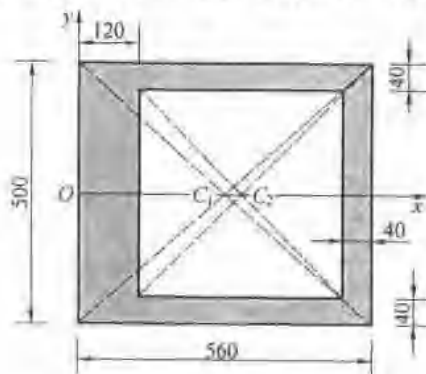


图 4.13

解 截面可视为由 $500 \text{ mm} \times 560 \text{ mm}$ 的实心矩形截面和 $420 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ 的一个负面积矩形截面组成。它们的面积和形心坐标分别为

$$A_1 = 500 \text{ mm} \times 560 \text{ mm} = 2.8 \times 10^5 \text{ mm}^2 \quad A_2 = -(420 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}) = -1.68 \times 10^5 \text{ mm}^2$$

$$x_1 = 280 \text{ mm} \quad x_2 = 320 \text{ mm}$$

$$y_1 = 0 \text{ mm} \quad y_2 = 0 \text{ mm}$$

所以

$$\begin{cases} x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = 220 \text{ mm} \\ y_C = 0 \text{ mm} \quad (\text{由对称性可得}) \end{cases}$$

4. 实验法

(1) 悬挂法

如图 4.14 所示平面薄板, 将物体上的任意两点 A 、 B 依次悬挂起来, 物体上通过两悬点的铅垂线之交点 C 即为物体的重心。

(2) 称重法

设图 4.15 所示为某物体的对称面, 即重心必在该平面内。为了求出重心 C 在该平面内的位置, 即可采用以下方法(称重法)测定。

① 先把物体上 A 、 B 两点同时放于同一水平面上的磅秤上, 如图 4.15(a) 所示。读出 A 、 B 两磅秤上显示的质量分别为 F_1 、 F_2 。

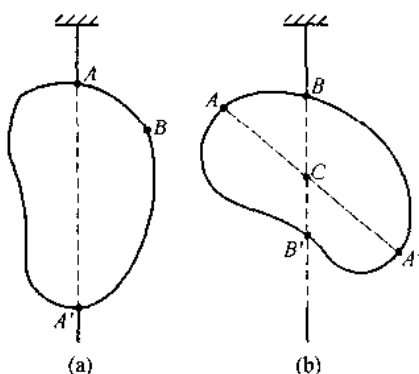


图 4.14

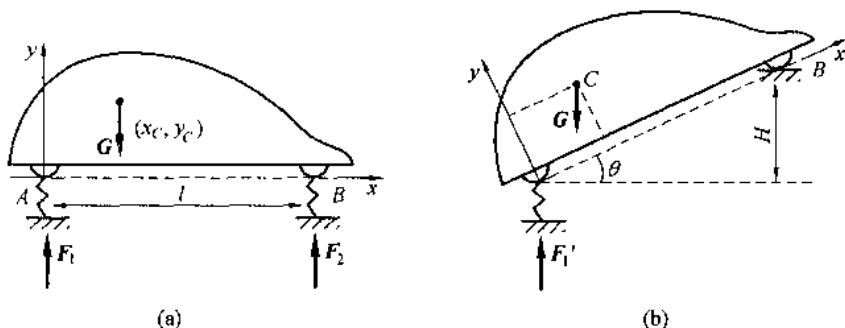


图 4.15

由平衡方程
$$\begin{cases} \sum F_{iy} = 0, F_1 + F_2 - G = 0 \\ \sum M_A(F) = 0, F_2 l - G x_C = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} G = F_1 + F_2 \\ x_C = \frac{F_2}{F_1 + F_2} l \end{cases}$$

其中, G 为物体的总重; l 为 A 、 B 之间的距离。

② 然后将物体 B 端升高使 AB 与水平面成 θ 角, 如图 4.15(b) 所示, 再读出 A 端磅秤上显示的质量 F'_1 。此时平衡方程为

$$\begin{aligned} \sum M_B(F_i) &= 0 \\ G(l - x_C)\cos\theta + G y_C \sin\theta - F'_1 l \cos\theta &= 0 \end{aligned}$$

理论力学

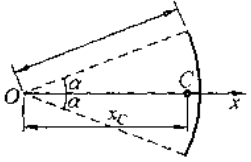
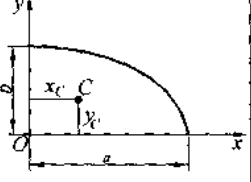

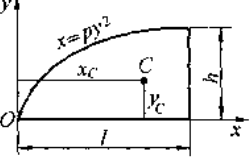
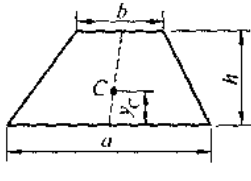
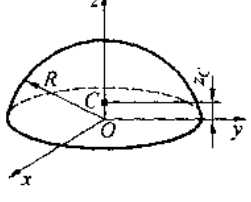
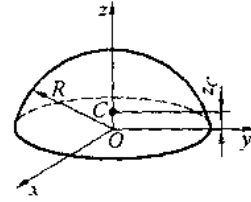
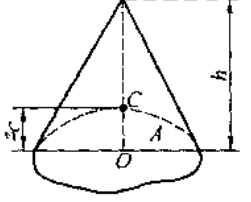
解方程,得

$$y_c = \frac{(F'_1 - F_1)}{F_1 + F_2} L \cot \theta = \frac{F'_1 - F_1}{F_1 + F_2} \frac{l}{H} \sqrt{l^2 - H^2}$$

5. 查表法

工程实际中,一些常见的、有规则形状物体或平面图形的几何参数,可以从有关的工程手册中查到。利用手册,再结合组合法,可以求解不少均质组合物体的形心。表 4.1 列出了几种常见简单形状均质物体的形心位置,供查阅。

表 4.1

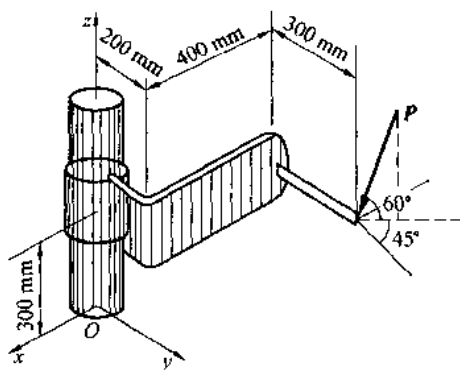
图 形	形心坐标	图 形	形心坐标
 <p>圆弧</p>	$x_c = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ <p>(α 以弧度计,下同) 半圆弧 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $x_c = \frac{2r}{\pi}$</p>	 <p>椭圆形 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$</p>	$x_c = \frac{4a}{3\pi}$ $y_c = \frac{4b}{3\pi}$ <p>($A = \frac{1}{4} \pi ab$)</p>
 <p>三角形</p>	<p>在中线交点 $y_c = \frac{1}{3} h$</p>	 <p>二次抛物线 $x = py^2$</p>	$x_c = \frac{3}{5} l$ $y_c = \frac{3}{8} H$
 <p>梯形</p>	<p>在上、下底中点的连线上 $y_c = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$</p>	 <p>半球体</p>	$x_c = \frac{3}{8} R$ <p>($N = \frac{2}{3} R$)</p>
 <p>扇形</p>	$x_c = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$ <p>($A = r^2 \alpha$) 半圆形面积: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $x_c = \frac{4r}{3\pi}$</p>	 <p>锥体</p>	<p>在顶点与底面中心 O 的连线上 $x_c = \frac{1}{4} h$ ($N = \frac{1}{3} Ah$) (A 是底面积)</p>

习 题

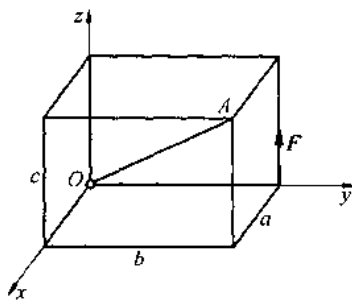
4.1 判断题

- (1) 一空间力系,若各力作用线与某一固定直线相平行,则其孤立的平衡方程只有5个。
- (2) 一空间力系,若各力作用线平行某一固定平面,则其独立的平衡方程只有3个。
- (3) 在空间问题中,力对轴的矩是代数量,而力对点的矩是矢量。
- (4) 当力与轴共面时,力对该轴之矩等于零。
- (5) 在空间问题中,力偶对刚体的作用完全由力偶矩矢决定。
- (6) 将一空间力系向某点简化,若所得的主矢和主矩正交,则此力系简化的最后结果为一合力。

4.2 如题4.2图所示,已知力 $P = 20\text{ N}$,求力 P 对 x, y, z 轴的矩。



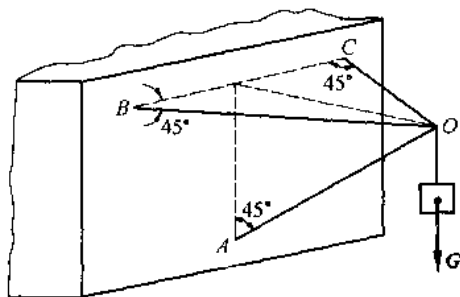
题 4.2 图



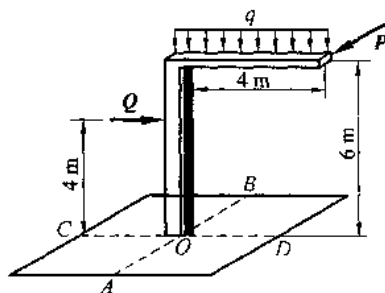
题 4.3 图

4.4 挂在空间物架上的重物重为 $G = 1000\text{ N}$,物架三杆用光滑球铰相连。已知 BOC 为水平面,且 $\triangle BOC$ 为等腰直角三角形, AO 杆的位置如图所示。求三杆的受力。

4.5 如题4.5图所示,悬臂刚架上受均布荷载 $q = 2\text{ kN/m}$ 及两个集中力 $P = 5\text{ kN}$, $Q = 4\text{ kN}$ 作用,求固定端的约束反力和反力偶矩。



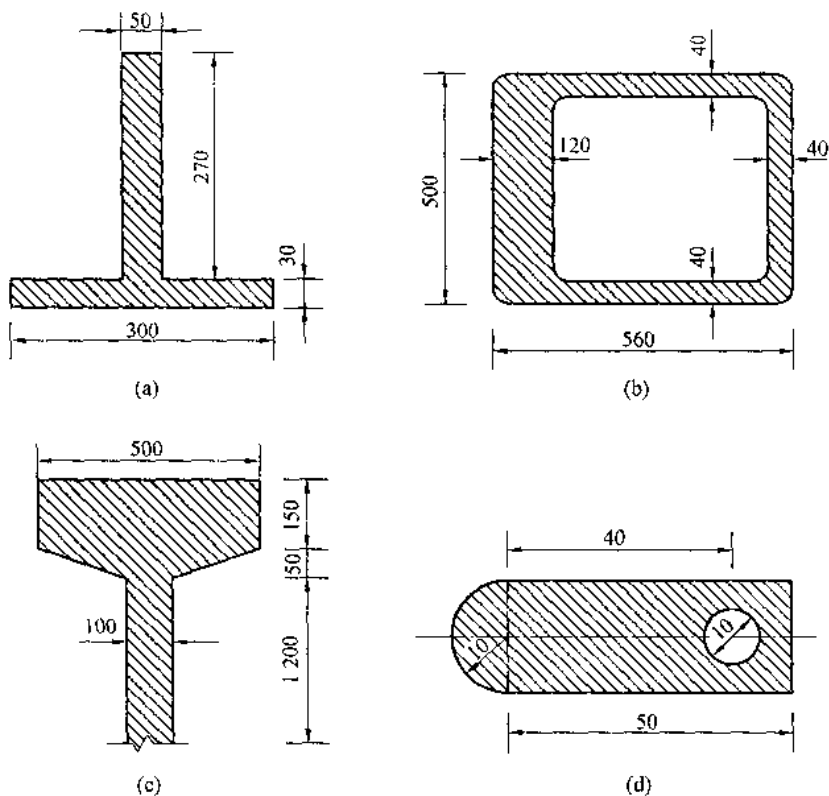
题 4.4 图



题 4.5 图

理论力学

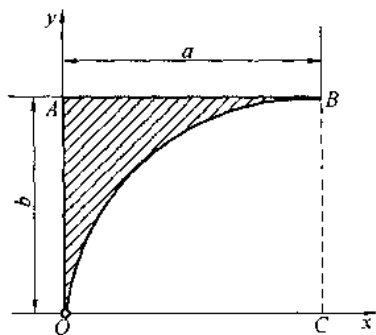
4.6 求题 4.6 图所示各截面重心的位置(图中长度单位为 mm)。



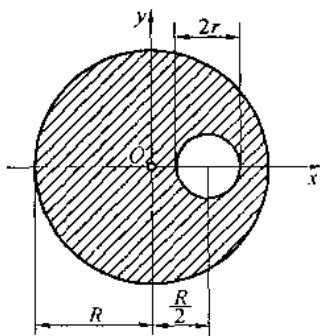
题 4.6 图

4.7 如题 4.7 图所示,已知抛物线方程 $y^2 = \frac{b^2}{a}x$, $AB = a$, $BC = b$,求面积 OAB 的重心坐标。

4.8 如题 4.8 图所示,在半径为 R 的圆内挖一半径为 r 的圆孔,求剩余面积的重心。



题 4.7 图



题 4.8 图

第2篇 运动学

运动学是从几何角度研究物体运动的规律,不考虑引起物体运动状态变化的物理因素。也就是说,运动学只研究物体运动的几何特性,包括物体在空间的位置随时间变化的规律、物体的运动轨迹、速度和加速度等,但不涉及引起物体运动变化的作用力,以及力与质量和运动之间的关系。

学习运动学,一方面是为学习后续的动力学提供必要的基础知识,另一方面也有其独立的意义。因为在许多工程问题中,如在自动控制系统、机械传动系统和仪表系统中,单独进行运动分析常常是必要的。在机械设计时,强度分析之前,首先要对传动机构进行必要的运动分析,使各构件的运动关系满足机械正常运转的需要。

宇宙中一切事物,总是在不断地发展变化着。运动,是物质不可分割的属性,是普遍的、绝对的。对于机械运动来说,也没有绝对静止的物体,但是,我们观察某物体的运动规律却有相对性。因为任何物体在空间的位置和运动情况,必须选取另一物体作为参考的物体才能确定,这个参考的物体就是参考体。如果所选的参考体不同,物体相对于不同参考体的运动也不同。例如,一艘轮船在行驶,对于站在地面的观察者来说是向前运动的,但对于站在这艘船上的观察者来说是静止的。因此,可以说物体运动是绝对的,但描述物体的运动却是相对的。在力学中,描述任何物体的运动都需要指明参考体。与参考体固连的坐标系称为参考系。在一般工程问题中,取与地面固连的坐标系为参考系。通常若不特别指明参考系,则所说的运动就是相对与地球或与地球固连的物体为参考系而言的。

在运动学中,由于只从几何的角度来研究物体的运动,因而对物体本身,也只着眼于物体的几何尺寸和形状,而不究其物理性质。而且物体实际上存在的微小变形,也因其对物体的运动影响很小而忽略不计。因此,在运动学中,一般都把实际物体抽象为刚体。但有的问题只需要研究物体上某些点(如物体重心的运动),或有些物体的运动可以忽略尺寸的影响(如炮弹的弹道等),就可以将物体视为一个几何点,称为点或动点。所以,运动学研究的是点和刚体两种力学模型的运动,也就是说,运动学的内容包括点的运动和刚体的运动两部分。但是,由于刚体是点的组合,因此点的运动又是分析刚体运动的基础。

第 5 章 点的运动

点的运动学是研究一般物体运动的基础,具有独立的应用意义。本章将研究点的简单运动,研究点相对某一个参考系的几何位置随时间变动的规律,包括点的运动方程、运动轨迹、速度和加速度等。

5.1 矢量法

1. 点的运动轨迹

动点 M 在空间的位置,可用该点对于任意选择的观察点 O (即参考系上的某点) 的矢径来确定, O 点即为坐标原点,如图 5.1 所示。当动点 M 运动时,矢径 r 的大小和方向一般均随时间变化。在任一确定瞬时, r 的大小和方向唯一的确定了动点 M 在空间的位置。因此,矢径 r 是时间 t 的函数。动点 M 的矢量形式的运动方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (5.1)$$

当动点运动时,由于点在空间的位置不断变化,矢径 r 的末端在空间描绘出一条曲线,这就是动点的轨迹。

2. 点的速度

设瞬时 t 时动点的位置在 M 处,瞬时 $t + \Delta t$ 时动点在 M' 处,如图 5.2 所示,则矢径的变化就是动点在 Δt 时间内的位移:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = \overline{MM'}$$

将矢径对时间的平均变化率定义为动点在 Δt 时间内的平均速度矢量,以 \boldsymbol{v}^* 表示,有

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} \quad (5.2)$$

因为时间是标量,故 \boldsymbol{v}^* 的方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向相同。 Δt 越小, $\Delta \boldsymbol{r}$ 越趋近于动点轨迹在 M 点的切线方向,即平均速度越趋近于动点在瞬时 t 的真实速度。所以当 Δt 趋近于零时,便得动点在瞬时 t 的速度,用 \boldsymbol{v} 表示。

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \boldsymbol{v}^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad (5.3)$$

可见,动点的速度等于动点的矢径对时间的一阶导数,速度是矢值,速度矢沿轨迹曲

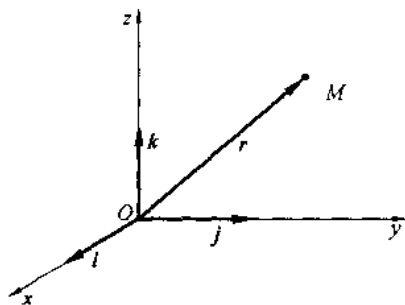


图 5.1

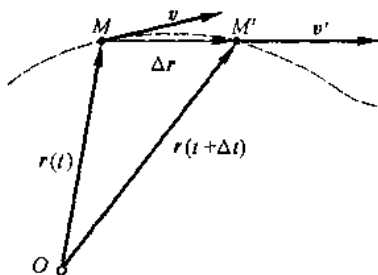


图 5.2

线的切线方向,与动点的运动方向一致。速度的大小表示动点运动的快慢程度,速度的方向表示动点沿轨迹运动的方向。速度的单位为 m/s 。

3. 点的加速度

设瞬时 t 和 $t + \Delta t$ 时,动点分别位于 M 和 M' ,其速度分别为 v 和 v' ,如图 5.3(a) 所示,则在 Δt 的时间间隔内,速度的增量为 $\Delta v = v' - v$ 。于是平均速度改变率为 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$,这就是动点在时间间隔 Δt 内的平均加速度 a^* ,即

$$a^* = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均加速度的极限就是动点在瞬时 t 的加速度 a ,即

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{r} \quad (5.4)$$

即点的加速度等于其速度矢量对时间的一阶导数,或等于其矢径对时间的二阶导数。显然加速度 a 也是矢量,其方向是速度矢量图对应点的切线方向,如图 5.3(b) 所示。

加速度的单位为 m/s^2 。

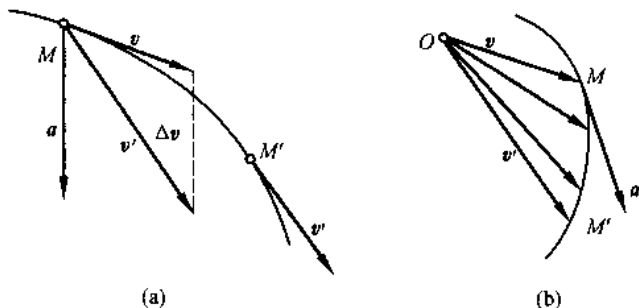


图 5.3

5.2 直角坐标法

用直角坐标表示点的各种运动量的方法称为描述点运动的直角坐标法。

5.2.1 点的运动轨迹

在参考空间建立固定直角坐标系 $Oxyz$,动点 M 在瞬时 t 的位置,可由它的 3 个坐标值 (x, y, z) 唯一确定,如图 5.4 所示。

随着动点的运动,显然, x, y, z 是时间 t 的连续函数,即

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

当函数 $x(t), y(t), z(t)$ 为已知时,动点

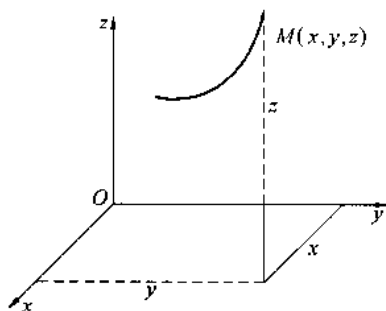


图 5.4

理论力学

M 在任一时刻 t 的位置即完全被确定。式 (5.5) 描述了动点的运动规律, 称为动点的直角坐标形式的运动方程。

动点的运动, 根据其运动轨迹的不同, 可分平面曲线运动和空间曲线运动。对于平面曲线运动, 选取 xOy 平面与其运动平面重合, 则 $z(t) = 0$, 故此时只需将运动方程表述为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

例 5.1 一直杆 AB 的两端分别沿两相互垂直的固定直线 Ox 和 Oy 运动, 如图 5.5 所示。试确定杆上任一点 M 的运动方程和轨迹方程, 已知 $MA = a, MB = b$, 角 $\varphi = \omega t$ 。

题意分析: 列运动方程就是要列出动点 M 的位置随时间变化的规律。因 AO 与 OB 相互垂直, 所以选用直角坐标法表示点的运动方程较方便。

解 选取直角坐标系 xOy , 则动点 M 的坐标 x, y 为

$$x = a \sin \varphi = a \sin \omega t \quad y = b \cos \varphi = b \cos \omega t$$

这即为直角坐标表示的 M 点的运动方程。

从中消去时间 t , 得 M 点的轨迹方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

此轨迹方程为以 a, b 为半轴的椭圆方程。

5.2.2 点的速度

从图 5.6 可得, 表示动点位置的坐标 x, y, z 与矢径的关系为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

式中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是沿直角坐标轴正向的单位矢量。

将上式对时间求一阶导数得

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (5.7)$$

速度矢量亦可表示为

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (5.8)$$

式中, v_x, v_y, v_z 为速度 \mathbf{v} 在坐标轴 x, y, z 上的投影。

比较式 (5.7)、(5.8) 得

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (5.9)$$

可见, 动点的速度在直角坐标轴上的投影等于其相应坐标对时间的一阶导数。式

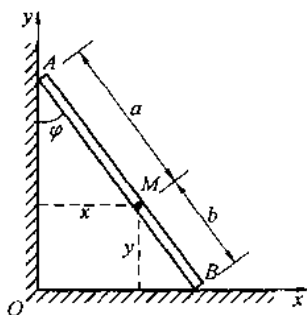


图 5.5

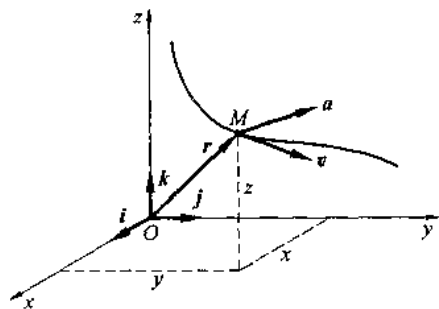


图 5.6

(5.9) 即为用直角坐标表示的动点的速度。

速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (5.10)$$

速度的方向余弦为

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \frac{v_x}{v} \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{v_y}{v} \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \frac{v_z}{v} \quad (5.11)$$

5.2.3 点的加速度

点的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \quad (5.12)$$

加速度矢量亦可表示为

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (5.13)$$

比较式(5.12)、(5.13), 即得用直角坐标表示动点加速度的表达式为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (5.14)$$

可见, 动点的加速度在直角坐标轴上的投影, 等于其相应速度的投影对时间的一阶导数或等于其相应坐标对时间的二阶导数。

加速度的大小和方向为

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ \cos(\mathbf{a}, \mathbf{i}) &= \frac{a_x}{a} \\ \cos(\mathbf{a}, \mathbf{j}) &= \frac{a_y}{a} \\ \cos(\mathbf{a}, \mathbf{k}) &= \frac{a_z}{a} \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

5.3 自然坐标法

利用点的运动轨迹建立弧坐标及自然轴系, 并用它们来描述和分析点的运动的方法称为自然法。

5.3.1 弧坐标

当动点的运动轨迹为已知时, 则可在轨迹上任取一点 O_1 为原点, 并约定 O_1 点的一边所取的弧长为正值, 而另一边所取的弧长为负值, 如图 5.7 所示。于是动点在其轨迹上的位置可由它与 O_1 点之间的弧长 O_1M 惟一表示。随着动点 M 在其轨迹上的运动, 弧长 s 为时间 t 的一个连续函数, 即

理论力学

$$s = s(t) \quad (5.16)$$

当函数 $s(t)$ 已知时, 动点在任一时刻在空间的位置及其运动规律即被惟一确定。式 (5.16) 被称为动点的弧坐标形式的运动方程。

5.3.2 自然轴系

由曲线上点 M 及与其相近的点 M' 的切线可以确定一个平面, 当点 M' 沿曲线趋近于点 M 时, 这个处于极限位置的平面称为曲线在点 M 处的密切面或曲率平面(见图 5.8)。过点 M 作与切线相垂直的平面称为曲线在点 M 的法平面, 显然在法平面内通过点 M 的任何直线都与切线垂直, 因而都是曲线的法线, 其中密切面与该面的交线称为曲线在点 M 的主法线, 显然主法线只有一条。法平面内与主法线垂直的法线称为副法线。若以 τ 表示切线的单位矢量, 指向弧坐标的正方向; n 表示主法线的单位矢量, 指向曲线内凹的一方; b 表示副法线的单位矢量, 其方向由右手法则确定, 则

$$b = \tau \times n$$

以点 M 为坐标原点, 沿 (τ, n, b) 这 3 个矢量方向可建立一相互垂直的正交轴系, 称为自然轴系。

自然轴系不是一个固定的坐标系, 因为其坐标原点取的是轨迹上与动点重合的点, 所以它随动点在轨迹曲线上的位置变化而改变, 相应的, τ, n, b 也是方向随动点位置变化的单位矢量。

5.3.3 自然坐标表示点的速度

动点 M 沿图 5.9 所示轨迹运动, 设在 t 和 $t + \Delta t$ 时动点分别位于 M 和 M' 点, 则在时间间隔 Δt 内, 动点的位移为 Δr , 弧坐标的增量为 Δs , 于是得

$$v = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta s \rightarrow 0$, Δs 与 $|\Delta r|$ 的模趋于一致, 故 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s}$ 的模等于 1, 其方向则为 Δr 的极限方向, 即轨迹在动点 M 处的切线方向。因此 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s}$, 就是轨迹在动点 M 处的切线 MT 方向的单位矢量 τ , 即

$$v = \frac{ds}{dt} \tau = \dot{s} \tau \quad (5.17)$$

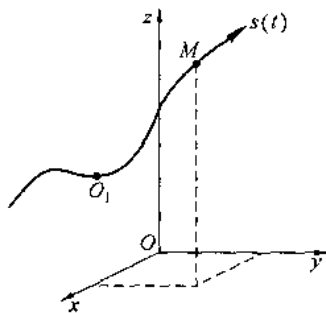


图 5.7

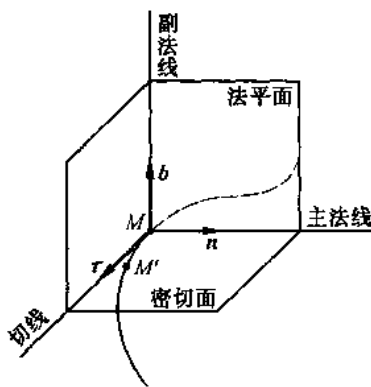


图 5.8

即动点的速度等于其弧坐标对时间的一阶导数,其方向沿轨迹在该点的切线,速度在切线上的投影为

$$v = v_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (5.18)$$

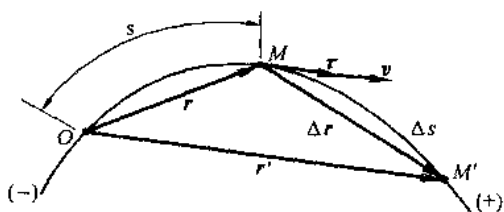


图 5.9

5.3.4 自然坐标法表示点的加速度

设点 M 沿着空间任一曲线运动,在时刻 t 和 $t + \Delta t$ 时分别处于 M 和 M' ,其速度分别为 v 和 v' ,则在 Δt 时间间隔内速度增量为

$$\Delta v = v' - v$$

Δv 是矢量,包括速度的大小和方向两方面的改变。现将 Δv 分解为表示速度方向变化的 Δv_1 和表示其大小变化的 Δv_2 两部分,并使 $|\Delta v_2| = |v'| - |v|$,如图 5.10 所示。

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1 + \Delta v_2}{\Delta t} \quad (5.19)$$

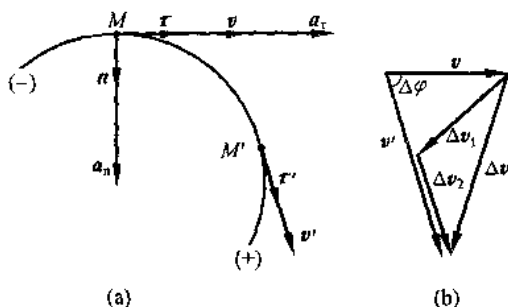


图 5.10

即将加速度 a 分解为两部分,第一部分为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} \cdot \left| \frac{\Delta v_1}{|\Delta v_1|} \right| \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{|\Delta v_1|} \quad (5.20)$$

其中 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{|\Delta v_1|}$ 的大小等于 1。若以 θ 表示 v 与 Δv_1 的夹角,如图 5.10(b) 所示,于是有 $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}$ 。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta\varphi \rightarrow 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 Δv_1 与 τ 垂直。以 n 表示此方向单位矢量,此时 M 处的微段曲线位于由 τ 和 n 构成的平面内,即 Δv_1 的极限方向沿曲线在 M 点的法线且指向曲率中心。于是

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{|\Delta v_1|} = n$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v_1|}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \cdot |v| \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = |v| \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = |v| \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \\ &v^2 \cdot k = \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \quad (5.21)$$

式中 k ——曲线在 M 点处的曲率;

ρ ——曲线在 M 点处的曲率半径。

故有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho} n$$

理论力学

这一部分加速度的方向沿 \mathbf{n} 的方向,即在轨迹上 M 点的法线方向,并指向曲率中心,故常称为法向加速度,记为 \mathbf{a}_n ,即

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (5.22)$$

法向加速度的大小反映了速度方向的变化情况,其值越大,表明速度方向的变化越快,轨迹曲线的弯曲程度越大;反之,法向加速度越小,速度的方向变化越慢,轨迹曲线的弯曲程度越小。点做直线运动时法向加速度为零。

加速度 \mathbf{a} 的第二部分为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(|v'| - |v|) \cdot \tau'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(|v'| - |v|)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tau' = \frac{dv}{dt} \cdot \tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s}_\tau = a_\tau \quad (5.23)$$

显然,这部分加速度沿轨迹在 M 点的切线方向,称为切向加速度,记为 \mathbf{a}_τ 。切向加速度的大小反映了动点速度大小的变化情况。

综上所述,以自然法描述点的运动时,其全加速度为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \dot{v}_\tau + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (5.24)$$

全加速度的大小和方向为

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + \dot{v}^2} \quad (5.25)$$

$$\tan(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\dot{v}}{v^2/\rho} = \frac{\rho \dot{v}}{v^2}$$

以上介绍表明,当点沿着已知轨迹运动时,用自然法描述点的加速度,不仅较直角坐标方便,而且还能清楚地反映加速度大小和方向的变化规律。

例 5.2 图 5.11 为一曲柄摇杆机构,曲柄长 $OA = 10 \text{ cm}$,绕 O 轴转动。角 φ 与时间 t 关系为 $\varphi = \frac{\pi}{4} t$ (rad),摇杆长 $O_1B = 24 \text{ cm}$,距离 $O_1O = 10 \text{ cm}$ 。求点 B 的运动方程、速度及加速度。

题意分析:点 B 是摇杆 O_1B 的杆端,其运动轨迹是以 O_1B 为半径的圆弧, $t = 0$ 时,点 B 在点 B_0 处。所以可用自然坐标求解,取点 B_0 处为弧坐标的原点。

解 点 B 的弧坐标为

$$s = B_0B = O_1B \cdot \alpha$$

由于 $\triangle OAO_1$ 是等腰三角形, $\alpha = \varphi/2$, 故

$$s/\text{cm} = O_1B \times \varphi/2 = 24 \times \pi/(2 \times 4) = 3\pi t$$

这是点 B 沿已知轨迹的运动方程。

速度和加速度分别为

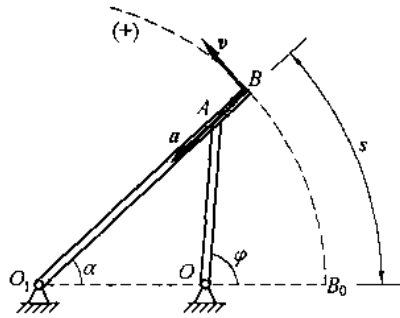


图 5.11

$$v/(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}) = ds/dt = 3\pi$$

$$a_{\tau}/(\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}) = d^2s/dt^2 = 0$$

$$a_n/(\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}) = v^2/\rho = (3\pi)^2/24$$

习 题

5.1 判断下列说法是否正确

- (1) 点的运动方程就是点的直角坐标随时间的变化规律。
- (2) 动点速度的方向总是与其运动的方向一致。
- (3) 只要动点作匀速运动,其加速度就为零。
- (4) $\frac{dy}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 的物理意义一致。
- (5) 在自然坐标系中,如果速度的大小 $v = \text{常数}$,则加速度的大小 $a = 0$ 。
- (6) 某瞬时动点的速度为零,则其加速度也一定为零。
- (7) 已知动点在 xOy 平面内的运动方程为 $x = f_1(t)$ 、 $y = f_2(t)$,则可以先求出矢径 r

的大小: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,然后再由 $v = \frac{dr}{dt}$ 及 $a = \frac{dv}{dt}$ 求出点的速度和加速度。

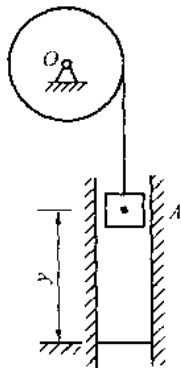
5.2 一点按 $x = t^3 - 12t + 2$ 的规律沿直线运动(其中 t 以 s 计, x 以 m 计)。试求:

- (1) 最初 $3s$ 内的位移。
- (2) 改变运动方向的时刻和所在位置。
- (3) 最初 $3s$ 内经过的路程。
- (4) $t = 3s$ 时的速度和加速度。
- (5) 点在哪段时间作加速运动?哪段时间作减速运动?

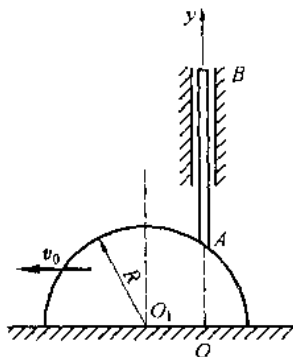
5.3 如题 5.3 图所示,矿井提物上升时,运动方程为 $y = \frac{h}{2}(1 - \cos \omega t)$,其中 $\omega =$

$\sqrt{\frac{2b}{h}}$, h 、 b 均为常值。求提升的速度和加速度,以及 y 取最大值时所需的时间。

5.4 如题 5.4 图所示,半圆形凸轮以匀速 $v_0 = 1 \text{ cm/s}$ 水平向左运动。已知 $t = 0s$ 时,杆的 A 端在凸轮最高点,凸轮半径 $R = 8 \text{ cm}$ 。求杆的端点 A 的运动方程和 $t = 4s$ 时的速度和加速度。



题 5.3 图

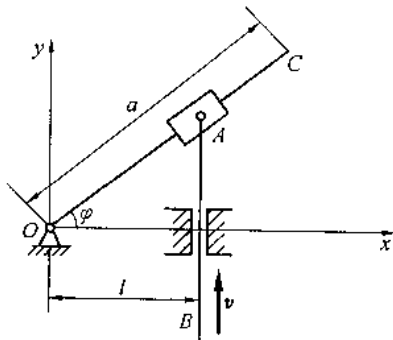


题 5.4 图

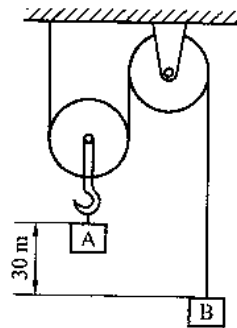
理论力学

5.5 机构如题 5.5 图所示, 试求当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时, 摇杆 OC 的角速度和角加速度。假定杆 AB 以匀速 v 运动, 开始时 $\varphi = 0$ 。

5.6 物块 B 以匀加速 $a_B = 10 \text{ m/s}^2$ 向上运动。在题 5.6 图所示瞬时, 物块 B 比物块 A 低 30 m, 且两物块的初速度都为零。试求当物块 A 与 B 达到同一高度时, 两物块的速度。



题 5.5 图



题 5.6 图

第 6 章 刚体的基本运动

研究刚体的运动就是研究描述刚体在参考空间的位置及其变化的数学方法,以及刚体上各点的运动特性(包括速度和加速度)之间所存在的关系。工程中,刚体运动都受到一定约束的限制,如火车只能在铁轨上运动,发动机活塞只能在汽缸内运动,飞轮只能绕其转轴转动等。根据约束条件的不同,刚体运动形式分为平行移动、定轴转动、平面运动、定点转动和最一般的运动。本书只介绍前两种运动形式,其中刚体的平行移动(简称平动)和定轴转动是最简单、最基本的运动,它们是研究刚体其他复杂运动的基础,因为任何复杂的运动形式均可视为这两种运动形式的合成。因此,刚体的平行移动和定轴转动称为刚体的基本运动。

6.1 刚体的平行移动

刚体运动过程中,其上任一条直线始终保持平行不变,则刚体运动称为平行移动,简称平动。

车厢在水平面内直线行驶,自行车脚蹬在行驶时如能保持水平状态的运动以及如图 6.1 所示等长曲柄(O_1A 与 O_2B 平行且相等)四连杆机构中 AB 连杆的运动均是刚体平动的实例。

下面研究刚体平动的特性。

设 A 、 B 为刚体上任意两点在 t 瞬时的位置,当刚体运动到 $t + \Delta t$ 瞬时,该两点分别运动至 A' 、 B' 点,如图 6.2 所示。因为根据刚体上两点之间距离不变和刚体平动时任意两点连线的方向不变的性质,可知 AB 平行且等于 $A'B'$,即 $AA'B'B$ 为平行四边形。从而两点位移相等,即

$$AA' = BB'$$

即得刚体的第一个特性:刚体上任意两点在同一时间间隔内的位移相等。

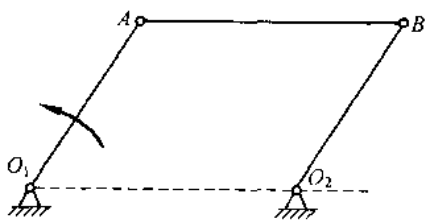


图 6.1

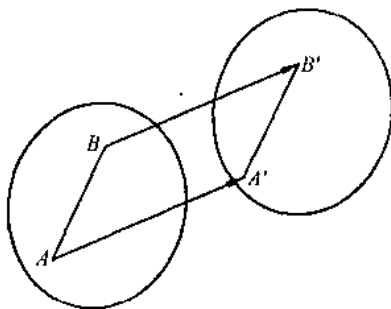


图 6.2

理论力学

根据速度定义, A 、 B 两点的速度分别为

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA'}{\Delta t} \\ v_B &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB'}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

由于 $AA' = BB'$ 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 的过程中始终成立, 故有

$$v_A(t) = v_B(t) \quad (6.2)$$

即得刚体的第二个特性: 刚体上任意两点在同一时刻具有相等的速度矢量。

对式(6.2) 两端同时对速度求导可得

$$a_A(t) = a_B(t) \quad (6.3)$$

即得刚体的第三个特性: 刚体上任意两点在同一时刻具有相等的加速度矢量。

以上特性说明: 刚体平动时, 其上各点的运动规律完全相同。因此, 研究刚体的平动可归结为研究其上任一点的运动。

例 6.1 摆木用两条等长的钢索平行吊起, 如图 6.3 所示。钢索长为 L , 其摆动规律为

$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{\pi}{4} t$, 求摆木中点 M 的速度和加速度。

题意分析: 由于两条钢索的长度相等, 且相互平行, 因此摆木在运动过程中始终平行于直线 O_1O_2 , 所以摆木的运动是平动。为求点 M 的速度和加速度, 只需求出 A 点(或 B 点)的速度和加速度。

解 在点 A 的圆弧轨迹上建立弧坐标,

因圆弧的半径为 L , 以最低点 O 为起点, 规定弧坐标 s 向右为正, 则 A 点的运动方程为

$$s = L\varphi = L\varphi_0 \sin \frac{\pi t}{4}$$

将上式对时间 t 求导, 得 A 点速度的大小

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{4} L\varphi_0 \cos \frac{\pi}{4}$$

再求一次导数, 得 A 点切向加速度的大小

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2 L\varphi_0}{16} \sin \frac{\pi t}{4}$$

负号说明切向加速度的方向始终与摆木运动的方向相反。

A 点法向加速度的大小为

$$a_n = \frac{v^2}{L} = \frac{\pi^2 L\varphi_0^2}{16} \cos^2 \frac{\pi t}{4}$$

方向如图 6.3 所示。

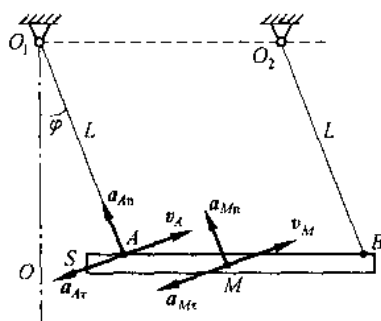


图 6.3

6.2 刚体的定轴转动

刚体在运动过程中,其上或与其固连的空间存在一条不动的直线,则刚体的运动称为定轴转动,不动的直线称为转轴。转轴上点的速度恒为零,转轴以外的点只能作圆周运动,其圆心为该点在转轴上的垂足,半径为它到垂足之间的距离。

工程实际中的很多机构运动都可以简化为刚体作定轴转动的力学模型,例如飞轮、机床主轴、发电机转子的运动等。

1. 转动方程

设有一刚体绕轴转动,如图 6.4 所示,并设 I 是通过转动轴的一个固定平面,II 是固连在刚体上与刚体一起转动的一个平面,刚体在转动过程中任一瞬时的位置由动平面 II 与定平面 I 之间的夹角 φ 确定。 φ 角称为转动刚体的位置角,单位为 rad(弧度)。位置角是个代数量,其正负规定为:从定轴 z 的正端向负端看去,从定平面 I 沿逆时针转向动平面 II 量取 φ 时取正值;反之为负值。当刚体转动时, φ 角是时间 t 的单值连续函数,即

$$\varphi = f(t) \quad (6.4)$$

这就是作定轴转动刚体的转动方程。若 $f(t)$ 表达的函数关系已知,则刚体在任一瞬时 t 相对于固定平面 I 的位置就可以完全确定。

2. 角速度

反映刚体瞬时转动(位置改变)快慢程度的物理量可用转角 φ 随时间 t 瞬时变化率来表示,以 ω 表示,则

$$\omega^* = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (6.5)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,即得刚体的瞬时角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t) \quad (6.6)$$

ω 称为刚体转动的瞬时角速度,其单位为弧度/秒(rad/s)。角速度也是一个代数量,当 $\omega > 0$ 时,表明该瞬时刚体沿着 φ 增加的方向转动;当 $\omega < 0$ 时,表明该瞬时刚体沿着 φ 减小的方向转动。

3. 角加速度

反映刚体角速度变化快慢程度的物理量可用角速度 ω 随时间 t 瞬时变化率来表示,以 α 表示,则

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (6.7)$$

α 称为刚体的瞬时角加速度,单位为 rad/s^2 (弧度/秒²)。角加速度仍是代数量,当 α 与

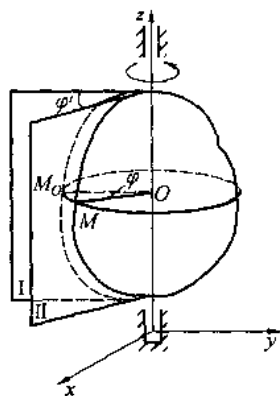


图 6.4

理论力学

$\frac{d\omega}{dt}$ 同号时,角速度增大,刚体越转越快;当 ω 与 $\frac{d\omega}{dt}$ 异号时,角速度减小,刚体越转越慢。

根据 ω, α 的特殊取值,刚体存在两种常见的特殊转动。

(1) 当 $\omega = \text{常数}$ 时, $\alpha = 0$, 刚体的转动称为匀速转动。可以得到转动方程: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, 其中 φ_0 为 $t = 0$ 时, 刚体的转角。

(2) 当 $\alpha = \text{常数}$ 时, 刚体的转动称为匀变速转动。通过积分可得其转动方程和相关公式为

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

其中, φ_0, ω_0 为 $t = 0$ 时刚体的转角和角速度; φ, ω 为任意 t 瞬时刚体的转角和角速度。

值得注意的是式(6.8)只适用于 $\alpha = \text{常值}$ 的情形, 否则不成立。

4. 刚体作定轴转动时其上各点的速度和加速度

由于定轴转动刚体上各点的运动轨迹均为一已知圆周曲线, 所以不难建立其弧坐标形式的运动方程, 进而得到其速度、加速度的表达式。

若定轴转动刚体的运动为已知, 在刚体上任一点 M 的运动轨迹为以 r 为半径的圆, 如图 6.5 所示。用自然法描述, 设以 $t = 0$ 时动点 M 的位置 M_0 为弧坐标 s 的原点, 则在任一瞬时 t , 刚体的转角为 φ 时, 动点 M 的弧坐标为

$$s = r\varphi \quad (6.9)$$

根据第 5 章的公式, 可得 M 点的速度和加速度为

$$\left. \begin{aligned} v &= \dot{s} = r\dot{\varphi} = r\omega \\ a_\tau &= \dot{v} = r\dot{\omega} = r\alpha \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

式(6.10)说明:

(1) 转动刚体内任一点速度的大小等于该点至转轴的距离与刚体角速度的乘积。因 r 恒为正值, 所以 v 与 ω 具有相同的正负号。速度方向沿圆周的切向方向, 指向与 ω 的转动方向一致。

(2) 转动刚体内任一点的切向加速度的大小等于该点至转轴距离与刚体角加速度的乘积, 方向如图 6.5 所示。

(3) 转动刚体内任一点法向加速度的大小等于该点至转轴的距离与刚体角速度平方的乘积。法向加速度的方向永远指向轨迹的曲率中心, 方向如图 6.5 所示。

M 点的全加速度 a 的大小和方向为

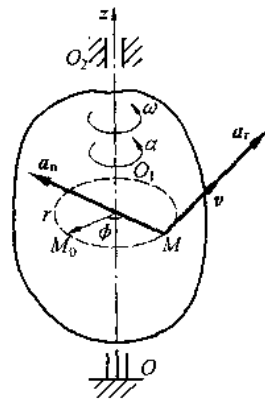


图 6.5

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

$$\tan(a, n) = \tan \theta = \frac{|a_r|}{a_n} = \frac{|\alpha|}{\omega^2} \quad (6.11)$$

在每一瞬时,刚体的 α 和 ω 都只是一个确定的数值,由以上分析可知:

(1) 每一瞬时转动刚体内各点的速度和加速度的大小,与这些点到轴线的距离成正比。

(2) 每一瞬时刚体内各点的加速度 a 与半径线间的夹角 θ 具有相同的值。

例 6.2 四连杆机构如图 6.6 所示,已知 $AB = O_1O_2$, $O_1A = O_2B = r = 0.3 \text{ m}$,如果曲柄 O_1A 以 $\varphi = \frac{1}{6}\pi t^2 \text{ rad}$ 的运动规律绕点 O_1 转动。求当 $t = 1 \text{ s}$ 时,连杆 AB 上的中点 M 的速度和加速度。

题意分析:该题为已知一刚体的转动规律,求另一刚体上一点的运动,属于机构的运动传动问题。对这类问题必须分析系统中各刚体作何种运动,以及各刚体之间相互接触点的特点。

解 根据题意, O_1A 绕 O_1 作定轴转动,运动中连杆 AB 始终与 O_1O_2 保持平行,可知 AB 作平动。而两构件的接触点无相对滑动,因此点 M 的运动与点 A 的运动相同,即

$$v_M = v_A$$

$$a_M = a_A$$

欲求 v_M, a_M , 只需求 v_A, a_A , 而 A 为曲柄 O_1A 上的点,故先求曲柄 O_1A 的角速度和角加速度,再求出 v_A, a_A 。

将曲柄 O_1A 的转动方程对时间求导,求得其角速度和角加速度为

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{1}{3}\pi t \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \ddot{\varphi} = \frac{1}{3}\pi \text{ rad/s}^2$$

可得

$$v_A = r\omega = 0.1\pi t \text{ m/s}$$

$$a_{rA} = r\alpha = 0.1\pi \text{ m/s}^2$$

$$a_{nA} = r\omega^2 = \frac{1}{30}(\pi t)^2 \text{ m/s}^2$$

当 $t = 1 \text{ s}$ 时, $\varphi = \pi/6$, 带入上式可得

$$v_A = 0.314 \text{ m/s}$$

$$a_{rA} = 0.314 \text{ m/s}^2$$

$$a_{nA} = 0.329 \text{ m/s}^2$$

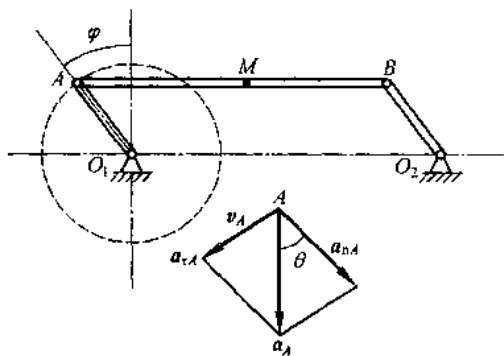


图 6.6

理论力学

点 A 的全加速度的大小与方向为

$$a_A = 0.455 \text{ m/s}^2$$

$$\angle(a_A, a_{nA}) = \arctan \frac{a_{\tau A}}{a_{nA}} = 43.65^\circ$$

习 题

6.1 判断下面说法是否正确:

(1) 刚体平动时,若已知刚体内任一点的运动,则可由此点的运动确定刚体内其他各点的运动。

(2) 平动刚体上各点的运动轨迹必为直线。

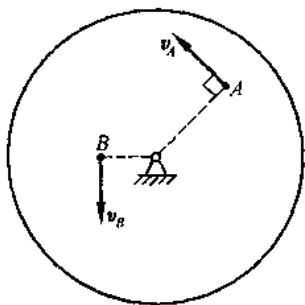
(3) 列车在直线轨道上行驶时,车厢和车轮的运动都是平动。

(4) 刚体作定轴转动时,其转动轴一定是在刚体内。

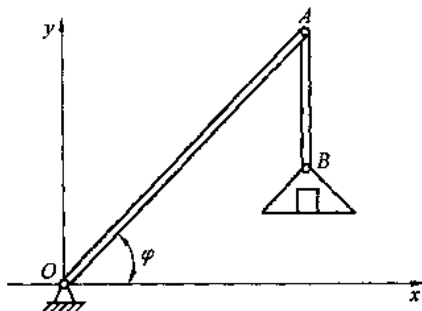
(5) 刚体作定轴转动时,角加速度为正,表示加速转动;角加速度为负,表示减速转动。

6.2 如题 6.2 图所示,定轴转动的轮上 A、B 两点的转动半径相差 20 cm,即 $OA - OB = 20 \text{ cm}$ 。已知 $v_A = 50 \text{ cm/s}$, $v_B = 10 \text{ cm/s}$ 。求转轮的角速度和 A 点的转动半径 OA。

6.3 如题 6.3 图所示为把工件送入干燥炉内的机构,叉杆 $OA = 1.5 \text{ m}$,在铅垂面内转动,杆 $AB = 0.8 \text{ m}$,A 端为铰链,B 端有放置工件的框架。在机构运动时,工件的速度恒为 0.05 m/s ,杆 AB 始终铅垂。设运动开始时,角 $\varphi = 0^\circ$ 。求运动过程中角 φ 与时间的关系,以及点 B 的轨迹方程。



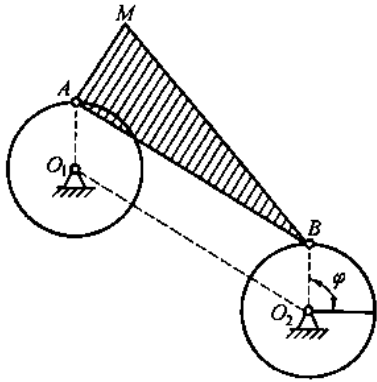
题 6.2 图



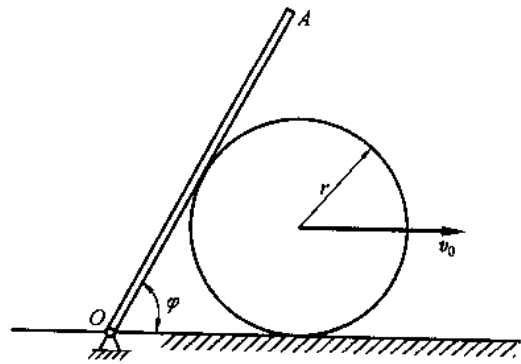
题 6.3 图

6.4 已知如题 6.4 图所示机构的尺寸如下: $O_1O_2 = AB = l$, $O_1A = O_2B = AM = r = 0.2 \text{ m}$,如 O_2 轮按 $\varphi = 15\pi t \text{ rad}$ 的规律转动。求当 $t = 0.5 \text{ s}$, AB 杆上 M 点的速度和加速度。

6.5 半径为 r 的圆轮沿水平直线运动,如题 6.5 图所示,轮心速度 v_0 为常数。求当 $\varphi = 60^\circ$ 时,OA 杆的角速度与角加速度。



题 6.4 图



题 6.5 图

第 7 章 点的合成运动

在前面的章节中,研究了点与刚体相对一定参考系的运动。在不同的参考坐标系下物体的运动是不相同的,在一个坐标下的运动是复杂的,可能在另一坐标下的运动是简单的。因此,本章研究点相对于不同参考系的运动,分析点相对于不同参考系运动之间的关系,并从中寻求求解复杂运动的方法,这种方法称为点的复合运动方法或点的合成运动方法。

7.1 点的合成运动的基本概念

同一个物体的运动,如果位于不同的参考系中观察,将有不同的观察结果。如图 7.1(a) 所示一沿直线轨道滚动的车轮,观察轮缘上一点 M 的运动,若站在地面观察,点 M 的轨迹是旋轮线,但若在车上观察,其轨迹却是一个圆。如图 7.1(b) 所示一桥式起重机搬运重物,若横梁静止不动,在起吊重物的过程中,行车同时在横梁上移动,则重物 A 相对于地面的运动是平面曲线运动,而相对于行车的运动则是垂直上下的直线运动。上述例子中,动点 M 相对于地面和相对于一个相对地面有运动的参照物的运动,其运动特征是不同的。也就是说,相对于不同的参考系,动点的运动方程、轨迹、速度和加速度也不相同。

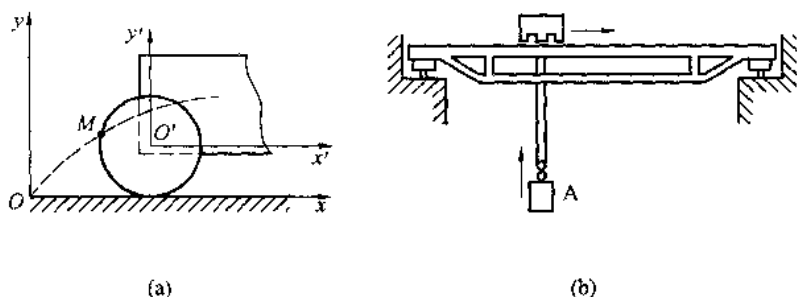


图 7.1

在此以前,我们研究刚体或点的运动,都是研究它们相对于地球参考系的运动。工程中,有时还要研究它们相对于另一些参考系的运动,这些参考系同时也在相对于地球参考系作不断的运动。例如,研究车轮相对于车厢的转动,这里车厢作为参考系也在相对于地球在不断地运动着。通常把地球参考系称为定参考系,而把相对于地球运动着的参考系称为动参考系。显然,被研究的刚体或点相对于定系和动系的运动是不一样的。工程中把相对于定系的运动称为绝对运动;相对于动系的运动称为相对运动;而动系相对于定系的运动称为牵连运动。

显然,如果没有牵连运动,动点的相对运动就是它的绝对运动;如果没有相对运动,动点随动坐标系的运动就是它的绝对运动。因此,动点的绝对运动既取决于动点的相对运

动,也取决于动系的牵连运动,是这两种运动的合成。反之,动点的绝对运动也可分解为牵连运动和相对运动。动点的这3种运动关系可用图7.2所示的框图表达。

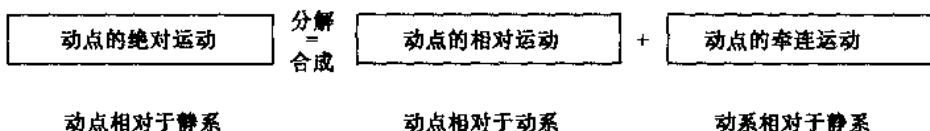


图 7.2

显然,如果牵连运动和相对运动均是已知的运动,则点或物体的绝对运动一定是一确定的运动。由已知的牵连运动和相对运动求其绝对运动,称为运动的合成。绝对运动称为牵连运动与相对运动的合成运动或复合运动。必须指出,动点的绝对运动和相对运动都是指点的运动,点的运动可能是直线运动也可能是曲线运动;但牵连运动指的是参考体或参考系的运动,这是刚体的运动,因此可能是平动、转动或其他较复杂的运动。

动点相对于动系的轨迹、速度和加速度,称为相对轨迹、相对速度和相对加速度。动点相对于静系的轨迹、速度和加速度,称为绝对轨迹、绝对速度和绝对加速度。在涉及点的牵连速度和牵连加速度的定义时,必须注意:虽然动点的牵连运动是动系相对于静系的运动,但动系的运动是整个刚体的运动而不是一个点的运动,所以除动系作平动外,刚体上各点的运动一般并不完全相同。而动系上对动点的运动有直接影响的是动系上与动点重合的点,所以定义:动系上与动点重合的那一点的速度和加速度为动点的牵连速度和牵连加速度。动系上与动点相重合的那一点称为动点在此瞬时的牵连点。

用 v_r 和 a_r 分别表示动点的相对速度和相对加速度,用 v_e 和 a_e 分别表示动点的牵连速度和牵连加速度,用 v_a 和 a_a 分别表示动点的绝对速度和绝对加速度。

7.2 点的速度合成

现在讨论3种速度间的关系。设有一相对于地面作任意运动的刚体,上面有一动点 M 沿刚体上某曲线运动,如图7.3所示。以地面为定参考系,刚体为动坐标系,则动点 M 相对于定参考系的运动为绝对运动,相对于动参考系的运动为相对运动,而动参考系相对于定参考系的运动为牵连运动。设某瞬时 t ,曲线在 AB 位置,动点在 M 处,经时间间隔 Δt 后,曲线运动至 $A'B'$ 位置,动点运动至 M' ,如图7.3所示。

动点的绝对运动可以看成是跟随动参考系的运动与动点沿曲线的相对运动两部分组成,于是有

$$MM' = MM_1 + M_1M' \quad (7.1)$$

式中, MM' 为动点的绝对位移; MM_1 是动参考系上与动点重合的点的位移,称为牵连位移; M_1M' 是动点相对于动参考系的位移,称为动点的相对位移。

将式(7.1)两端分别除以时间间隔 Δt ,并取 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限,则得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_1M'}{\Delta t} \quad (7.2)$$

由速度的定义可知式(7.2)左端就是动点 M 在瞬时 t 相对于定参考系的速度,即动点

理论力学

M 在瞬时 t 的绝对速度 v_a , 其方向为绝对运动轨迹 MM' 在 M 点处的切线方向。等式右端第一项是动坐标系上在瞬时 t 动点重合的点的速度, 即动点瞬时 t 的牵连速度 v_c , 其方向沿运动轨迹 MM_1 (牵连轨迹) 在 M 点的切线方向。而等式右端第二项是动点 M 在瞬时 t 相对于动参考系的运动速度, 即动点 M 的相对速度 v_r , 其方向为相对运动轨迹在 M 点处的切线方向。于是可得

$$v_a = v_c + v_r \quad (7.3)$$

即在运动的任意瞬时, 动点的绝对速度等于其相对速度与牵连速度的矢量和, 这就是点的速度合成定理。这一定理反映了合成运动中各速度之间的关系。式(7.3) 满足平行四边形法则, 对角线始终为绝对速度。此定理适用于任何形式的牵连运动。

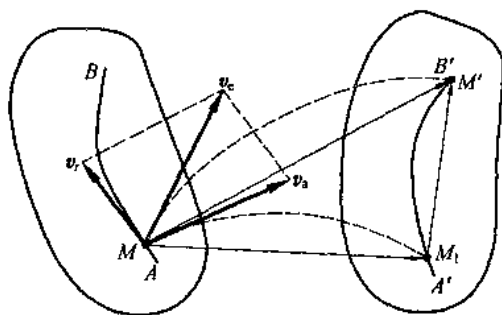


图 7.3

7.3 点的加速度合成

加速度合成定理比速度合成定理复杂得多, 牵连运动不同, 各加速度间的关系就不同, 本节对牵连运动为平动和牵连运动为定轴转动两种情况进行讨论。

7.3.1 牵连运动为平动时点的加速度合成定理

设图 7.4 所示建立在任意刚体上的动参考系 $O'x'y'z'$ 相对于静参考系 $Oxyz$ 平动。动点 M 在动系 $O'x'y'z'$ 中的相对运动方程为

$$\begin{aligned} x' &= f_1(t) \\ y' &= f_2(t) \\ z' &= f_3(t) \end{aligned} \quad (7.4)$$

根据点的运动学理论, 动点 M 的相对速度和相对加速度分别为

$$v_r = \frac{dx'}{dt}i' + \frac{dy'}{dt}j' + \frac{dz'}{dt}k' \quad (7.5)$$

$$a_r = \frac{d^2x'}{dt^2}i' + \frac{d^2y'}{dt^2}j' + \frac{d^2z'}{dt^2}k' \quad (7.6)$$

式中 i', j', k' —— 沿动坐标轴的单位矢量。

由于在每一瞬时, 平动物体内各点的速度和加速度都相等, 因此当牵连运动是平动时, 动点的牵连速度和牵连加速度与动参考系原点在每一瞬时的速度和加速度相等, 即

$$\begin{aligned} v_c &= v_{O'} \\ a_c &= a_{O'} \end{aligned} \quad (7.7)$$

为求动点 M 的绝对加速度 a_a , 需将点 M 的绝对速度 v_a 对时间求一次导数, 即

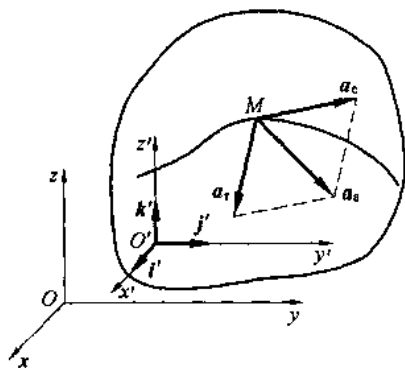


图 7.4

$$\mathbf{a}_a = d\mathbf{v}_a/dt \quad (7.8)$$

根据点的速度合成定理知

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e \quad (7.9)$$

所以

$$\mathbf{a}_a = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \quad (7.10)$$

先计算式(7.10)右端的第一项。将式(7.5)对时间求一阶导数,注意到当动参考系作平动时,单位矢量 i' 、 j' 、 k' 是大小和方向都保持不变的恒量。于是得

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2}i' + \frac{d^2y'}{dt^2}j' + \frac{d^2z'}{dt^2}k' = \mathbf{a}_r \quad (7.11)$$

可见,当牵连运动为平动时,相对速度对时间的一阶导数等于相对加速度。

又

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= \mathbf{v}'_O \\ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}'_O}{dt} = \mathbf{a}'_O \end{aligned} \quad (7.12)$$

因动参考系作平动,原点的加速度等于动点 M 的牵连加速度,即

$$\mathbf{a}'_O = \mathbf{a}_e$$

可见,牵连运动为平动时,牵连速度对时间的一阶导数等于牵连加速度。

综合上面各式得

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e \quad (7.13)$$

这就是牵连运动为平动时动点的加速度合成定理:当牵连运动为平动时,动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的相对加速度与牵连加速度的矢量和。这一定理揭示了动点加速度的分解与合成的关系,具体应用时,可用矢量的平行四边形法则或投影定理处理。

例 7.1 曲柄滑槽机构如图 7.5 所示。曲柄 OA 绕 O 轴转动,滑块 A 可在滑槽 DE 内滑动,并带动 BC 杆在水平方向作往复运动。设曲柄长 $OA = r = 40$ cm,以转速 $n = 120$ r/min 按顺时针方向匀速转动,滑槽 DE 与水平线间的夹角为 45° 。求曲柄与水平线夹角 $\alpha = 45^\circ$ 时 BC 杆的加速度。

解 取曲柄上的点 A 为动点,动系与槽杆 BC 固连。动点的绝对运动是以 OA 为半径的匀速圆周运动,所以其绝对加速度 \mathbf{a}_a 的大小为

$$a_a = a_a^n = r\omega^2 = 40 \text{ cm} \times \left(\frac{120 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}}{30} \pi \right)^2 = 640\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

其方向由点 A 指向圆心 O 。

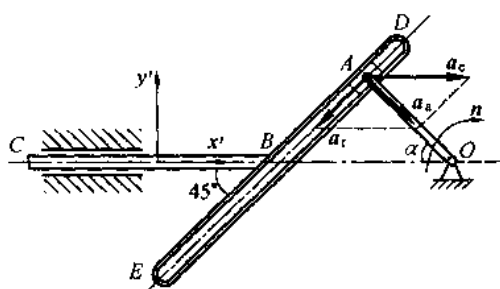


图 7.5

动点的牵连运动为槽杆在水平方向的往复平动,故牵连加速度的方向沿水平方向,大小未知。

相对运动是 A 点沿 DE 槽的直线运动,故相对加速度的方向沿 DE 直线,大小未知。根据牵连运动为平动时的加速度合成定理作加速度平行四边形,从几何关系可得

$$a_r = a_a = 6.4\pi^2 \text{ m/s}^2$$

$$a_e = 2a_a \cos 45^\circ = 90.4\pi^2 \text{ m/s}^2$$

7.3.2 牵连运动为定轴转动时点的加速度合成定理

当牵连运动为定轴转动时,加速度合成定理与牵连运动为平动时不同。现导出牵连运动为定轴转动时的加速度合成定理。

设弯管绕 O 作定轴转动,动点沿弯管运动。在瞬时 t 弯管位于 AB 位置,动点处于 M 点处;经过时间间隔 Δt ,弯管运动至 A'B' 位置,动点处于 M' 处。在瞬时 t,动点的绝对速度、相对速度以及牵连速度分别为 v_a, v_r, v_e ;在瞬时 t + Δt ,动点的绝对速度、相对速度和牵连速度分别 v'_a, v'_r, v'_e ,如图 7.6 所示。由速度合成定理,得

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + \frac{dv_r}{dt} \quad (7.14)$$

按加速度定义可写成

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_a - v_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_e - v_e}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_r - v_r}{\Delta t} \quad (7.15)$$

等式右端第一式中的速度增量并不是牵连轨迹上速度的增量,因此它不是牵连加速度;等式右端第二式中的速度增量也不是相对轨迹上速度的增量,因此它也不是相对加速度。为弄清它们的含义,把上述运动分解为两步,首先动点 M 随弯管运动到 M₁ 处,然后再相对于弯管运动到 M'。设动点在 M₁ 处的相对速度和牵连速度分别为 v_{r1}, v_{e1} ,如图 7.6(b)、(c) 所示,引入到式(7.15)中,可写成

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_a - v_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{e1} - v_e}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_e - v_{e1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{r1} - v_r}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_r - v_{r1}}{\Delta t}$$

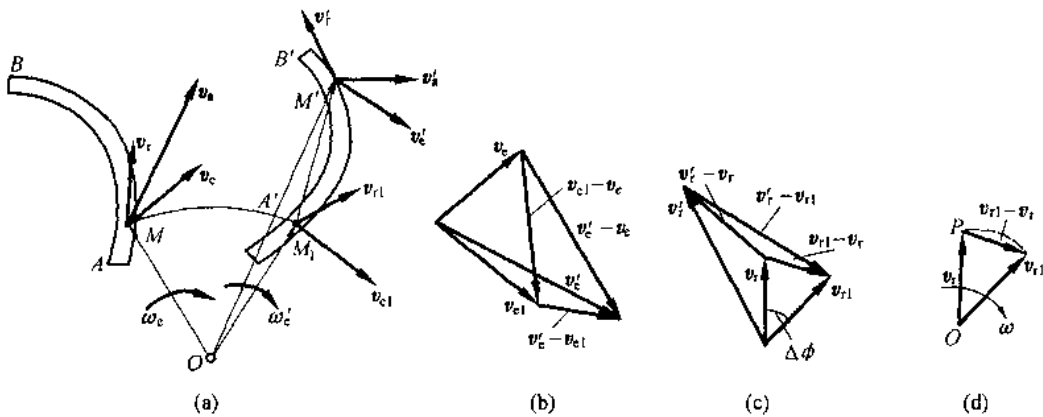


图 7.6

下面分别讨论上式各项的意义。根据加速度的定义：等式左端为瞬时 t 动点 M 绝对速度对时间的变化率，即为动点的绝对加速度 a_a ；等式右端第一项中的速度增量是牵连轨迹上的速度增量，极限值为瞬时 t 牵连速度对时间的变化率，因此它是动点的牵连加速度 a_e ；等式右端第四项中的速度增量是相对轨迹上的速度增量，极限值为瞬时 t 动点相对速度对时间的变化率，故为动点 M 的相对加速度 a_r 。而等式右端的第二、第三项，是相对运动和牵连运动相互影响而产生的附加加速度。下面分别讨论这两项。

先讨论第二项 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_e - v_{e1}}{\Delta t}$ 。此项是由于相对运动的影响，使动参考系上与动点重合的点的位置发生了改变，导致牵连速度的大小发生改变而产生的附加加速度。由图 7.6 并根据定轴转动刚体上任一点速度的矢积表示，可得

$$\begin{aligned} v'_e &= \omega_e \times \overline{OM'} \\ v_{e1} &= \omega_e \times \overline{OM_1} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v'_e - v_{e1}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega'_e \times (\overline{OM'} - \overline{OM_1})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega'_e \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{M_1M'}}{\Delta t} = \omega_e \times v_r \end{aligned}$$

式中， ω_e 为 t 时刻动参考系转动的角速度矢量，垂直与纸面指向内。

再讨论第三项 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{r1} - v_r}{\Delta t}$ ，可以看出此项是由于牵连运动的影响，使相对轨迹的方向发生了变化，引起相对速度方向改变而产生的附加加速度。其中 $v_{r1} - v_r$ 是动参考系绕 O 轴的转动（牵连运动）时，动点在未发生相对运动的情况下出现的相对速度增量，它仅仅反映了牵连运动引起相对速度方向改变的部分。由图 7.6(d) 可知， $\frac{v_{r1} - v_r}{\Delta t}$ 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限，相当于矢量 v_r 绕其矢端 O 转动时其矢末端 P 点的速度 v_p 。这类似用矢量研究定轴转动刚体上一点的速度方法，此处的 v_r 相当于定轴转动刚体中描述点位置的大小不变面方向变化的矢径 r ，而 ω_e 相当于定轴转动刚体的转动角速度矢量 ω_z ， t 时刻定轴转动刚体上点的速度 $v = \omega_z \times r$ ，类比此处有 $v_p = \omega_e \times v_r$ ，于是

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{r1} - v_r}{\Delta t} = v_p = \omega_e \times v_r$$

将两项附加加速度综合，于是得

$$a_a = a_e + a_r + 2\omega_e \times v_r \quad (7.16)$$

式中， $2\omega_e \times v_r$ 是由于动参考系转动时，牵连运动所引起的相对速度方向的变化，以及相对运动所引起的牵连速度改变而出现的附加加速度，称为科里奥利斯加速度，简称为科氏加速度，记为 a_c ，其大小和方向由下式决定，即

$$a_c = 2\omega_e \times v_r \quad (7.17)$$

根据矢积运算规则，科氏加速度的大小为

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin \theta \quad (7.18)$$

其中 θ 为 ω_e 与 v_r 两矢量间的最小夹角。科氏加速度 a_c 垂直于 ω_e 和 v_r ，指向判断如下：从矢端 a_c 的端点看过去，将 ω_e 按逆时针转动转到 v_r 的角度应最小，如图 7.7 所示。

当 ω_e 和 v_r 平行时， $a_c = 0$ ；当 ω_e 和 v_r 垂直时， $a_c = 2\omega_e v_r$ ，图 7.5 所示的平面问题即属于此类问题。

理论力学

于是得到当动参考系作定轴转动时,点的加速度的关系为

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r \quad (7.19)$$

这就是动参考系为定轴转动时的加速度合成定理,即任一瞬时,动点的绝对加速度,等于牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和。

在使用加速度合成定理时,绝对加速度、相对加速度和牵连加速度可能同时有切向和法向分量(应根据其运动和轨迹来确定),这样式(7.19)中的矢量数目较多,常采用解析法,将式(7.19)的两端分别投影到任意选定的投影轴上来求解。另外,法向加速度和科氏加速度与速度有关,要求它们必须作速度分析。

例 7.2 圆盘半径 $R = 5 \text{ cm}$,以匀角速度 ω_1 绕水平轴 CD 转动,同时框架和 CD 轴一起以匀角速度 ω_2 绕通过圆盘中心 O 的铅直轴 AB 转动,如图 7.8 所示。若 $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 3 \text{ rad/s}$,求圆盘上的 1 和 2 两点的绝对加速度。

解 首先计算点 1 的加速度。取圆盘上的点 1 为动点,动参考系与框架固结,则动参考系绕 AB 轴转动。动点的牵连运动为绕 AB 轴的定轴转动,设想动参考系为形状不受限制的刚体,则与动点重合的点是点 O 为圆心在水平面内作匀速圆周运动,因此这点只有法向加速度,并且该法向加速度即为动点 1 的牵连加速度,它的大小为

$$a_e = \omega_2^2 R = 45 \text{ cm/s}^2$$

方向如图 7.8 所示。

动点的相对运动是以点 O 为圆心,在铅直平面内的匀速圆周运动,因此,也只有相对法向加速度,它的大小为

$$a_r = \omega_1^2 R = 125 \text{ cm/s}^2$$

方向如图 7.8 所示。

由于动参考系作定轴转动,还存在科氏加速度,其大小为

$$a_c = 2\omega_2 v_r \sin 180^\circ = 0$$

于是点 1 的绝对加速度的大小为

$$a_a = a_e + a_r = 170 \text{ cm/s}^2$$

它的方向与 a_e 、 a_r 的方向相同,指向轮心。

其次计算点 2 的加速度。仍将动参考系固定在框架上,因动参考系上与动点 2 相重合的点(即动点 2 的牵连点)是轴线上的一个点,这点的加速度等于零,因此

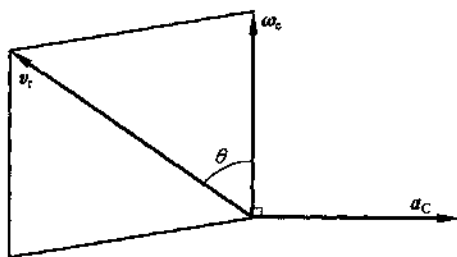


图 7.7

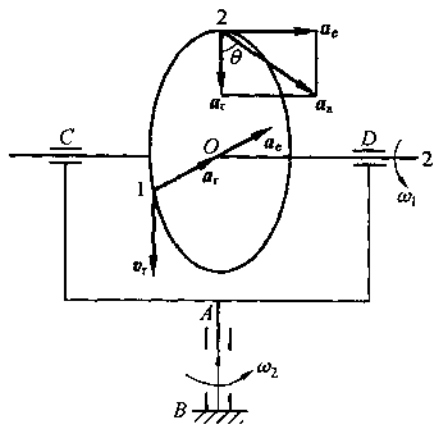


图 7.8

$$a_e = 0 \text{ cm/s}^2$$

动点的相对运动是以点 O 为圆心、在铅直平面内的匀速圆周运动,因此,也只有法向加速度,它的大小为

$$a_r = \omega_1^2 R = 125 \text{ cm/s}^2$$

方向指向轮心。

动参考系作定轴转动,有科氏加速度存在,其大小为

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 150 \text{ cm/s}^2$$

科氏加速度的方向垂直于圆盘平面,方向如图 7.8 所示。

于是,点 2 的绝对加速度的大小为

$$a_a = \sqrt{a_r^2 + a_c^2} = 195 \text{ cm/s}^2$$

它与铅直线形成的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{a_c}{a_r} = 50^\circ 12'$$

应用加速度合成定理求解点的加速度时应注意以下几个问题。

① 选取动点和动参考系后,应根据动参考系的运动(平动还是定轴转动),确定是否有科氏加速度。

② 因为点的绝对运动轨迹和相对运动轨迹可能都是曲线,因此点的加速度合成定理一般写为

$$a_a^r + a_a^n = a_e^r + a_e^n + a_r^r + a_r^n + a_c$$

式中每一项都有大小和方向两个要素,必须认真分析,才能正确地解决问题。再一次强调,上式中各项法向加速度的方向总是指向相应轨迹曲线的曲率中心,它们的大小可根据相应的速度大小求出。因此在速度已经求解的情况下,各项法向加速度都是已知量。同时,由于科氏加速度的大小和方向都是由牵连角速度和相对速度确定的,因此其大小和方向也是已知量。这样,在加速度合成定理中只有 3 项切向加速度的 6 个要素是可能的待求量,若知道其中的 4 个要素,则余下的 2 个要素就完全可求了。

习 题

7.1 判断下面说法是否正确

(1) 点的合成运动仅指点同时相对两个物体的运动。

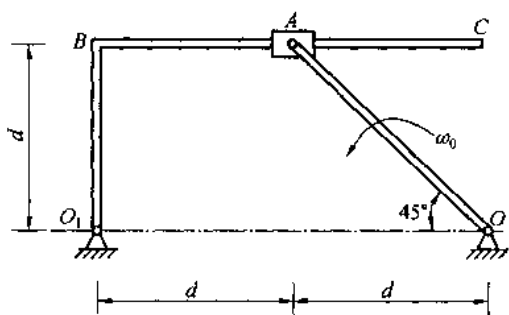
(2) 利用速度合成定理分析动点的运动时,动点的牵连速度是指某瞬时动系上与动点重合点的速度。

(3) 科氏加速度产生的原因是动点的牵连速度和相对速度在方向上发生了改变。

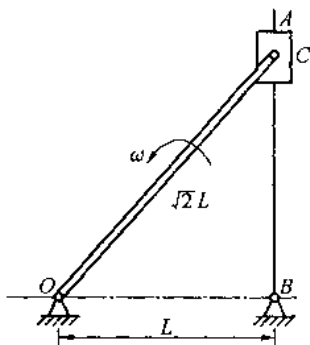
7.2 如题 7.2 图所示,曲柄 OA 在图示瞬时以 ω_0 绕轴 O 转动,并带动直角曲杆 O_1BC 在图示平面内运动。若取套筒 A 为动点,杆 O_1BC 为动坐标系,试求相对速度的大小和牵连速度的大小。

7.3 如题 7.3 图所示,已知杆 OC 长为 $\sqrt{2}L$,以匀角速度 ω 绕 O 点转动。若以点 C 为动点, AB 为动系,试求当 AB 杆处于铅垂位置时,点 C 的相对速度和牵连速度的大小和方向。

理论力学



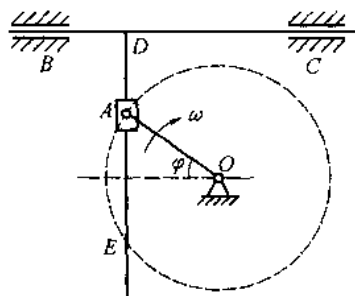
题 7.2 图



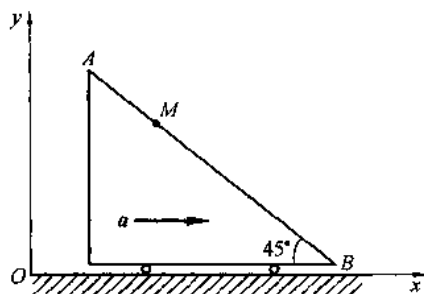
题 7.3 图

7.4 如题 7.4 图所示, 曲柄滑道机构中, $BCDE$ 由两直杆焊接而成。曲柄 OA 长为 10 cm , 以匀角速度 $\omega = 20\text{ rad/s}$ 绕 O 轴转动, 通过滑块 A 带动 $BCDE$ 作水平平动。求图示 φ 角分别等于 0° 、 30° 、 90° 时, $BCDE$ 的速度。

7.5 如题 7.5 图所示, 斜面 AB 以 10 cm/s^2 的加速度沿 Ox 轴的正向运动, 物块以匀相对加速度 $10\sqrt{2}\text{ cm/s}^2$ 沿斜面滑下。求物块 M 的加速度。

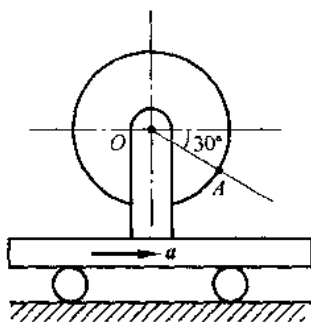


题 7.4 图



题 7.5 图

7.6 如题 7.6 图所示, 小车沿水平方向向右作匀加速运动, 加速度 $a = 49.2\text{ cm/s}^2$ 。车上有一半径 20 cm 的轮子按 $\omega = t^2$ 绕 O 轴转动, $t = 1\text{ s}$ 时, 轮缘上 A 点在图示位置, 求此时 A 点的加速度。



题 7.6 图

第 8 章 刚体的平面运动

前面章节介绍了刚体的两种简单运动:平动和转动,本章将研究刚体的另一种较复杂的运动——平面运动,这是许多机构中常见的一种运动。平面运动的理论不仅对研究一般机构的运动具有重要的意义,而且是土建工程中对平面结构进行机动分析的理论依据。

本章应用运动分解和合成的概念,将刚体的平面运动分解成较为简单的平动和转动,并据此研究作平面运动刚体的角速度、角加速度及与其上任一点的速度和加速度之间的关系。

8.1 刚体的平面运动及其分解与合成

8.1.1 刚体平面运动的简化

工程实际中,许多刚体的运动既不是平动,也不是定轴转动。如图 8.1(a) 所示沿直线滚动的车轮和图 8.1(b) 所示曲柄连杆机构中连杆 AB 的运动。这些物体运动的一个共同特点是:在运动过程中,其上任一点与某一固定平面的距离始终保持不变。或者说,刚体内任一点始终在一个与某面定平面平行的平面内运动。把具有这种运动特征的刚体运动称为刚体的平面运动。

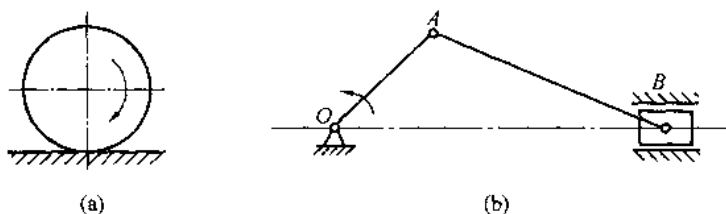


图 8.1

根据刚体的平面运动特征,可对作平面运动的刚体进行简化。设平面 I 为一固定平面,作平面 II 与平面 I 平行并与刚体相交的一平面图形 S ,如图 8.2 所示。当刚体作平面运动时,平面图形 S 始终保持与平面 II 内。如果在刚体内任取与图形 S 垂直的直线 A_1A_2 ,显然直线 A_1A_2 的运动是平动,其上各点具有相同的运动特征。因此,直线 A_1A_2 与图形 S 的交点 A 的运动就可以代表整条直线

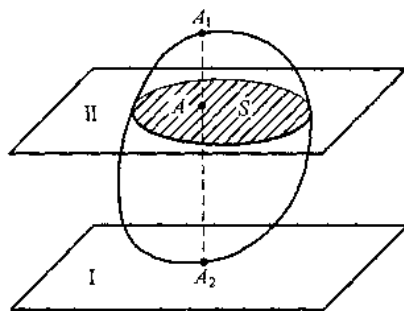


图 8.2

理论力学

A_1A_2 的运动,过刚体作无数条这样的直线,它们与平面 Π 的交点组成平面图形 S ,因而平面图形 S 的运动即可代表整个刚体的运动。也就是说,刚体的平面运动可以简化为平面图形在其自身平面内的运动。

8.1.2 平面运动方程

刚体的平面运动可归结为平面图形在其自身平面内的运动。任意瞬时,平面图形的位置,可由图形内任意线段 AB 的位置唯一确定,如图 8.3 所示,而线段 AB 在任意瞬时的位置,则可由线段上一点 A 的坐标 x_A, y_A 以及此线段与 x 轴的夹角 φ 来确定。当图形运动时,坐标 x_A, y_A 以及夹角 φ 都将随时间而改变,并可表示为时间 t 的单值连续函数

$$\left. \begin{aligned} x_A &= f_1(t) \\ y_A &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

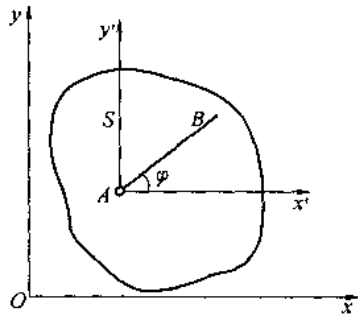


图 8.3

这组方程确定了任意瞬时平面图形在平面上的位置,也确定了整个刚体的运动,故称为刚体的平面运动方程。图中点 A 称为基点。

如果运动中图形上基点 A 固定不动,则平面图形的运动为定轴转动;如果运动中线段 AB 的方位保持不变,即 φ 角不变,则平面图形的运动为平动。显然,刚体绕定轴转动和刚体的平动均可视为刚体平面运动的特殊情况。

8.1.3 平面运动的分解

为了对平面图形的运动作具体分解,先作一静系 xOy ,然后在图形 S 上任选一基点 O' ,以点 O' 为原点建立动坐标系 $x'O'y'$,如图 8.4(a) 所示。设在运动过程中,动系的 x' 轴和 y' 轴与静系的 x 轴和 y 轴始终保持平行,即动系随基点 O' 作平动。经过 Δt 时间后,动系 $x'O'y'$ 运动到 $x''O''y''$ 处,图形 S 上的 $O'A$ 线段则运动到 $O''A$ 处。由运动合成的概念可知,图形 S 相对于静系 xOy 的绝对运动可以看成是随基点 O' 平动的同时,又绕基点转动的这两种运动的合成。图形 S 绕基点 O' 的转动是相对动系 $x'O'y'$ 的相对运动;而基点 O' 相对于静系的平动是牵连运动。可见,平面图形 S 的运动可以分解为随基点的平动和绕基点的转动。

分解平面图形的运动时,基点的选择是任意的。若选择不同的点作基点,是否会对分解后图形的平动和转动的运动规律产生影响呢?以平面图形 S 中任一直线 AB 的运动为例进行分析,如图 8.4(b) 所示。设在 Δt 时间内图形 S 从位置 I 运动到位置 II,直线 AB 也随之运动到 $A'B'$ 位置。若选点 A 为基点,则直线 AB 的运动可看成先随基点 A 平动到 $A'B''$ 位置,然后再绕点 A' 转动到 $A'B'$ 位置,其转过的角位移为 $\Delta\varphi_1$ 。若选点 B 为基点,则直线 AB 的运动可看成先随基点 B 平动到 $A''B'$ 位置,然后再绕点 B 转动到 $A'B'$ 位置,其转过的

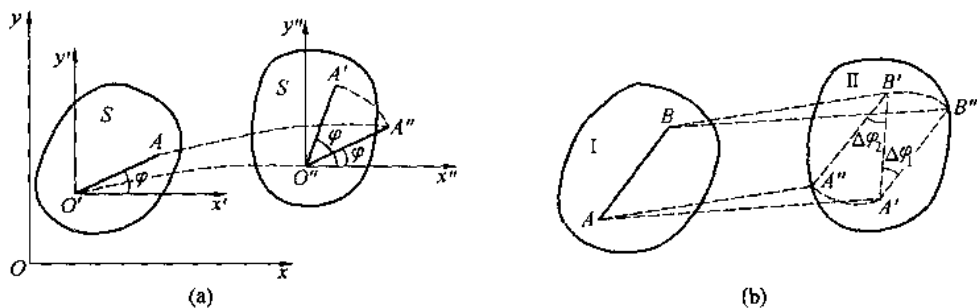


图 8.4

角位移为 $\Delta\varphi_2$ 。当平面图形运动时,一般点 A 和点 B 的运动情况并不相同,而图形平动部分的运动规律必须与基点的运动规律一致,所以若分别以点 A 和点 B 为基点,图形的平动规律一般是不相同的。但因 $A'B' \parallel AB, A''B'' \parallel AB$,所以 $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$,且由 $A'B'$ 到 $A''B''$ 和由 $B'A'$ 到 $B''A''$ 的转向均为逆时针方向,所以图形相对于基点 A 或 B 转过的角位移相等,于是有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t} \quad (8.2)$$

即
$$\omega_1 = \omega_2 \quad (8.3)$$

又因为
$$d\omega_1/dt = d\omega_2/dt \quad (8.4)$$

所以
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (8.5)$$

这说明无论以点 A 为基点或以点 B 为基点,图形随基点的转动规律是一样的。因 AB 是任取的,不失一般性,故可有结论:平面图形随同基点的平动规律与基点的选择有关,而绕基点的转动规律与基点的选择无关。即在同一瞬时,图形绕任一基点转动的角速度和角加速度都是相同的。因此在论及平面图形的角速度和角加速度时,无需特别指明它们是相对于哪个基点而言,而可统称为图形的角速度和角加速度。而且由于动系的运动是平动,所以图形的角速度和角加速度就是它的绝对角速度和绝对角加速度。

虽然基点可以任选,但在解决实际问题时,往往选取运动情况已知的点作为基点。

8.2 平面图形内各点的速度

8.2.1 求平面图形内各点速度的基点法

根据前面所述,平面图形在任意瞬时的运动,可分解为跟随基点的牵连平动和绕此基点的相对转动。如图 8.5 所示,设在平面图形 S 上任取一点 A 为基点,且点 A 的速度为 v_A ,平面图形转动的角速度为 ω 。可前面讲述的速度合成定理,求得平面图形上任一点 M 的速度。为此,以点 A 为原点建立一随基点平动

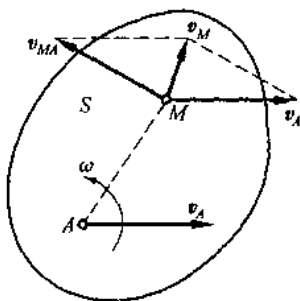


图 8.5

理论力学

的动坐标系,则基点的运动即为平面图形的牵连运动, M 点的牵连速度为 $v_e = v_A$ 。 M 点相对于基点的运动为圆周运动,故相对速度为

$$v_r = v_{MA} = AM \cdot \omega \quad (8.6)$$

其方向与 AM 垂直,指向由 ω 的转向确定。

M 点的绝对速度记为 v_M ,则

$$v_M = v_A + v_{MA} \quad (8.7)$$

即平面图形内任一点的速度,等于基点的速度与该点相对于基点运动速度的矢量和。这种将点的合成运动方法用于求解平面图形内任意点速度的方法,称为基点法,亦称为速度合成法。

由于点 A 和点 M 都可以是任意选取的,故式(8.7)也说明了平面图形上任意两点速度之间的关系。

若将式(8.7)的两端分别向 A 、 M 两点的连线投影,因 v_{MA} 总是与 AM 垂直,其在 AM 的投影必为零,于是得

$$(v_M)_{AM} = (v_A)_{AM} \quad (8.8)$$

这就是速度投影定理:平面图形上任意两点的速度在此两点连线上的投影必定相等。定理表明,平面图形上任意两点间连线无伸缩变形,这反映了刚体不可变形的性质。因此,当平面图形上某点的速度大小和方向已知,且图形上另一点的速度方向也已知时,则可用此定理求得该点速度的大小。

例 8.1 在如图 8.6 所示的机构中,摆杆 OC 在铅直面内绕 O 轴转动,摆杆上套一可沿之滑动的套筒 AB 。在套筒 AB 上用铰链连接滑块 A ,这个滑块可沿铅直的槽 DE 滑动。已知: $\omega = 2 \text{ rad/s}$, $AB = 20 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$ 。求当 $\varphi = 30^\circ$ 时,点 B 的速度。

解 套筒 AB 作平面运动,其角速度与杆 OC 的角速度相同,即为 ω 。

为求点 B 的速度,需先求出滑块 A 的速度。为此,以滑块 A 为动点, OC 杆为动参考系。动点的绝对运动为沿铅直槽的滑动;牵连运动为 OC 杆绕 O 轴的定轴转动;相对运动为套筒(滑块) AB 沿 OC 杆的相对滑动。速度矢量如图 8.6 所示,由点的速度合成定理有

$$v_a = v_e + v_r$$

由各量间的几何关系有

$$v_A = v_a = \frac{v_e}{\cos \varphi} = \frac{OA \cdot \omega}{\cos \varphi} = \frac{h \cdot \omega}{\cos^2 \varphi} = 26.7 \text{ cm/s}$$

现在求套筒 AB 上点 B 的速度。套筒作平面运动,点 A 的速度已求得,以点 A 为基点,有

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

上式中 v_A 的方向铅直向下,大小已知; v_{BA} 的方向与 OC 垂直,大小为

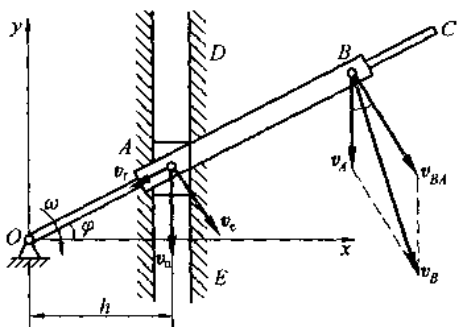


图 8.6

$$v_{BA} = \omega \cdot AB = 2 \times 20 \text{ cm/s} = 40 \text{ cm/s}$$

速度平行四边形如图 8.6 所示,注意 v_B 应为平行四边形的对角线。由余弦定理,可得点 B 的速度为

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA} \cos \varphi} = 64.5 \text{ cm/s}$$

综述,在应用基点法求解平面图形上任意一点 M 的速度时,应注意以下几点。

① 解题时应分析各物体的运动形式(平动、定轴转动、平面运动)。

② 在选择基点时,应选择平面图形上速度大小和方向均已知或容易求出的点为基点。

③ 在速度分析时,所求点的速度由公式 $v_B = v_A + v_{BA}$ 决定。同时注意, v_B 应为速度平行四边形的对角线。

8.2.2 求平面图形内各点速度的瞬心法

前面介绍的用速度合成法(基点法)求平面图形上某点的速度,必须先选定一点作基点,因而图形上任一点的速度一般都由两项速度合成,一是基点的速度,二是绕基点转动的相对速度。如果能找到一个速度为零的点作基点,则图形上其他任一点的速度就只剩下该点绕基点转动的速度一项,问题的求解就简单多了。那么图形上是否存在这种速度等于零的点,这样的点是不是唯一的呢?回答是肯定的。下面给出这个问题的有关定理及其证明。

1. 定理

一般情况下,每一瞬时平面图形内都唯一地存在一个速度为零的点。

证明:设平面图形 S 如图 8.7 所示。取点 A 为基点,其速度为 v_A ,图形的角速度为 ω ,转向如图 8.7 所示。根据速度合成定理,图形上任一点 M 的速度可按下式计算:

$$v_M = v_A + v_{MA} \quad (8.9)$$

如果点 M 在 v_A 的垂线 AN 上(由 v_A 到 AN 的转向与图形的转向一致),由图 8.7 可以看出, v_A 和 v_{MA} 在同一直线上,但方向相反,故 v_M 的大小为

$$v_M = v_A - \omega \cdot AM \quad (8.10)$$

由式(8.10)可见,随着点 M 在 AN 线上位置的不同,大小也不同, v_M 在 AN 线上总可以找到一点 C,满足:

$$AC = v_A / \omega$$

则

$$v_C = v_A - AC \cdot \omega = v_A - \frac{v_A}{\omega} \times \omega = 0$$

也就是说,点 C 的瞬时速度为零,于是定理得到证明。

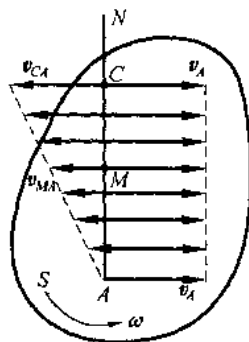


图 8.7

理论力学

点 C 或平面图形内某瞬时速度等于零的点称为**瞬时速度中心**, 简称为**速度瞬心**。

2. 平面图形内各点的速度及其分布

根据上述定理, 每一瞬时, 在平面图形内都可以找到一个速度等于零的点 C , 即 $v_A = 0$ 。选取点 C 为基点, 则图 8.8(a) 所示图形内 A 、 B 、 D 点的速度分别为

$$v_A = v_C + v_{AC} = v_{AC}$$

$$v_B = v_C + v_{BC} = v_{BC}$$

$$v_D = v_C + v_{DC} = v_{DC}$$

它们的大小分别为

$$v_A = CA \cdot \omega \quad v_B = CB \cdot \omega \quad v_D = CD \cdot \omega \quad (8.11)$$

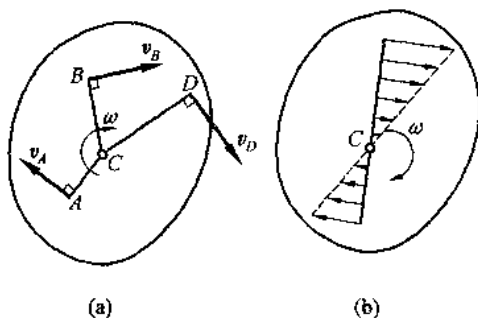


图 8.8

由此得结论: 图形内任一点的速度等于该点随图形绕瞬时速度中心转动的速度。即其大小与该点到速度瞬心 C 的距离成正比,

其方位垂直于该点与速度瞬心 C 的连线, 指向与图形的转向一致。显然, 这种速度分布情况与刚体绕定轴转动时其上各点的速度分布情况类似, 如图 8.8(b) 所示。于是平面图形的运动可看成为绕速度瞬心作瞬时转动。

应该注意, 速度瞬心可以在平面图形内, 也可以在平面图形外, 而且它的位置并不是固定不变的。在每一瞬时, 必有一点成为图形的瞬心, 但在不同的瞬时, 图形瞬心的位置是不同的, 或者说不同瞬时, 有不同的点成为图形的瞬心。

利用速度瞬心求平面图形内任一点速度的方法称为**速度瞬心法**。此法在求平面图形上任一点的速度时非常方便。应用此法求解的关键是确定速度瞬心的位置, 解题时, 可以根据机构的几何条件和已知速度的大小或方向确定速度瞬心的位置。确定速度瞬心位置的常见情况有下列几种。

(1) 已知平面图形上 A 、 B 两点某瞬时速度的方向如图 8.9(a) 所示, 过点 A 作一条垂直于 v_A 的直线, 过点 B 也作一条垂直于 v_B 的直线, 由于瞬心 C 至 A 、 B 两点的连线 CA 及 CB 应分别垂直于这两点的速度矢量, 因此瞬心 C 的位置必在过点 A 和点 B 所作速度垂线的交点上。

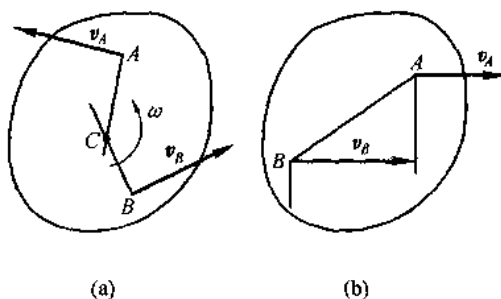


图 8.9

特殊情况: 若 A 、 B 两点的速度 v_A 与 v_B 相互平行, 但 AB 连线不与 v_A 或 v_B 的方向垂直, 如图 8.9(b) 所示。则速度瞬心 C 将位于无穷

远处, 这时, $\omega = \frac{v_A}{AC} = 0$, 这意味着此瞬时平面图形的角速度为零, 各点的速度相同, 刚体作平动。因为这只是在此瞬时发生, 所以称此时刚体的运动为**瞬时平动**。但要注意的是, 此瞬时各点的加速度并不相同。

(2) 当平面图形沿某一固定面作无滑动的滚动时, 如图 8.10 所示的车轮, 则每一瞬

时图形上与固定面的接触点应与固定面的速度相同,由于固定面的速度为零,所以图形与固定面接触点的速度也为零。也就是说,每一瞬时平面图形上与固定面的接触点 C 是该图形的速度瞬心。

(3) 某瞬时,已知平面图形上 A 、 B 两点的速度 v_A 与 v_B 相互平行,方向均与 AB 连线垂直,这又可分几种情况确定瞬心位置。

① v_A 与 v_B 的指向相同,但大小不同时,如图 8.11(a) 所示。作 AB 连线的延长线,再作速度 v_A 与 v_B 端点的连线,则这两条连线的交点即是速度瞬心 C 。

② v_A 与 v_B 的指向相反,如图 8.11(b) 所示。作 AB 连线,再作速度矢 v_A 与 v_B 端点的连线,则这两条连线的交点 C 即为速度瞬心。

③ v_A 与 v_B 的大小相等,指向也相同,如图 8.11(c) 所示。这时速度瞬心 C 的位置在无穷远处,平面图形内各点的速度相同,刚体作瞬时平动。

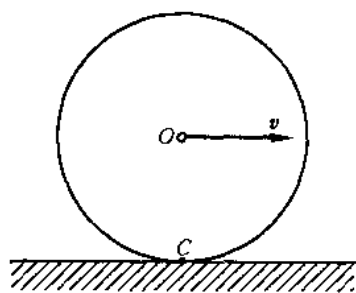


图 8.10

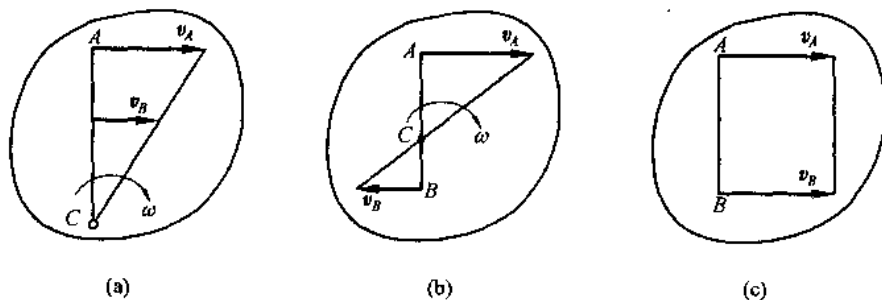


图 8.11

例 8.2 车轮沿直线轨道作纯滚动,点 C 与地面接触。轮心 O 的速度 v_O 为 45 km/h 。设车轮半径 R 和 r 分别为 40 cm 和 30 cm ,如图 8.12 所示。求轮上 A 、 B 、 C 、 D 、 E 各点的速度。

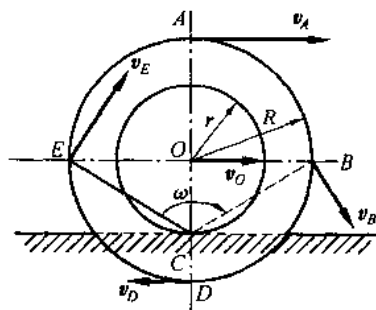


图 8.12

解 由于车轮沿直线轨道无滑动地滚动,则车轮与轨道接触的点 C 的速度应为零,

故此点就是车轮在此瞬时的速度瞬心。此时车轮的角速度为

$$\omega = v_O/OC = v_O/r = 41.67 \text{ rad/s}$$

于是可求得 A、B、D、E 各点的速度大小为

$$v_A = AC \cdot \omega = (R + r)\omega = (0.4 \text{ m} + 0.3 \text{ m}) \times 41.67 \text{ rad/s} = 29.17 \text{ m/s}$$

$$v_B = BC \cdot \omega = (\sqrt{R^2 + r^2})\omega = (\sqrt{0.4^2 + 0.3^2} \text{ m}) \times 41.67 \text{ rad/s} = 20.83 \text{ m/s}$$

$$v_D = DC \cdot \omega = (R - r)\omega = (0.4 \text{ m} - 0.3 \text{ m}) \times 41.67 \text{ rad/s} = 4.167 \text{ m/s}$$

$$v_E = EC \cdot \omega = (\sqrt{R^2 + r^2})\omega = (\sqrt{0.4^2 + 0.3^2} \text{ m}) \times 41.67 \text{ rad/s} = 20.83 \text{ m/s}$$

各点速度的方向与各点和速度瞬心的连线(即瞬时转动半径),如图 8.12 所示。

8.3 平面图形内各点的加速度

前面已经指出,平面图形在任一瞬时的运动,可以分解为跟随基点的牵连平动和绕此基点的相对转动。因此,与分析平面图形上任一点速度的方法类似,在基点处建立一随基点的平动坐标系,根据加速度合成定理,可以求得平面图形上任一点的加速度。

平面图形 S, 设某瞬时图形内某一点 A 的加速度为 a_A , 图形转动的角速度为 ω , 角加速度为 α , 如图 8.13 所示。以点 A 为基点, 则平面图形的牵连运动为跟随基点 A 的平动, 根据牵连运动为平动时的加速度合成定理, 此瞬时图形上任一点 M 的加速度为

$$a_M = a_A + a_{MA} \quad (8.12)$$

由于图形的相对运动是绕基点 A 的转动, 故 M 点的相对轨迹为一圆弧, 因此 a_{MA} 又可分解为切向和法向两个分量, 它们的大小分别为

$$\left. \begin{aligned} a_{MA}^{\tau} &= MA \cdot \alpha \\ a_{MA}^{\eta} &= MA \cdot \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

于是, 平面图形上任一点 M 的加速度可表示为

$$a_M = a_A + a_{MA}^{\tau} + a_{MA}^{\eta} \quad (8.14)$$

即平面图形内任一点的加速度, 等于基点的加速度与该点相对于基点的切向加速度和法向加速度的矢量和, 这就是求平面图形上任意点加速度的基点法。

加速度基点法是求解平面图形上任一点加速度的基本方法。与求解平面图形上任一点速度的几种方法(基点法、投影法、瞬心法)比较, 由式(8.14)可见, 加速度不像速度那样存在简单的投影关系, 但加速度的瞬心即图形上瞬时加速度为零的点确是存在的, 只是加速度瞬心的位置找起来比较麻烦。所以, 在求平面图形上各点的加速度时, 一般都采用加速度合成法, 即基点法。

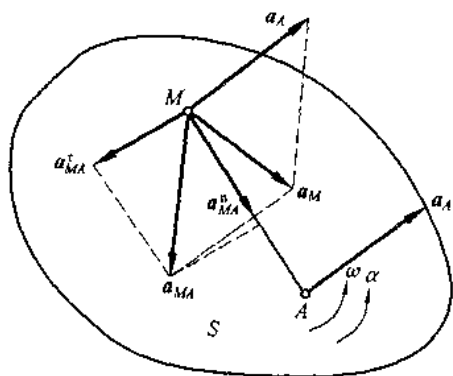


图 8.13

例 8.3 如图 8.14 所示,曲柄长 $OA = 0.2 \text{ m}$,绕 O 轴以等角速度 $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ 转动。曲柄带动连杆,使连杆端点的滑块沿铅垂方向运动。如连杆长为 1 m ,求当曲柄与连杆相互垂直并与水平线各成 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\beta = 45^\circ$ 时,连杆的角速度、角加速度和滑块 B 的加速度。

解 曲柄 OA 作定轴转动,滑块 B 作直线运动,连杆 AB 作平面运动。

利用速度瞬心法先求 AB 杆的角速度 ω_{AB} 。

由于 v_A 的大小和方向已知, v_B 的方位也已知,故可方便地找出 AB 杆的速度瞬心 C ,如图 8.14 所示,并判断出 ω_{AB} 的转向为顺时针方向。

根据 OA 杆的转动条件可求得点 A 速度的大小为

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = 0.2 \times 10 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

由几何关系可知 $AC \approx AB = 1 \text{ m}$,故 AB 杆的角速度为

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC} = 2 \text{ rad/s}$$

因为 $\omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}$ 是瞬时值,所以不能通过求导得到此瞬时 AB 杆的角加速度。

现利用加速度基点法来求 ϵ_{AB} 和滑块 B 的加速度。

取加速度已知的点 A 为基点,则点 B 的加速度为

$$\mathbf{a}_B \approx \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t$$

式中 \mathbf{a}_B 的方位竖直,大小未知; \mathbf{a}_A 的大小的方向已知; \mathbf{a}_{BA}^t 的大小为 $a_{BA}^t = AB \cdot \epsilon$,未知,方位垂直 AB ; \mathbf{a}_{BA}^n 的大小为 $a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 4 \text{ m/s}^2$,方向沿 BA 。8 个因素中只有 2 个未知,可以求解。采用投影式,在点 B 处建立直角坐标系,将矢量方程两边向坐标轴投影得

$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{Ax} + a_{BAx}^t + a_{BAx}^n \\ a_{By} = a_{Ay} + a_{BAy}^t + a_{BAy}^n \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 0 = -a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^t \cos 45^\circ + a_{BA}^n \sin 45^\circ \\ a_B = -a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^t \sin 45^\circ - a_{BA}^n \cos 45^\circ \end{cases}$$

解得

$$a_{BA}^t = 16 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = -5.66 \text{ m/s}^2$$

$$\epsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^t}{AB} = 16 \text{ rad/s}^2$$

a_B 为负值,说明滑块 B 此瞬时的实际加速度方向与图示假设方向相反,实际为竖直向下。

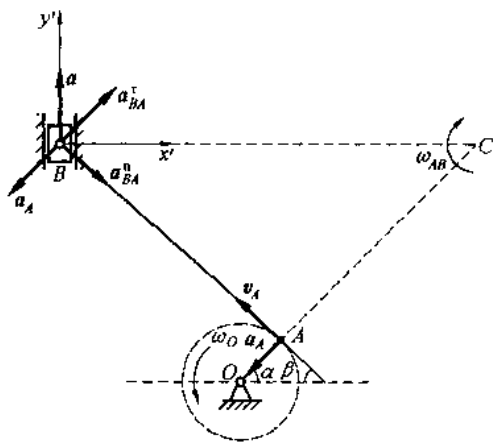
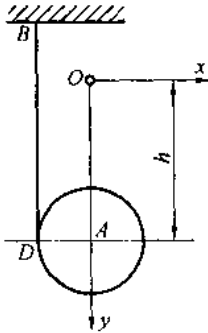


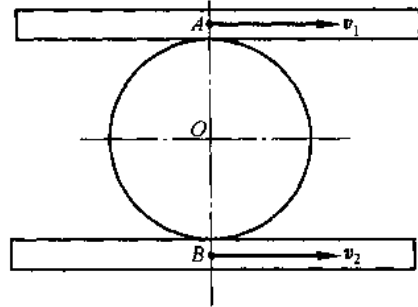
图 8.14

习 题

8.1 如题 8.1 图所示,圆柱 A 缠以细绳,绳的 B 端固定在天花板上。圆柱自静止落下,其轴心的速度为 $v_A = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}$, 其中 g 为常量, h 为圆柱轴心到初始位置的距离。如圆柱半径为 r , 求圆柱的平面运动方程。

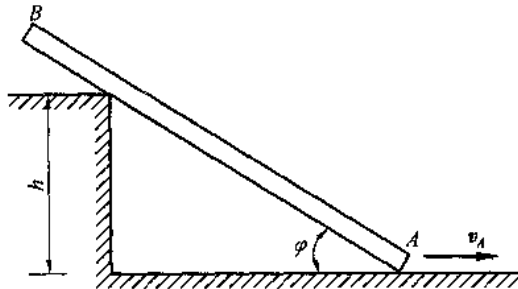


题 8.1 图



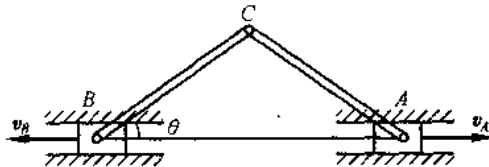
题 8.2 图

8.3 如题 8.3 图所示,杆 AB 一端 A 沿水平面以匀速 v_A 向右滑动时,其杆身紧靠高为 h 的墙边角 C 滑动。试根据定义求杆运动至与水平夹角为 φ 时的角速度和角加速度。



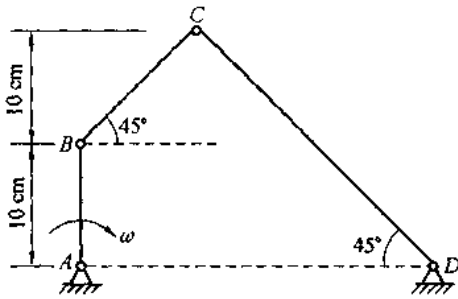
题 8.3 图

8.4 长度为 1 m 的两直杆 AC 和 BC, 用铰链 C 连接如题 8.4 图所示。A、B 两端点沿水平直线轨道反向匀速运动。已知 $v_A = 0.4 \text{ m/s}$, $v_B = 0.2 \text{ m/s}$ 。求当 $\theta = 30^\circ$ 时, C 点的速度。

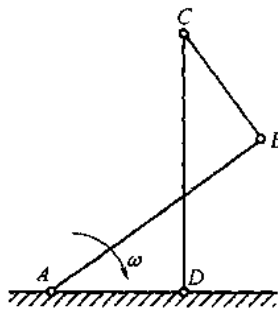


题 8.4 图

8.5 平面四连杆机构 $ABCD$ 的尺寸和位置如题 8.5 图所示。如杆 AB 以等角速度 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 绕 A 轴转动, 求点 C 的加速度。



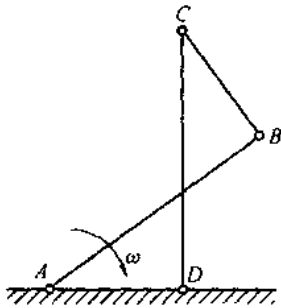
题 8.4 图



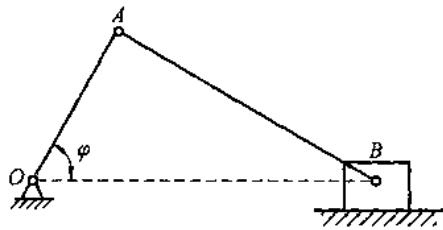
题 8.5 图

8.6 如题 8.6 图所示反平行四边形机构。 $AB = CD = 40 \text{ cm}$, $BD = AD = 20 \text{ cm}$, 曲柄 AB 以匀角速度 3 rad/s 绕 A 轴转动。求当 CD 垂直于 AD 时, 杆 BC 的角速度和角加速度。

8.7 如题 8.7 图所示为一曲柄机构, $OA = r$, $AB = 3r$, 若曲柄 OA 以匀角速度绕 O 轴转动。求当 $\varphi = 0^\circ$ 、 $\varphi = 60^\circ$ 、 $\varphi = 90^\circ$ 时, 点 B 的速度。

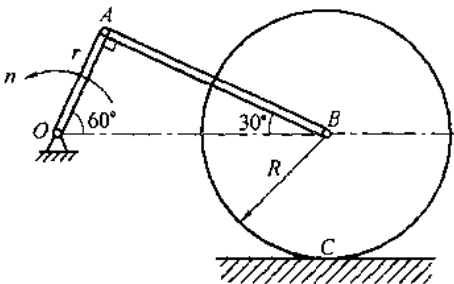


题 8.6 图

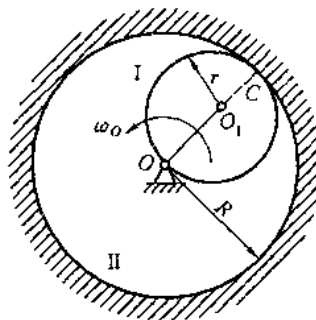


题 8.7 图

8.8 如题 8.8 图所示, 滚压机构的滚子沿水平面滚动而不滑动。已知曲柄 OA 长 $r = 10 \text{ cm}$, 以匀转速 $n = 30 \text{ r/min}$ 转动。连杆 AB 长 $l = 17.3 \text{ cm}$, 滚子半径 $R = 10 \text{ cm}$ 。求在图示位置时滚子的角速度及角加速度。



题 8.8 图



题 8.9 图

8.9 如题 8.9 图所示, 齿轮 I 在齿轮 II 内滚动, 其半径分别为 r 和 $R = 2r$ 。曲柄 OO_1 绕 O 轴以等角速度 ω_0 转动, 并带动行星齿轮 I。求轮 I 上瞬时速度中心 C 的加速度。

第3篇 动力学

在静力学中,我们分析了作用于刚体上的力,并研究了刚体在力系作用下的平衡问题,但没有讨论物体在不平衡力系的作用下将如何运动。在运动学中,我们仅从几何角度分析了刚体的运动,但未涉及作用力。动力学则对物体的机械运动进行全面的分析,研究作用于物体上的力与物体运动状态变化之间的关系,即研究物体机械运动的普遍规律。

动力学的理论基础是牛顿定律,所以又称为牛顿力学或古(经)典力学。研究古典力学时,首先涉及惯性和质量的概念。惯性是指任何物体都有保持静止或匀速直线运动的属性。如汽车突然开动时,车中站着的人并不立即随车运动,而是暂时保持原来的静止状态,于是就有向后倾倒的趋势;突然刹车时,人并不随车立即停止,还会保持原来的运动状态,于是就有向前倾倒的趋势,这就是惯性的表现。质量是物体惯性的度量。在地面上同一地点,拖动质量大的物体比拖动质量小的物体费力。这说明大质量物体的惯性大,小质量物体的惯性小。由于物体所受重力与其质量成正比,所以质量大的物体相应也重些,但要注意的是,质量与重量是两个不同的概念。质量是物体惯性的度量;重量是物体所受的重力,二者不能混为一谈。

动力学中为了研究物体运动变化与作用于物体上力之间的关系,采用的抽象化理想模型是质点和质点系(包括刚体)。质点指几何尺寸可以忽略不计但要计其质量的物体。质点系指有限或无限个质点的组合。质点系中各质点的位置或运动都与其他质点的位置或运动相联系。刚体可认为是一种不变形的特殊质点系。

动力学可分为质点动力学和质点系动力学,而前者是后者的基础。动力学在力学学科中占有重要的地位。机械工程、火箭、人造卫星的发射与运行等,都与动力学密切相关。随着高层建筑的出现,动力基础的隔振与减振、厂房结构、桥梁和水坝在动荷载作用下的振动及抗震等,都必须应用动力学的理论去解决。

第 9 章 质点动力学基本方程

质点是物体最简单、最基本的模型,是构成复杂物体系统的基础。质点动力学基本方程给出了质点受力与其运动变化之间的联系。

本章根据动力学基本定律得出了质点动力学的基本方程,运用微积分的方法,求解一个质点的动力学问题。

9.1 动力学基本定律

质点动力学的基础是牛顿在总结前人,特别是伽利略研究成果的基础上提出的牛顿运动三大定律。这三条定律描述了动力学的最基本的规律,是古典力学体系的核心。

第一定律(惯性定律) 任何不受力作用的质点,将永远保持其原来的静止或匀速直线运动状态。

此定理表明:①任何物体运动状态的改变,必须有外力作用(力是物体运动状态改变的原因);②任何物体都有保持其静止或作匀速直线运动的属性,此属性称为惯性。因此第一定律也称为惯性定律。

第二定律(力与加速度关系定律) 质点受力作用时所获得的加速度的大小与作用力的大小成正比,而与质点的质量成反比,其方向与力的方向相同,即

$$F = ma \quad (9.1)$$

由于求解质点动力学问题都需应用牛顿定律,所以称式(9.1)为质点动力学的基本方程。牛顿第二定律给出了质点的质量、其上所受的力以及质点的加速度三者之间的定量关系。它说明:质点的加速度与作用在其上的力成正比,与质点的质量成反比。相同的力作用在不同质量的质点上,会引起不同的运动变化,质量大的质点加速度小,质量小的质点加速度大。也就是说,质点的质量越大,其运动状态越不容易改变,即质点力图保持原有运动状态的能力越强,或者说它的惯性越大。因此,质量是质点惯性的度量。

第三定律(作用力与反作用力定律) 两物体间相互的作用力,总是大小相等,方向相反,并沿着同一直线,分别作用在这两个物体上。

这一定律即静力学中的作用和反作用公理。它阐明了两个物体间相互作用力之间的关系,在研究质点系动力学问题时,具有特别重要的意义。因为第二定律是针对一个质点而言的,而工程中大量的却是质点系的问题,要将根据第二定律建立起来的质点动力学理论推广应用于质点系动力学问题,就必须利用作用力与反作用力定律。因此,作用力与反作用力定律提供了从质点动力学过渡到质点系动力学的桥梁。

必须指出,牛顿三定律是在观察物体运动和生产实践中的一般机械运动的基础上总结出来的,它运用于解决一般工程实际问题,但对于物体速度极大而接近光速或研究微观粒子的运动时,古典力学不再适用。在动力学中,把适用于牛顿定律的参考系称为惯性参

考系。在一般工程技术问题中,把固定于地面的坐标系或相对于地面作匀速直线平动的坐标系作为惯性坐标系。在以后的论述中,如果没有特别指明,则所有的运动都是对惯性坐标系而言的。

9.2 质点运动微分方程

质点动力学第二定律,建立了质点的加速度与作用力的关系。当质点受到 n 个力 F_1, F_2, \dots, F_n 作用时,式(9.1)应写为

$$\left. \begin{aligned} ma &= \sum_{i=1}^n F_i \\ m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n F_i \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

式(9.2)是矢量形式的运动微分方程,具体计算时一般使用它的投影形式。

1. 质点运动微分方程的直角坐标形式

设矢径 \mathbf{r} 在直角坐标轴上的投影分别为 x, y, z , 力 F_i 在轴上的投影分别为 F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} , 则式(9.2)在直角坐标轴上的投影形式为

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n F_{yi} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n F_{zi} \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

2. 质点运动微分方程的自然坐标形式

将式(9.2)两端分别向自然轴系 $O\tau nb$ 的 3 个轴投影,得

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 s}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n F_{\tau i} \\ \frac{m}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \sum_{i=1}^n F_{ni} \\ 0 &= \sum_{i=1}^n F_{bi} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

式中 $s = s(t)$ ——描述质点位置的弧坐标;

$F_{\tau i}, F_{ni}, F_{bi}$ ——作用于质点的各力在切线、主法线和副法线上的投影;

ρ ——轨迹的曲率半径。

9.3 质点动力学的两类基本问题

质点动力学问题可分为两类基本问题。第一类基本问题是:已知质点的运动,求作用于质点上的力;第二类基本问题是:已知作用于质点上的力,求质点的运动。第一类基本问

题求解相对比较简单,问题的求解归结为确定质点的加速度,然后代入质点的运动微分方程,即可解得需求的力。第二类基本问题的求解归结为对运动微分方程进行积分并根据已知运动初始条件确定积分常数,但当力的变化规律复杂时往往引起很大的数学困难。

9.3.1 已知质点的运动,求作用在质点上的力

已知质点的运动,求作用在质点上的力,是质点动力学的第一类问题。由前面对运动微分方程的讨论可知,如果已知质点的运动微分方程,要利用微分方程求力,实际上归结为求微分和解代数方程的运算。

下面举例说明第一类问题的求解方法和步骤。

例 9.1 物体 A、B 的质量分别是 $m_A = 20 \text{ kg}$, $m_B = 40 \text{ kg}$, 两物体用弹簧联结,如图 9.1(a) 所示,已知物体 A 沿铅直线的运动规律为 $y = 10\sin 8\pi t$ (其中 y 以 mm 计, t 以 s 计)。试求物体 B 对支承面的压力,并求这压力的最大值和最小值(不计弹簧的质量)。

题意分析: 本题给出了物体 A 的运动规律。该题研究的是由两个物体及弹簧组成的系统,但可以把两个物体分别单独考察,转化为两个质点的第一类动力学问题。该研究中还应考虑物体 A 的运动是否会拉动物体 B。

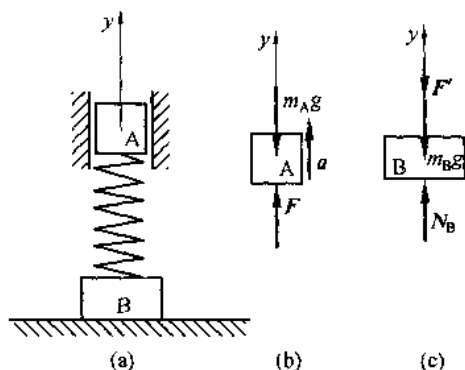


图 9.1

解 (1) 先选物体 A 作为研究对象,坐标系给定如图 9.1(a) 所示(坐标原点取在物体 A 的静平衡处)。

(2) 作受力分析(见图 9.1(b))。

(3) 运动分析

$$v_A = dy/dt = 80\pi \cos 8\pi t$$

$$a_A / (\text{m} \cdot \text{s}^{-2}) = d^2y/dt^2 = -640\pi^2 \sin 8\pi t = -0.64\pi^2 \sin 8\pi t \quad (1)$$

(4) 列物体 A 的运动方程并求解:

$$m_A a_A = F - m_A g \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)并求解:

$$F = m_A (g - 0.64\pi^2 \sin 8\pi t)$$

(5) 取物体 B 为研究对象,其坐标及受力分析如图 9.1(c) 所示。因 $g - 0.64\pi^2 \sin 8\pi t > 0$, 所以弹簧力始终是压力,即物体 B 处于静止状态。列物体 B 的平衡方程

$$\sum F_y = 0 \quad N_B - m_B g - F' = 0$$

解得

$$N_B = m_B g + m_A (g - 0.64\pi^2 \sin 8\pi t)$$

当 $\sin 8\pi t = -1$ 时,有 $N_B = N_{B\max} = 714 \text{ N}$

当 $\sin 8\pi t = 1$ 时,有 $N_B = N_{B\min} = 462 \text{ N}$

物体 B 对支撑面的压力与图示 N_B 等值、反向、共线。

理论力学

例 9.2 设质量为 m 的质点 M 在 xOy 平面内运动(见图 9.2), 其运动方程为 $x = a \cos \omega t, y = b \sin \omega t$, 式中 a, b 及 ω 都是常数。求作用于此质点上的力 F 。

解 由运动方程中消去时间 t , 得动点的轨迹方程:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

显然, 动点的轨迹为椭圆。

将运动方程微分两次得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 a \cos \omega t = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 b \sin \omega t = -\omega^2 y$$

代入运动微分方程式(9.3), 解得作用在此质点上的力在 x, y 轴上的投影:

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 x$$

$$F_y = ma_y = -m\omega^2 y$$

或将力表示为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = -m\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

由此可见, 力 F 与矢径 r 共线、反向, 大小等于 $m\omega^2 r$ 。

通过以上例题分析, 可将求解质点动力学第一类问题的步骤归纳如下。

(1) 选取研究对象并建立坐标系。一般选择联系已知量和待求量的物体为研究对象; 至于坐标系, 如已知质点的轨迹(如圆运动), 常用自然坐标系, 否则常采用直角坐标系。

(2) 画受力图。按静力学介绍的方法进行受力分析。

(3) 运动分析。按运动学知识计算质点的加速度。

(4) 列运动微分方程并求解。建立运动微分方程一般是列出投影形式的方程, 此时应注意力和加速度投影的正负; 其次, 要注意使所建立的方程适合于整个运动过程, 即在运动的一般位置给出方程。

9.3.2 已知作用在质点上的力, 求质点的运动

已知作用在质点上的力, 求质点的运动, 是质点动力学的第二类问题。在第二类问题中, 若要求的运动量是质点的加速度, 则属于解代数方程的问题; 若要求的运动量是速度或运动规律, 则必须进行积分。积分时, 需要注意两个问题: 第一, 作用在质点上的力可以是常力也可以是变力, 变力可以是时间的函数、距离的函数、速度的函数或同时是上述 3 种变量的函数。因此求解第二类质点动力学问题的过程中, 进行积分运算时, 需要依据力的不同表达式, 进行合理的变量代换。其次, 要确定积分常数。因此必须事先知道问题的运动初始条件, 当力的函数关系比较复杂时上述积分将会很困难, 有时甚至只能得到它们某种程度的近似解。

下面举例说明第二类问题的求解方法。

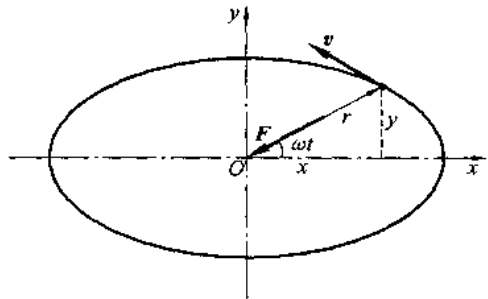


图 9.2

例9.3 炮弹以初速 v_0 与水平面成 α 角发射,若不计空气阻力,求炮弹在重力作用下的运动方程。

题意分析:炮弹可视为质点。求质点的运动方程,必须先求出质点在任意时刻的加速度,然后根据质点的运动初始条件进行积分。质点仅受重力作用,故加速度可知。质点的运动轨迹为一平面曲线,可选直角坐标系。此题为典型的第二类质点动力学问题。

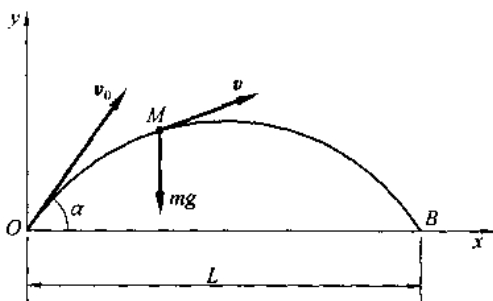


图9.3

解 取炮弹为质点,选取坐标系如图9.3所示。炮弹仅受重力作用,其运动轨迹为 xOy 面内的一平面曲线。应用直角坐标系中的质点运动微分方程,建立炮弹的运动微分方程如下

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

初始条件为,当 $t = 0$ 时, $x = 0, y = 0$, 则

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v_y = v_0 \sin \alpha \quad (2)$$

该问题为在初始条件(2)下寻求方程组(1)的解。因此,原物理问题变为寻找微分方程组初值问题的解。

注意到 $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}$, 式(1)可变为

$$dv_x/dt = 0 \quad dv_y/dt = -g \quad (3)$$

积分一次得

$$v_x = c_1 \quad v_y = -gt + c_2 \quad (4)$$

利用初始条件可解得两个积分常数为

$$c_1 = v_0 \cos \alpha \quad c_2 = v_0 \sin \alpha$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt \quad (5)$$

对式(5)进行第二次积分,得炮弹的运动方程为

$$\begin{aligned} x \Big|_0^t &= v_0 t \cos \alpha \Big|_0^t \\ y \Big|_0^t &= \left[-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha \right] \Big|_0^t \end{aligned} \quad (6)$$

即

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

从式(7)中消去时间 t , 得抛射体的轨迹方程

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (8)$$

可见轨迹是一抛物线。

当抛射体到达 L 时, $y = 0$, 称 L 为射程。利用轨迹方程, 令 $y = 0$, 解出射程

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (9)$$

总结:

① 式(7)给出的运动规律并不对所有的时间 t 都适用。实际情况是, 在运动方程中, 当 $x = L$ 时, 质点便停止下来, 所以该式对 $t > \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ 的时间是没有意义的。

② 由式(9)可知, 在不计空气阻力的情况下, $\alpha = 45^\circ$ 时, 射程最远。

例 9.4 垂直于地面向上抛出一物体(如子弹、火箭等), 求该物体在地球引力作用下任一瞬时的运动速度及达到的最大高度(不计空气阻力, 不考虑地球自转的影响)。

解 选地心 O 为坐标原点, x 轴铅垂向上(见图 9.4)。取物体为研究对象并视为质点。根据牛顿万有引力定律, 它在任意位置 x 处受到地球的引力 F , 方向指向地心 O , 大小为

$$F = f \frac{m_1 m}{x^2}$$

式中 f ——万有引力常数;

m ——物体质量;

m_1 ——地球质量;

x ——物体到地心的距离。

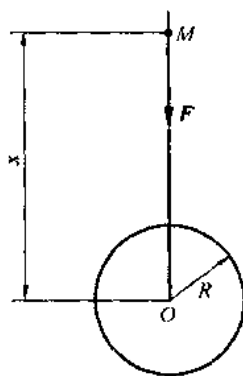


图 9.4

由于物体在地球表面受到的引力即为重力, 故有

$$-mg = -f \frac{m_1 m}{R^2} \quad (1)$$

即

$$f = \frac{R^2 g}{m_1}$$

得物体运动的微分方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F = -f \frac{mm_1}{x^2} = -\frac{mgR^2}{x^2}$$

即

$$\frac{dv}{dt} = -g \frac{R^2}{x^2} \quad (2)$$

将上式改写为

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = -g \frac{R^2}{x^2}$$

分离变量得

$$v dv = -gR^2 \frac{dx}{x^2}$$

如设物体在地面发射时的速度为 v_0 , 在空中任意位置 x 处的速度为 v , 初始条件为 $t = 0, x = R, v = v_0$, 对上式积分得

$$\int_0^v v dv = \int_R^x -gR^2 \frac{dx}{x^2}$$

即

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right) \quad (3)$$

由此得到任一位置的速度为

$$v = \sqrt{(v_0^2 - 2gR) + \frac{2gR^2}{x}} \quad (4)$$

由式(4)可见, 物体的速度将随 x 的增加而递减。如果 $v_0^2 < 2gR$, 则在某一位置 $x = R + H$ 时, 速度将减少为零, 此后物体将往回落下, H 为以初速 v 向上发射所能达到的最大高度。将 $x = R + H$ 及 $v = 0$ 代入式(4), 可得

$$H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}$$

如果 $v_0^2 > 2gR$, 则不论 x 有多大, 甚至为无限大时, 速度 v 都不会减少为零。因此, 欲使物体向上发射而不复返时必须具有的最小初速度为

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

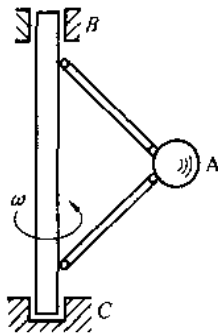
由上述例题可知, 求解质点动力学第二类基本问题的前几个步骤与第一类基本问题基本相同。必须在正确地分析质点的受力情况和质点的运动情况的基础上, 列出质点运动微分方程。求解过程一般进行积分, 还要分析题意, 合理应用运动初始条件确定积分常数, 使问题得到确定的解。如果力是位置或速度的函数, 需要采用分离变量法进行积分; 当力是常量或时间的函数时, 相对比较简单。

习 题

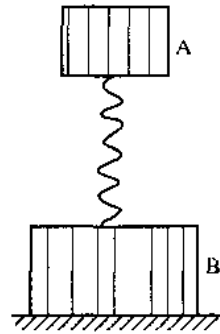
9.1 如题9.1图所示, 质量为 m 的球 A, 用两根各长为 l 的杆支承, 支承架以匀角速度 ω 绕铅直轴 BC 转动。已知 $BC = 2a$, 杆 AB 及 AC 的两端均铰接, 杆重忽略不计。求杆 AB、AC 所受的力。

9.2 物块 A、B 质量分别为 $m_A = 100 \text{ kg}$, $m_B = 200 \text{ kg}$, 用弹簧连接如题9.2图所示。设物块 A 在弹簧上以 $x = 20\sin 10t$ 作简谐运动 (x 以 mm 计, t 以 s 计), 求水平面所受压力的最大值与最小值。

理论力学



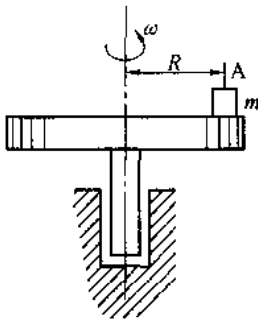
题 9.1 图



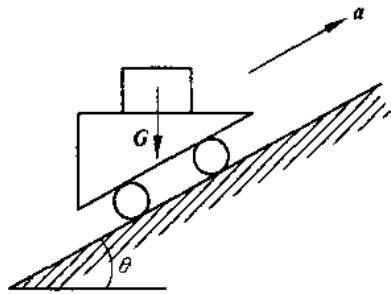
题 9.2 图

9.3 质量为 m 的物体 A 放在匀速转动的水平台上, 它与转轴的距离为 R 。若物体与转台表面的摩擦系数为 f , 求物体不致因转台旋转而滑出转台的最大角速度。

9.4 如题 9.4 图所示, 小车以匀加速度 a 沿倾角 θ 的斜面向上运动, 在小车的平顶上放一重 G 的物块, 随车一同运动。求物块与小车间的摩擦系数 f ?



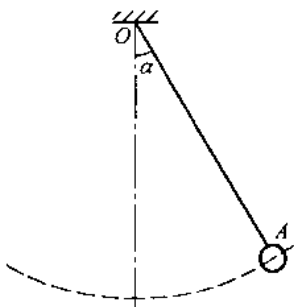
题 9.3 图



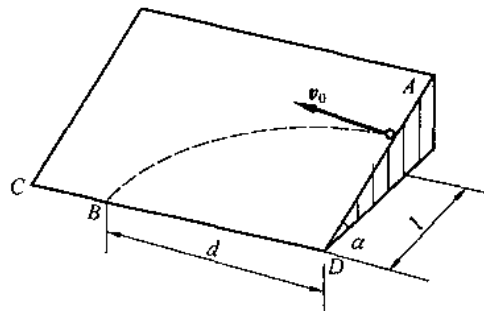
题 9.4 图

9.5 如题 9.5 图所示, 质量为 5 kg 的小球在铅垂面内向右摆动, 已知绳长为 1.2 m , $\alpha = 60^\circ$ 时, 绳中的张力为 30 N 。求小球在该位置时的速度和加速度。

9.6 如题 9.6 图所示, 质量为 m 的小球从斜面上 A 点开始运动, 初速度 $v_0 = 5\text{ m/s}$, 方向与 CD 平行, 不计摩擦。已知 $l = 1\text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$ 。试求: (1) 球运动到 B 点所需的时间; (2) 距离 d 的大小。



题 9.5 图



题 9.6 图

第9章 质点动力学基本方程

9.7 物体由高度 h 处以速度 v_0 水平抛出。空气阻力可视为与速度的一次方成正比,即 $F = -kmv$, 其中 m 为物体的质量, v 为物体的速度, k 为常系数。求物体的运动方程和轨迹。

9.8 质量为 10 kg 的物体, 置于汽车底板上, 汽车以 2 m/s 的匀加速度沿平直马路行驶。已知物体与车板间动摩擦因数为 0.2 , 求汽车行驶 5 s 后物体在车板上滑动的距离。

第 10 章 动量定理

动量、动量矩和动能定理从不同的角度揭示了质点和质点系总体的运动变化及其受力之间的关系,可用以求解质点系动力学问题。动量、动量矩和动能定理统称为动力学普遍定理。本章将介绍及应用动量定理。

10.1 动量和冲量

1. 动量

(1) 质点的动量

实践证明,物体运动的强弱程度,不仅与它的速度有关,而且还与它的质量有关。例如,一颗高速飞行的子弹,其质量虽小,但速度很大,因此可以打穿墙壁;如轮船靠岸时,速度虽小,但质量很大,如果操作不当与码头相撞,其力量足以碰坏码头。因此,用质点的质量与速度的乘积来表征质点的一种运动量,称为质点的动量,记为 mv 。这是物体机械运动强弱程度的一种度量。

质点的动量是矢量,动量的方向与质点速度的方向一致。它的单位是导出单位,等于质量单位与速度单位的乘积。在国际单位制中,动量的单位是 $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ 或 $\text{N} \cdot \text{s}$ 。

(2) 质点系的动量

质点系中各质点动量的矢量和称为质点系的动量,即

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{v}_i \quad (10.1)$$

式中 n ——质点系中质点的个数;

m_i, \boldsymbol{v}_i ——质点系中第 i 个质点的质量和速度。

2. 冲量

一个物体在力作用下引起的运动变化,不仅与力的大小和方向有关,还与力作用时间的长短有关。例如,推车子时,用较大的力可以在较短的时间内达到一定的速度,若用较小的力,要达到同样的速度,就需要作用的时间长一些。因此,可以用力与力作用时间的乘积来度量力在这段时间内对物体运动所产生的累积效应。作用于物体上的力与其作用时间的乘积称为力的冲量,用 I 表示。力的冲量是矢量,它的方向与力的作用方向一致。冲量的单位为 $\text{N} \cdot \text{s}$,与动量的单位一致。

当力 F 是常力,作用时间为 t 时,

$$\boldsymbol{I} = F t \quad (10.2)$$

当力 F 是变力时,应用微分的思想,变力 F 在 $t_1 \sim t_2$ 时间内的冲量为

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt \quad (10.3)$$

其中, $dI = Fdt$ 称为变力 F 在 dt 时间内的原冲量。

10.2 动量定理

1. 质点系的动量定理

设由 n 个质点组成的质点系, 第 i 个质点的质量为 m_i , 速度为 v_i 。作用于该质点的力有: 质点系外部的物体作用于该质点上的力, 称为外力, 其合力记为 $F_i^{(e)}$; 质点系内部各质点对此质点的作用力, 称为内力, 其合力记为 $F_i^{(i)}$ 。由动力学基本方程可得

$$\frac{d}{dt}(m_i v_i) = F_i^{(e)} + F_i^{(i)} \quad (10.4)$$

这样的方程共有 n 个, 求和得

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i v_i) = \sum_{i=1}^n F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n F_i^{(i)} \quad (10.5)$$

由于内力大小相等、方向相反、成对出现, 其矢量之和必然为零, 即 $\sum_{i=1}^n F_i^{(i)} = 0$, 于是有

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i v_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i v_i) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (10.5)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i^{(e)} \quad (10.7)$$

这就是质点系动量定理的微分形式。即质点系的动量对时间的导数, 等于作用于质点系的全部外力的矢量和 (或外力的主矢)。上式表明, 质点系动量的改变只与外力有关, 而与质点系的内力无关。换言之, 内力不能改变质点系的动量, 但可改变质点的动量。

设质点系在 $t = 0$ 和时刻 t 的动量分别是 p_0 、 p , 则可得

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \sum_{i=1}^n \int_0^t F_i^{(e)} dt = \sum_{i=1}^n I_i^{(e)} \quad (10.8)$$

这就是质点系动量定理的积分形式, 又称冲量定理。即在某一时间间隔内, 质点系动量的改变量等于在这段时间内作用于质点系外力冲量的矢量和。

2. 质心运动定理

由于质点系的动量等于质心速度与其全部质量的乘积, 即

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$$

结合式(10.8)可得

$$m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i^{(e)} \quad (10.9)$$

对于质量不变的质点, 式(10.9)变为

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \sum_{i=1}^n F_i^{(e)} \quad (10.10)$$

即

$$m\mathbf{a}_C = \sum_{i=1}^n F_i^{(e)} \quad (10.11)$$

这就是质点系的质心运动定理。上式表明,质点系的质量与质心加速度的乘积等于作用于质点系外力的矢量和(即等于外力的主矢)。这一定理表明,质点系质心的运动,可看成是质心具有质点系全部质量,且在其上作用有质点系的全部外力。由上式可知,内力不能改变质点系的质心的运动状态。

3. 质点系动量守恒定理

动量定理的微分形式、积分形式、质心运动定理均是矢量形式,在应用时应取投影形式。式(10.7)和式(10.8)的投影形式分别为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \sum F_{xi}^{(e)} \\ \frac{dp_y}{dt} &= \sum F_{yi}^{(e)} \\ \frac{dp_z}{dt} &= \sum F_{zi}^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

和

$$\left. \begin{aligned} p_x - p_{0x} &= \sum I_x^{(e)} \\ p_y - p_{0y} &= \sum I_y^{(e)} \\ p_z - p_{0z} &= \sum I_z^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

式(10.11)的投影有如下两种形式。

直角坐标的投影为

$$\left. \begin{aligned} ma_{Cx} &= \sum F_{xi}^{(e)} \\ ma_{Cy} &= \sum F_{yi}^{(e)} \\ ma_{Cz} &= \sum F_{zi}^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

自然坐标的投影为

$$\left. \begin{aligned} m \frac{v_C^2}{\rho} &= \sum F_n^{(e)} \\ m \frac{dv_C}{dt} &= \sum F_t^{(e)} \\ \sum F_b^{(e)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

在式(10.7)中,如果 $\sum_{i=1}^n F_i^{(e)} = 0$, 则 $dp/dt = 0$, 因而

$$p = \text{恒矢量}$$

即若作用于质点系的所有外力的矢量和等于零,则该质点系的动量保持不变。

如果外力的矢量和虽然不等于零,但各力在某轴(例如 x 轴)上投影的代数和恒等于零,则由式(10.11)可得

$$p_x = \text{恒量}$$

即若作用于质点系的所有外力在某坐标轴上的投影的代数和等于零,则该质点系的动量在同一轴上的投影守恒。

以上两个结论统称为质点系动量守恒定律。

4. 质心守恒定律

质心运动也有类似的规律,由质心运动定理可知:

① 如果作用于质点系的外力主矢恒等于零($\sum F^{(e)} = 0$,有 $v_C = \text{恒矢量}$),则质心作匀速直线运动;若开始静止(即 $v_C = 0$,有 $r_C = \text{恒矢量}$),则质心位置保持不变。

② 如果作用于质点系的所有外力在某轴上投影的代数和恒等于零($\sum F_x^{(e)} = 0$,有 $v_{Cx} = \text{恒量}$),则质心在该轴(x 轴)上的速度投影保持不变;若开始时质心速度在某轴上投影等于零($v_{Cx} = 0$,有 $x_C = \text{恒量}$),则质心沿该轴的坐标保持不变。

以上结论称质心守恒定律。

例 10.1 重 $P = 300 \text{ N}$ 的锻锤,自 $h = 1.5 \text{ m}$ 的高处自由落到工件上,使工件产生变形,如图 10.1 所示,其变形经历的时间 $t = 0.01 \text{ s}$ 。试求锻锤对工件的平均锻压力。

解 取锻锤为研究对象,锤自由落到工件上时所有的动量为

$$mv_0 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) = \frac{P}{g} \sqrt{2gh} = \frac{300}{9.8} \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 1.5} = 166$$

当锤与工件相碰后,锤的速度在 0.01 s 后即减为零,因而此时锤的动量 mv 也为零,由于本题属于已知动量的改变,需求外力(工件对锻锤作用的力,它与锤对工件的压力等值反向),故可用动量定理的积分形式。

在锤与工件相碰后到停止运动这段时间间隔 t 中,作用在锤上的力有重力 P 和工件的反力 F_N 。由于力 F_N 是在极短时间内迅速变化的,故可用平均值 F_N 来代替,因而力 F_N 在时间间隔 t 内冲量的大小可写成

$$I = \int_0^t F_N dt = F_N t$$

由动量定理的积分形式在铅垂方向的投影式可得

$$p - p_0 = \int_0^t p dt - \int_0^t F_N dt$$

$$-166 = p \cdot t - F_N \cdot t = (300 - F_N) \times 0.01$$

解得

$$F_N = 16.9 \text{ kN}$$

例 10.2 质量为 m 的三棱柱 A 置于光滑水平面上,其两斜而与水平面的夹角分别为 θ 和 β ,如图 10.2 所示。物块 B 和物块 D 的

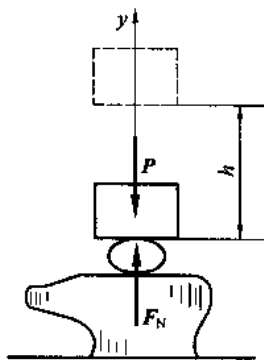


图 10.1

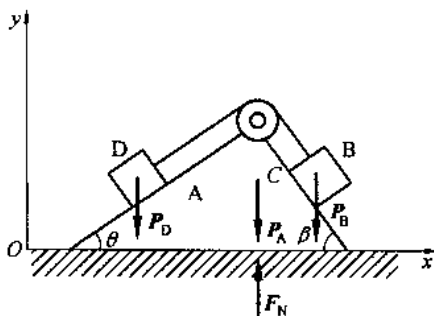


图 10.2

理论力学

质量分别为 m_B 和 m_D , 通过不可伸长的柔绳相连接, 分别置于三棱柱的斜面上。不计柔绳质量, 试求当物块 B 由静止开始沿斜面下滑一段距离 l 时, 三棱柱移动的距离。

解 取三棱柱 A、物块 B 和物块 D 组成的系统为研究对象。

系统受到重力 P_A 、 P_B 、 P_D 和水平面法向反力 F_N 作用, 它们在水平方向上的投影都等于零, 所以, 系统在水平方向上动量守恒。建立图示面结于水平面的坐标系 xOy , 则有 $v_{Cx} = 0$, 又因为初始时刻系统处于静止状态, 故有

$$x_{C0} = x_C = \text{恒量} \quad (\text{a})$$

式中, x_{C0} 、 x_C 分别表示系统质心 C 在系统静止和物块 B 下滑一段距离的横坐标。

设初始时三棱柱及两物块质心的横坐标分别为 x_{A0} 、 x_{B0} 、 x_{D0} , 根据质心坐标公式, 有

$$x_{C0} = \frac{m_A x_{A0} + m_B x_{B0} + m_D x_{D0}}{m_A + m_B + m_D} \quad (\text{b})$$

设物块 B 沿斜面下滑一段距离 l 时, 三棱柱沿 x 轴正方向移动了距离 Δx , 则有

$$x_C = \frac{m_A(x_{A0} + \Delta x) + m_B(x_{B0} + \Delta x + l \cos \beta) + m_D(x_{D0} + \Delta x + l \cos \theta)}{m_A + m_B + m_D} \quad (\text{c})$$

将式(b)和式(c)代入式(a), 求得

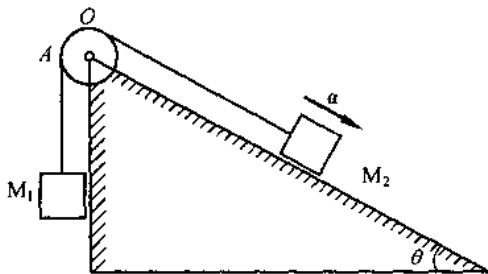
$$\Delta x = - \frac{l(m_B \cos \beta + m_D \cos \theta)}{m_A + m_B + m_D}$$

式中, 负号表示三棱柱 A 实际上沿 x 轴负方向运动。

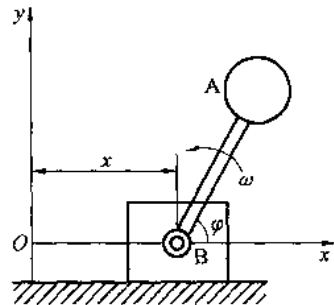
习 题

10.1 如题 10.1 图所示, 均质滑轮 A 的质量为 m_A , 重物 M_1 、 M_2 的质量分别为 m_1 、 m_2 , 斜面倾角为 θ 。已知重物 M_2 的加速度为 a , 不计摩擦, 求滑轮对转轴 O 的压力。

10.2 质量为 m_B 的物块 B, 可沿水平光滑直线轨道滑动, 质量为 m_A 的球 A, 通过长为 l 的无重刚杆 AB 铰链于物块 B 上, 如题 10.2 图所示。不计摩擦, 已知 $\varphi = \omega t$ 。试求物块 B 的运动规律及轨道对物块 B 的压力。



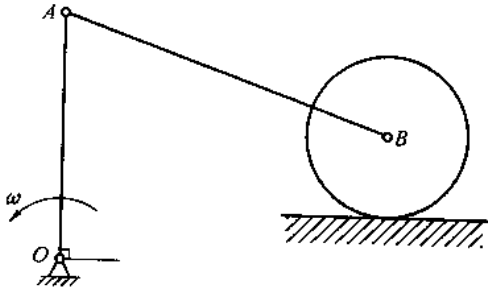
题 10.1 图



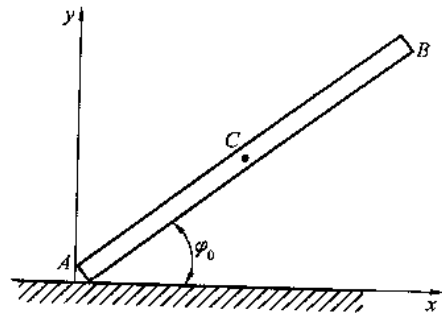
题 10.2 图

10.3 如题 10.3 图所示系统中, 均质杆 OA、AB 与均质轮的质量均为 m , OA 杆的长度为 l_1 , AB 杆的长度为 l_2 , 轮的半径为 R , 轮沿水平面作纯滚动。在图示瞬时, OA 杆的角速度为 ω , 求整个系统的动量。

10.4 如题 10.4 图所示,均质杆 AB 长 $2l$, A 端放置在光滑水平面上。杆在如图位置自由倒下,求 B 点的轨迹方程。



题 10.3 图



题 10.4 图

第 11 章 动量矩定理

第 10 章阐述的动量定理建立了作用力与动量变化之间的关系,揭示了质点系机械运动规律的一个侧面,而不是全貌。例如,圆轮绕质心转动时,无论怎么转动,圆轮的动量都是零,动量定理不能说明这种运动规律。动量矩定理则是从另一个侧面,揭示出质点系相对于某一定点或质心的运动规律。本章将介绍动量矩定理并阐明其应用。

11.1 质点和质点系的动量矩

11.1.1 质点的动量矩

类似力对点之矩的定义,把质点 M 在某瞬时相对于某点 O 的矢径 r 与其动量 mv 的矢量积定义为质点在该瞬时对点 O 的动量矩。用矢量 $M_O(mv)$ 表示,如图 11.1 所示,即

$$M_O(mv) = r \times mv \quad (11.1)$$

质点的动量矩表达质点绕某点转动的转动特征,是个瞬时矢量,其单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 。

因为动量是矢量,就数学计算方法而言,力对点之矩的计算与动量对点之矩的计算是完全一样的,因此只要将力对点之矩的计算公式中的力矢量 F 用动量 mv 代替,算出的就是动量矩。

如以 O 为原点建立坐标系 $Oxyz$,则用矢量积表达动量矩的计算式为

$$M_O(mv) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = (ymv_z - zmv_y)i + (zmv_x - xmv_z)j + (xmv_y - ymv_x)k$$

即

$$\begin{cases} [M_O(mv)]_x = M_x(mv) = m(yv_z - zv_y) \\ [M_O(mv)]_y = M_y(mv) = m(zv_x - xv_z) \\ [M_O(mv)]_z = M_z(mv) = m(xv_y - yv_x) \end{cases}$$

式中 $[M_O(mv)]_x, [M_O(mv)]_y, [M_O(mv)]_z$ ——动量矩在 x, y, z 各轴上的投影;

$M_x(mv), M_y(mv), M_z(mv)$ ——动量对 x, y, z 各轴的矩;

x, y, z ——质点 M 的直角坐标值;

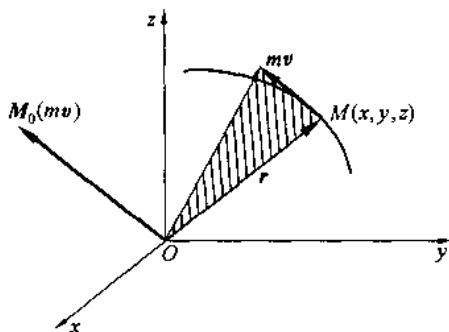


图 11.1

v_x, v_y, v_z ——质点该瞬时的速度在 x, y, z 各轴上的投影。

即质点动量对坐标轴之动量矩, 等于质点动量对坐标原点的动量矩矢在该轴上的投影。

例 11.1 质量为 m 的质点 C , 绕 AB 轴以 ω 的角速度转动。当 ABC 平面与 Byz 面重合时, C 点的坐标为 $(0, a, b)$, 如图 11.2 所示。求此时质点 C 对 B 点的动量矩。

解 此时质点 C 的速度为

$$v = -a\omega i$$

根据质点对轴的动量矩定义有

$$\begin{cases} M_x(mv) = 0 \\ M_y(mv) = -mab\omega \\ M_z(mv) = ma^2\omega \end{cases}$$

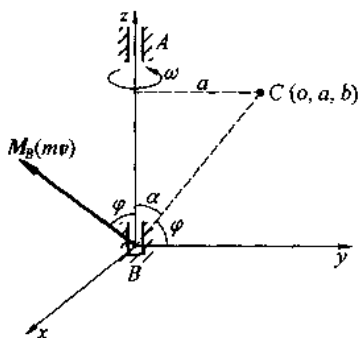


图 11.2

其大小为 $|M_B(mv)| = ma\omega \sqrt{a^2 + b^2}$

方向为 $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$

可见 $M_B(mv)$ 与 BC 垂直。

11.1.2 质点系的动量矩

质点系内各质点的动量对某固定点 O 之矩的矢量和, 称为质点系对该点的动量矩, 以 L_O 表示, 即

$$L_O = \sum_{i=1}^n M_O(m_i v_i) = \sum_{i=1}^n (r_i \times m_i v_i) \quad (11.2)$$

同样, 质点系内各质点对某轴之动量矩的代数和称为质点系对该轴的动量矩, 即

$$L_x = \sum_{i=1}^n L_{xi} = \sum_{i=1}^n M_z(m_i v_i) \quad (11.3)$$

刚体平动时, 可将全部质量集中于质心, 作为一个质点计算其动量矩。

刚体绕定轴转动是工程中最常见的一种运动情况。设刚体绕固定轴 z 转动, 某瞬时的角速度为 ω 。在刚体内任取一质点 M_i , 其质量为 m_i , 到转轴的距离为 r_i , 该质点对 z 轴的动量矩为

$$M_z(m_i v_i) = (m_i r_i \omega) r_i = m_i r_i^2 \omega$$

于是, 整个刚体对 z 轴的动量矩为

$$L_z = \sum_{i=1}^n M_z(m_i v_i) = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega \quad (11.4)$$

式中, $\sum m_i r_i^2$ 是刚体内各质点的质量与该点到 z 轴的距离平方的乘积之和, 称为刚体对轴的转动惯量, 记为

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (11.5)$$

理论力学

可见,转动惯量 J_z 只与刚体本身的质量及其分布情况有关,与刚体的运动无关,是反映刚体转动惯性的一个特征量。

于是,定轴转动刚体对转动轴的动量矩为

$$L_z = J_z \omega \quad (11.6)$$

即绕定轴转动刚体对其转轴的动量矩等于刚体对转轴的转动惯量与转动角速度的乘积。

11.2 动量矩定理

11.2.1 质点的动量矩定理

设质点的质量为 m ,某瞬时相对于定点 O 的矢径为 r ,受合力为 F ,速度为 v ,将质点的动量矩 $M_O(mv)$ 对时间求一阶导数,得

$$\frac{d}{dt} M_O(mv) = \frac{d}{dt} (r \times mv) = \frac{dr}{dt} \times mv + r \times \frac{dmv}{dt}$$

由于 $dr/dt = v$,则上式右端的第一项为 $dr/dt \times mv = v \times mv$ 。

显然 v 与 mv 同方向,二者的夹角为零。根据矢量积定义: $v \times mv = 0$,故得

$$\frac{d}{dt} M_O(mv) = r \times \frac{d(mv)}{dt} \quad (11.7)$$

由质点的动量定理知

$$d(mv)/dt = F$$

对上式两边左乘 r 并代入式(11.7),得

$$\frac{d}{dt} M_O(mv) = r \times F$$

即

$$\frac{d}{dt} M_O(mv) = M_O(F) \quad (11.8)$$

上式表明:质点对某一固定点的动量矩对时间的一阶导数,等于同瞬时作用在该质点上的力对同一点的矩。这就是质点的动量矩定理。

工程实际中,经常用到质点对固定轴的动量矩定理。将式(11.8)的两端分别向过 O 点的 3 个坐标轴投影,得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} M_x(mv) &= M_x(F) \\ \frac{d}{dt} M_y(mv) &= M_y(F) \\ \frac{d}{dt} M_z(mv) &= M_z(F) \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

该式表明:质点对定轴的动量矩对时间的一阶导数,等于作用于质点上的力对同一轴的矩。这就是质点对固定轴的动量矩定理。

从质点的动量矩定理可以得到下列两个推论。

(1) 如果作用在质点上的力始终通过某一固定点 O ,则该力对此固定点的矩恒等于

零,式(11.8) 成为

$$\frac{d}{dt}M_O(mv) = 0$$

即

$$M_O(mv) = \text{恒矢量} \quad (11.10)$$

式(11.10) 表明:如果作用于质点上的力对某一固定点的矩恒等于零,则质点对该点的动量矩保持不变。

(2) 如果作用在质点上的力对 z 轴的矩等于零,则式(11.9) 的第 3 式为

$$\frac{d}{dt}M_z(mv) = 0$$

即

$$M_z(mv) = \text{恒量} \quad (11.11)$$

式(11.11) 表明:如果作用在质点上的力对某一固定轴的矩恒等于零,则质点对该轴的动量矩保持不变。

11.2.2 质点系的动量矩定理

设质点系有 n 个质点,第 i 个质点的质量为 m_i ,速度为 v_i ,作用在其上的内力和外力分别是 $F_i^{(i)}$ 和 $F_i^{(e)}$ 。该质点对固定点 O 之动量矩为

$$L_{O_i} = r_i \times m_i v_i$$

对时间 t 求导,则得

$$\frac{dL_{O_i}}{dt} = \frac{dr_i}{dt} \times m_i v_i + r_i \times m_i \frac{dv_i}{dt} = v_i \times m_i v_i + r_i \times m_i \frac{dv_i}{dt}$$

其中 $v_i \times m_i v_i = 0$ 。

又由牛顿第二定律有

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i^{(i)} + F_i^{(e)}$$

因此有

$$\frac{dL_{O_i}}{dt} = r_i \times F_i^{(i)} + r_i \times F_i^{(e)}$$

对上式求和得

$$\sum \frac{dL_{O_i}}{dt} = \sum r_i \times F_i^{(i)} + \sum r_i \times F_i^{(e)}$$

即

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum M_O(F_i^{(i)}) + \sum M_O(F_i^{(e)})$$

根据内力的性质,易知上式右端第一项为零,故上式变为

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum M_O(F_i^{(e)}) \quad (11.12)$$

这就是矢量形式的质点系动量矩定理。它表明:质点系对于某一固定点的动量矩对时

理论力学

间的导数等于作用在该质点系上的所有外力对于同一点之矩的矢量和。

应用时,取投影式,即

$$\left. \begin{aligned} dL_x/dt &= \sum M_x(F_i^{(e)}) \\ dL_y/dt &= \sum M_y(F_i^{(e)}) \\ dL_z/dt &= \sum M_z(F_i^{(e)}) \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

即质点系对某一固定轴的动量矩对时间的导数,等于作用在质点系上的外力对同一轴之矩的代数和。

由质点系动量矩定理可知,质点系的内力不能改变质点系的动量矩,只有外力才能使质点系的动量矩发生变化。

由质点系动量矩定理可知:

① 若 $\sum M_O(F^{(e)}) = 0$, 则 $L_O =$ 恒矢量;

② 若 $\sum M_z(F^{(e)}) = 0$, 则 $L_z =$ 恒量。

即若作用于质点系的所有外力对于某定点(或定轴)之矩的矢量和(力矩的代数和)等于零,则质点系对于该点(或该轴)的动量矩保持不变。这一结论称为质点系动量矩守恒定律。

必须指出上述动量矩定理的表达形式只适用于对固定点或固定轴,对于一般的动点或动轴,其动量矩定理具有更复杂的表达式,本书不讨论这类问题。

例 11.2 如图 11.3 所示,不可伸长的线 OM 长为 L ,其 O 端固定, M 端系重为 P 的小球,线与球可在铅直平面内摆动,不计线的质量,小球视为质点。这种装置就是单摆,或称数学摆。设 $t = 0$ 时摆线的偏角为 α ,初速度为零,求摆的运动规律。

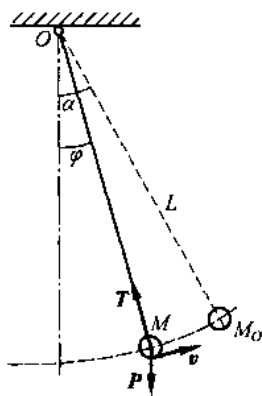


图 11.3

题意分析:单摆运动时,摆锤对 O 点的动量矩始终垂直于运动平面,因此,应用对 z 轴的动量矩定理就可建立其运动微分方程。

解 取摆锤为研究对象。其上受的力有摆锤的重力 P ,绳子的张力 T (张力 T 始终通过悬挂点 O)。摆锤的运动轨迹为以 O 为圆心,以 L 为半径的圆弧,所以摆锤的速度 v 始终垂直于 OM 。

对悬挂点 O 应用质点的动量矩定理,有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{g} L^2 \dot{\varphi} \right) = - PL \sin \varphi \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

对于微小摆动, $\sin \varphi \approx \varphi$, 并令 $\frac{g}{L} = p^2$, 则式(2)可写为

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi = 0 \quad (3)$$

式(3)即为单摆的运动微分方程,这种微分方程的解的形式为

$$\varphi = \alpha \sin(pt + \beta) \quad (4)$$

其中, α 及 β 是待定的积分常数,需由初条件决定。此处的初始条件为

$$\begin{cases} \varphi(0) = \alpha \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得

$$\varphi = \alpha \cos pt \quad (6)$$

式(6)就是单摆的运动方程,其为周期运动,振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

例 11.3 质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的小球,用两根长 $l = 0.6 \text{ m}$ 的不可伸长的绳连接在铅垂轴上,此时 $\theta_0 = 30^\circ$,轴转动的角速度为 $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$,如图 11.4 所示。若滑块 A 向上移动 0.15 m ,问此时轴转动的角速度变为多少?

解 取系统为研究对象。系统受到的外力有小球 B 的重力和轴承的约束反力,这些力对于 z 轴的矩都等于零,所以系统对转轴的动量矩保持不变。

当 $\theta_0 = 30^\circ$ 时,小球对 z 轴的动量矩为

$$L_{z1} = ml \sin \theta_0 \cdot \omega_0 \cdot l \sin \theta_0 = ml^2 \omega_0 \sin^2 \theta_0$$

设 ω_1 和 θ_1 分别为滑块 A 向上移动 0.15 m 时杆的转动角速度和绳与杆轴线的夹角。此时小球对 z 轴的动量矩为

$$L_{z2} = ml^2 \omega_1 \cdot \sin^2 \theta_1$$

根据动量矩守恒定理 $L_{z1} = L_{z2}$,解得

$$\omega_1 = \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_1} \omega_0 \quad (1)$$

其中, θ_1 未知,考虑几何条件

$$2l \cos \theta_0 - 2l \cos \theta_1 = 0.15$$

解得

$$\cos \theta_1 \approx 0.74 \quad \sin^2 \theta_1 \approx 0.45$$

代入(1)式可得

$$\omega_1 \approx 8.33 \text{ rad/s}$$

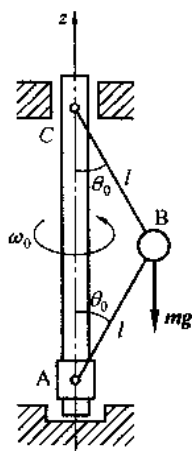


图 11.4

11.3 刚体对轴的转动惯量

1. 转动惯量

转动惯量是刚体转动时惯性大小的度量,其定义为

$$J_z = \sum m_i r_i^2 \quad (11.14)$$

它不仅与整个刚体的质量大小有关,而且还与刚体质量的分布、轴的位置有关。同一刚体对于不同的轴,其转动惯量是不相同的。因此,求刚体的转动惯量时,应明确是对哪一

理论力学

个轴而言的。

如果刚体的质量是连续分布的,式(11.14) 还以写成积分形式,即

$$J_z = \int_V r^2 dm \quad (11.15)$$

其中, V 表示整个刚体区域。

具有规则几何形状的均质刚体,其转动惯量均可按上式用积分法求得。对于形状不规则或质量非均匀分布的刚体,通常进行实验测定。

下面来计算几种均质简单形状物体的转动惯量。

(1) 均质等截面直杆

设均质等截面直杆长为 l , 质量为 m , 如图 11.5 所示。求此杆对通过杆端 O 并与杆垂直的 z 轴的转动惯量 J_z 。

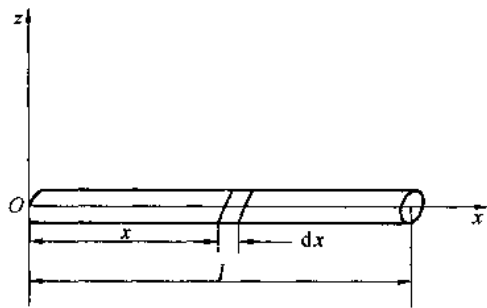


图 11.5

在杆中 x 处取长为 dx 的一段,其质量 $dm = \frac{m}{l} dx$, 于是

$$J_z = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{1}{3} ml^2$$

(2) 均质薄圆环

设圆环质量为 m , 半径为 R , 如图 11.6 所示,求其对通过中心且与圆环所在平面垂直的转轴 z 的转动惯量 J_z 。

将圆环分成许多微段,其中每一微段的质量为 m_i ,它对 z 轴的转动惯量为 $m_i R^2$,故整个圆环对 z 轴的转动惯量为

$$J_z = \sum m_i R^2 = (\sum m_i) R^2 = mR^2$$

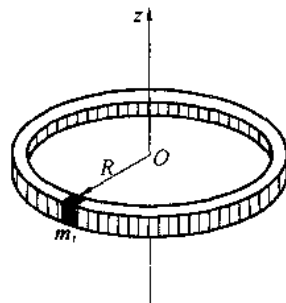


图 11.6

2. 回转半径

通过上述计算,可知各物体转动惯量的计算公式一般是不同的。工程上,为了使用方便,将刚体转动惯量的计算设想按一个质点的转动惯量来计算,从而得到一个统一的简单公式,即

$$J_z = m\rho_z^2 \quad (11.16)$$

其中,当量长度 ρ_z 称为刚体对 z 轴的回转半径或惯性半径。上式表明:刚体对某一轴的转动惯量,等于刚体总质量与刚体对该轴回转半径平方的乘积。

回转半径的单位与长度的单位相同。它的物理意义是:假想把刚体的全部质量集中到一点,使该点对原轴的转动惯量等于刚体对原轴的转动惯量,则该点到原轴的距离就是回转半径。

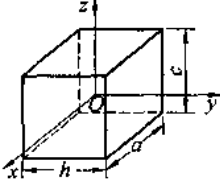
对几何形状相同的物体, $\frac{J_z}{m}$ 是一定的,即惯性半径是一定的。在机械工程手册中,列

有简单几何形状或几何形状已标准化的零件的回转半径,可供工程技术人员查阅。表 11.1 列出了几种常见均质物体转动惯量的计算公式,其他情况可查阅有关的工程手册。由于同一物体对不同轴的转动惯量,一般不相同,因此,查表时应注意表中指明的是哪一根轴线。

表 11.1 常见均质物体的转动惯量

物体的形状	简 图	转动惯量	回转半径
细直杆		$J_{zC} = \frac{m}{12} l^2$ $J_z = \frac{m}{3} l^2$	$\rho_{zC} = \frac{l}{2\sqrt{3}} = 0.289l$ $\rho_z = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.578l$
薄壁圆筒 (包括细薄圆环)		$J_z = mR^2$	$\rho_z = R$
圆柱 (包括薄圆板)		$J_z = \frac{1}{2} mR^2$ $J_x = J_y = \frac{m}{12} (3R^2 + l^2)$	$\rho_z = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0.707R$ $\rho_x = \rho_y = \sqrt{\frac{1}{12} (3R^2 + l^2)}$
空心圆柱		$J_z = \frac{m}{2} (R^2 + r^2)$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{2} (R^2 + r^2)}$
实心球		$J_z = \frac{2}{5} mR^2$	$\rho_z = \sqrt{\frac{2}{5}} R = 0.632R$
矩形薄板		$J_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$ $J_x = \frac{m}{12} b^2 \quad J_y = \frac{m}{12} a^2$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{12} (a^2 + b^2)}$ $\rho_x = 0.289b$ $\rho_y = 0.289a$

续表 11.1

物体的形状	简图	转动惯量	回转半径
立方体		$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ $J_x = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + b^2)}$ $\rho_x = \sqrt{\frac{1}{12}(c^2 + b^2)}$ $\rho_y = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + c^2)}$

3. 转动惯量的平行移轴定理

定理: 刚体对任一轴的转动惯量, 等于刚体对通过质心并与该轴平行的轴的转动惯量, 加上刚体的质量与两轴间距离平方的乘积, 即

$$J_z = J_{zc} + mL^2 \tag{11.17}$$

4. 组合体的转动惯量

由转动惯量的定义可知: 组合体对于某一轴的转动惯量, 等于其中各简单形状物体对同一轴的转动惯量之总和。如果物体有空心部分, 可把这部分质量视为负值处理。

例 11.4 冲击摆可近似看成由均质杆 OA 和均质圆盘 B 组成, 如图 11.7 所示。已知杆的质量为 m_1 , 杆长为 L , 圆盘的质量为 m_2 , 半径为 R , 试求摆对通过杆端并与盘面垂直的轴 z 的转动惯量 J_z 。

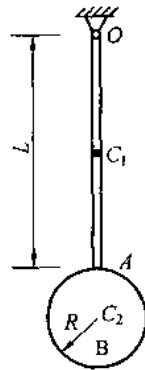


图 11.7

解 摆对 z 轴的转动惯量 J_z , 等于杆对 z 轴的转动惯量 J_{z1} 与盘对 z 轴的转动惯量 J_{z2} 的和。

$$J_{z1} = \frac{m_1 L^2}{3}$$

$$J_{z2} = \frac{m_2 R^2}{2} + m_2 (L + R)^2 = \frac{1}{2} m_2 (3R^2 + 4RL + 2R^2)$$

所以
$$J_z = J_{z1} + J_{z2} = \frac{m_1 L^2}{3} + \frac{1}{2} m_2 (3R^2 + 4RL + 2R^2)$$

11.4 刚体的定轴转动微分方程

设一刚体绕固定轴 z 转动, 在某瞬时 t 的角速度为 ω , 如图 11.8 所示, 则刚体对转动轴 z 的动量矩为

$$L_z = J_z \omega \tag{11.18}$$

从上式可以看出, 由于 J_z 恒大于零, 所以 L_z 和 ω 同向。

将式(11.18) 代入式(11.13) 可得

$$J_z \varepsilon = \sum m_i (F_i^{(e)}) \tag{11.19}$$

上式表明: 定轴转动刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积, 等于所有外力对转轴

之矩的代数和。这就是刚体的定轴转动微分方程。

由式(11.19)可以看出:

① 式(11.19)与质点的运动微分方程相似,所以用它可以求解转动刚体动力学的两类问题。

② 当外力对转轴之矩的代数和为零时,刚体作匀速转动。

③ 当外力对转轴之矩的代数和不为零时,刚体作变速转动。而且转动惯量越大,获得的角加速度越小,这说明刚体的转动状态变化得越慢,则刚体的转动惯性越大,反之则越小。因此,刚体的转动惯量是刚体转动时惯性的度量。

例 11.5 闸轮重为 P , 半径为 r , 以角速度 ω_0 绕 O 轴转动, 如图 11.9(a) 所示。在闸块的制动下, 经过时间 t 后停止转动。设闸块作用于闸轮的正压力 N 为一常力, 闸轮对 O 轴的转动惯量为 J_0 , 闸块与闸轮之间的动滑动摩擦系数为 f , 轴承中的摩擦忽略不计, 试求正压力 N 的大小。

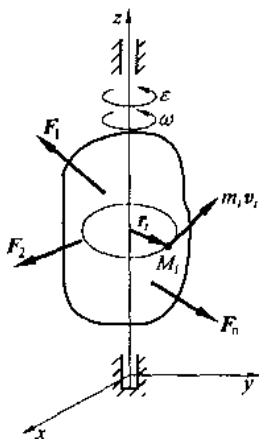


图 11.8

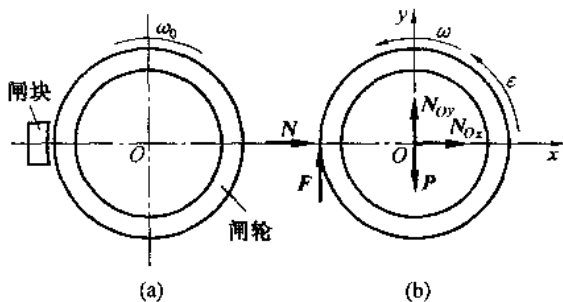


图 11.9

解 取闸轮为研究对象。作用在闸轮上的外力有重力 P , 正压力 N , 滑动摩擦力 F , 轴承反力 N_{Ox} 和 N_{Oy} , 受力分析如图 11.9(b) 所示。其中, 只有 F 对 O 轴有矩, 其他各力的作用线都通过 O 轴, 对 O 轴的矩都为零。

闸轮作定轴转动, 设制动过程中的任一瞬时, 闸轮的角速度为 ω , 角加速度为 ϵ , 转向如图 11.9(b) 所示, 则闸轮的转动微分方程和初始条件为

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = -Fr \quad (F = N = \text{恒量}) \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega(0) &= \omega_0 \\ \omega(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

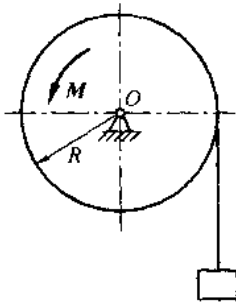
解式(a)、(b)得

$$N = \frac{J_0 \omega}{Frt}$$

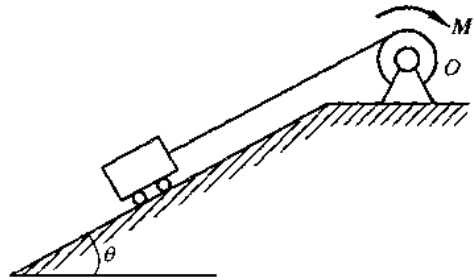
习 题

11.1 如题 11.1 图所示,绞车鼓轮的直径为 R ,其质量为 m_1 ,且假定质量均匀分布在圆周上(即将鼓轮看做圆环),所起吊的重物质量为 m ,绳子的质量不计。由电机传过来的主动转矩为 M ,求重物上升时的加速度和绳子的拉力、绞车支座的反力。

11.2 斜面提升装置如题 11.2 图所示。已知鼓轮的半径为 R ,质量为 m_1 ,对转轴 O 的转动惯量为 J ,作用在鼓轮上的力偶矩为 M 。斜面的倾角为 θ ,被提升的小车及重物质量为 m_2 。设绳的质量和各处的摩擦忽略不计,求小车的加速度。



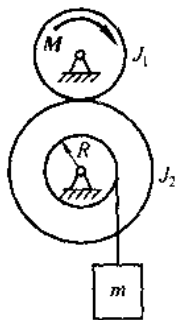
题 11.1 图



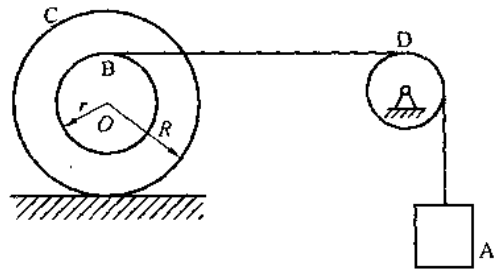
题 11.2 图

11.3 如题 11.3 图所示,电绞车提升一质量为 m 的物体,在其主动轴上作用有一矩为 M 的主动力偶。已知主动轴和从动轴连同安装在这两轴上的齿轮以及其他附属零件的转动惯量分别为 J_1 和 J_2 ,传动比 $z_1:z_2 = i$,吊索缠绕在鼓轮上,此轮半径为 R 。设轴承的摩擦和吊索的质量均略去不计,求重物的加速度。

11.4 重物 A 质量为 m_1 ,系在绳子上,绳子跨过不计质量的固定滑轮 D,并绕在鼓轮 B 上,如题 11.4 图所示。由于重物下降,带动了轮 C,使它沿水平轨道滚动而不滑动。设鼓轮半径为 r ,轮 C 的半径为 R ,两者固连在一起,总质量为 m_2 ,对于其水平轴 O 的回转半径为 ρ 。求重物 A 的加速度。



题 11.3 图

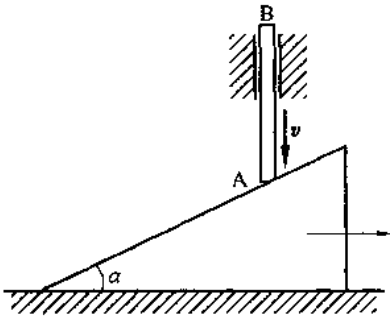


题 11.4 图

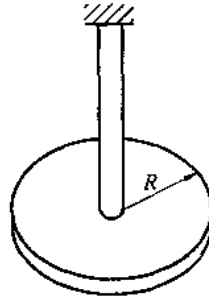
11.5 已知飞轮的转动惯量为 $J = 18 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,在恒力矩 M 作用下由静止开始转动,经过 20 s,飞轮的转速达到 120 r/min。若不计摩擦的影响,求启动力矩 M 。

11.6 如题 11.6 图所示,质量为 m 的直杆可以自由地在固定铅垂套管中移动,杆的下端搁在质量为 M ,倾角为 α 的光滑的楔块上,而楔块放在光滑的水平面上。由于杆的压力,楔块向水平方向运动,因而杆下降,求两物体的加速度。

11.7 如题 11.7 图所示,均质圆盘的半径 $R = 180 \text{ mm}$,质量 $m = 25 \text{ kg}$ 。测得圆盘的扭转振动周期 $T_1 = 1 \text{ s}$;当加上另一物体时,测得扭转振动周期为 $T_2 = 1.2 \text{ s}$ 。求所加物体对于转动轴的转动惯量。



题 11.6 图



题 11.7 图

第 12 章 动能定理

当质点系无外力作用时,它的动量和动量矩将保持不变。如果其中部分质点获得了动量或动量矩,则必定有另一部分质点损失同样多的动量或动量矩。这就是说,质点之间机械运动的传递,可以用动量、动量矩来量度。另一方面,质点之间这种机械运动的传递是靠相互作用的力来实现的。如果它们之间的作用力是摩擦力,那么质点之间在进行机械运动的传递过程中,因摩擦力的存在而产生热量。即机械运动在质点之间进行相互传递的过程中,同时还可能存在着机械运动和热运动之间的互相转换过程。一般来说,不仅质点之间的机械运动可以互相传递,而且质点的机械运动还可以和其他的运动,如热的、光的和电的运动进行相互转换。机械运动和其他各种运动形态的转换,将以能量来度量。物体由于运动而具有的能量称为物体的动能。本章研究物体的动能的改变和物体所受力之间的关系,即动能定理,以及动能和势能之间的转换规律——机械能守恒定律。

12.1 力的功

1. 常力在直线位移中的功

从物理学可知,功是力对物体在一段路程中作用效果的积累。设一质点 M 在力 F 作用下沿直线运动,如图 12.1 所示,则此常力 F 在位移方向上投影与其路程 s 的乘积,称为力 F 在路程 s 上所做的功,以 W 表示,即

$$W = F \cos \alpha \cdot s \quad (12.1)$$

2. 变力在有限曲线位移上做的功

为了计算变力在有限曲线路径中的功,我们先定义力在无限小位移中的元功,设变力 F 的作用点沿着曲线 AB 运动,如图 12.2 所示,力在 ds 路程中所做的功称为元功。由于 ds 是一个无穷小量,所以略去高阶小量后,可视 ds 为曲线切线上的一小段直线,其位移矢量即为 dr ,力 F 在此微小路程中可视为常力矢,故力 F 在此微小路程上所做的功可表示为

$$\delta W = F \cdot dr = F \cos \theta \cdot ds$$

或

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (12.2)$$

式中, F_x 、 F_y 、 F_z 为力 F 在直角坐标轴上的投影,一般来说,它们均是力的作用点坐标的函数。

由高等数学知,式(12.2)右端不一定都能写成某个坐标函数的全微分,因此,我们用 δW 表示元功,而不用 dW 表示元功。 δW 仅表示元功的一个微量。

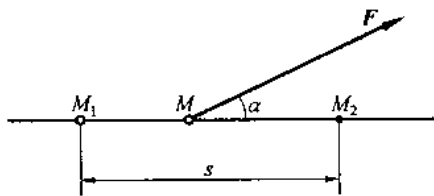


图 12.1

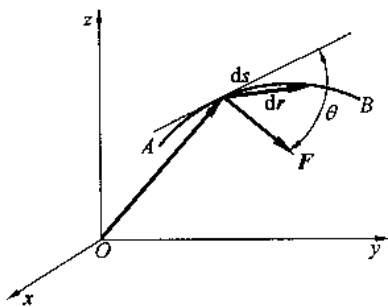


图 12.2

力在有限路程 AB 弧上的功可定义为力在此路程上所有元功之和,即

$$W_{A,B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

或

$$W_{A,B} = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (12.3)$$

3. 汇交力系合力之功

设有 n 个力 F_1, F_2, \dots, F_n 同时作用于一点, 则汇交力系有一合力 $R = \sum_{k=1}^n F_k$, 根据力的功之定义有

$$W_{A,B} = \int_A^B \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^n \int_A^B \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^n W_k \quad (12.4)$$

此式表明, 汇交力系的合力在有限路径上的功等于力系中各力在此路径上的功的代数和。

4. 几种常见力所做功的计算

(1) 重力的功

设质点系的质心 C 沿曲线由 A 运动到 B , 如图 12.3 所示, 则作用于质点的重力为

$$\mathbf{F} = -mg$$

即 $F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg$, 因此, 重力所作的功为

$$W_{A,B} = \int_A^B -mg dz = mg(z_A - z_B) \quad (12.5)$$

上式表明, 重力所做的功等于重力与质心下降距离的乘积。由此可见, 重力的功与质心(重心)运动轨迹无关, 只与其起始位置的高度差有关。假设重心下降高度为 h , 则重力的功可写为

$$W_{A,B} = mgh$$

重心下降, 重力所做的功为正; 反之, 则为负功。

(2) 弹性力的功

设质点系上两点 C_1 和 C_2 以一直线弹簧联结, 如图 12.4 所示。弹簧在其弹性限度内作用于 C_1, C_2 的力分别可以表示为

理论力学

$$F_1 = -k(l_0 - l)$$

$$F_2 = -F_1$$

式中, k 称为弹簧的刚度或者弹性系数, 表示弹簧变形单位长度所作用的力; l_0 为弹簧的原长, $l = C_1C_2 = r_2 - r_1$

由元功的定义可知, F_1 和 F_2 的元功之和为

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta W_1 + \delta W_2 = F_1 dr_1 + F_2 dr_2 = \\ &= -F_1 \cdot (dr_2 - dr_1) = -F_1 d(r_2 - r_1) = \\ &= -F_1 \cdot dl = k(l_0 - l) \cdot dl \end{aligned}$$

由于 $l \cdot dl = \frac{1}{2} d(l \cdot l) = \frac{1}{2} dl^2 = l dl$

故 $\delta W = K(l_0 - l)dl = -k(l - l_0)d(l - l_0) = -k\delta d\delta$

其中, $\delta = l - l_0$ 为弹簧的变形量。

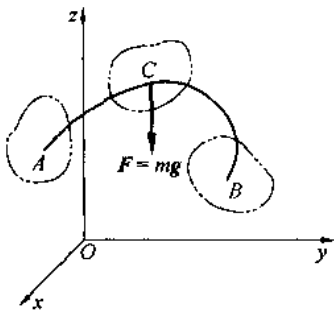


图 12.3

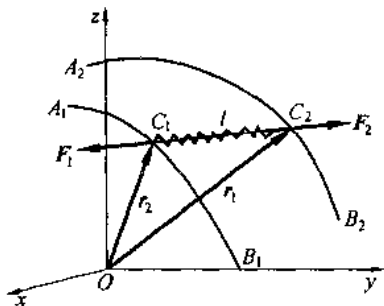


图 12.4

设在同一时间内, 点 C_1 从点 A_1 运动至点 B_1 , 点 C_2 从点 A_2 运动至点 B_2 , 则弹簧长度从 $A_1A_2 = l_1$ 变为 $B_1B_2 = l_2$, 变形量从 $\delta_1 = l_1 - l_0$ 变为 $\delta_2 = l_2 - l_0$ 。 F_1 和 F_2 所做功之和为

$$W = \int \delta W = \int_{\delta_1}^{\delta_2} -k\delta d\delta = \frac{1}{2} k(\delta_1^2 - \delta_2^2) \quad (12.6)$$

即: 弹性力的功等于弹簧的刚度与其始末位置变形量的平方差的乘积一半。

(3) 摩擦力的功

物体受到摩擦时, 由于动摩擦力 $F = \mu N$, 且方向与运动方向相反, 故动摩擦力的功为

$$W = - \int_l \mu N dl$$

如果 $N =$ 恒量, 则

$$W = -\mu N l \quad (12.7)$$

其中, l 为物体的运动轨迹。

值得注意的是, 只有动摩擦力才做功, 静摩擦力由于没有相对位移, 并不做功。

12.2 动能

1. 质点的动能

在物理学中知道,质点的动能等于质点的质量与其速度平方的乘积的一半,它是机械运动强弱的度量,即质点运动的强弱程度不仅取决于质量的大小,还取决于速度的大小。用 T 表示动能,则

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (12.8)$$

动能是一个大于等于零的标量。国际单位制中,动能的单位为 J(中文符号为焦,单位名称为焦耳)。

2. 质点系的动能

对于质点系而言,其动能等于各个质点的动能的总和,即

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (12.9)$$

刚体是由无数质点组成的质点系。刚体作不同的运动时,各质点的速度分布不同,刚体的动能应按照刚体的运动形式来计算。

(1) 平移刚体的动能

平移刚体上各点的速度在同一瞬时相同,均等于刚体质心的速度 v_C ,因而由式(12.9)可得

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_C^2 \sum_{i=1}^n m_i \quad (12.10)$$

对于总质量为 m 均匀分布的刚体,则

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 \quad (12.11)$$

即:平移刚体的动能等于其总质量与质心速度平方乘积的一半。

(2) 定轴转动刚体的动能

设刚体绕定轴 Oz 转动,某瞬时角速度为 ω ,刚体内任一点的质量为 m_i ,它到转轴的距离为 r_i ,如图 12.5 所示。由式(12.10)得

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

$$\text{故} \quad T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (12.12)$$

式中 $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ ——刚体对 Oz 轴的转动惯量。

即:刚体定轴转动时的动能等于刚体对转动轴的转动惯量与角速度平方的乘积的一半。

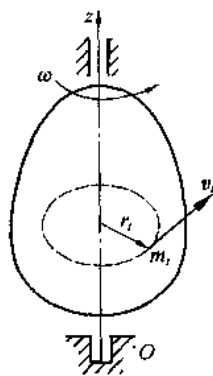


图 12.5

理论力学

(3) 平面运动刚体的动能

刚体做平面运动时,可以视为绕瞬心 P 的瞬时转动,如图 12.6 所示。设刚体对瞬心 P 的转动惯量为 J_p ,则由式(12.12)得

$$T = \frac{1}{2} J_p \omega^2 \quad (12.13)$$

由转动惯量的平行轴定理知:若 J_C 为刚体对质心 C 的转动惯量, r_C 为质心到瞬心的距离,则有 $J_p = J_C + mr_C^2$,代入上式得

$$T = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} mr_C^2 \omega^2$$

由于 $v_C = r_C \omega$,故上式改写为

$$T = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 \quad (12.14)$$

即:刚体平面运动时的动能等于刚体随质心的平移动能和绕质心的转动动能之和。

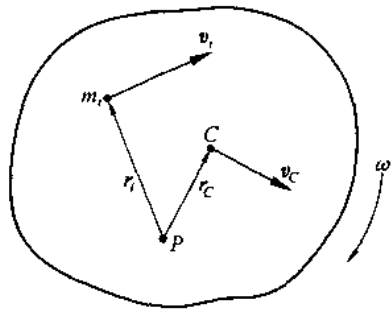


图 12.6

12.3 动能定理

1. 质点的动能定理

设质量为 m 的质点在力 F (指合力) 的作用下,沿某曲线运动,根据质点动力学基本方程有

$$F = ma$$

将上式投影到切线方向,得

$$m \frac{dv}{dt} = F_t$$

上式两边同乘以 ds ,并注意到 $ds = v dt$,得

$$m v dv = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = F_t ds = \delta W \quad (12.15)$$

式(12.15)说明,质点动能的微分等于作用于质点上力的元功。这就是质点动能定理的微分形式。

当质点从位置 M_1 运动到位置 M_2 时,它的速度从 v_1 变为 v_2 (见图 12.7)。设位置 M_1 和 M_2 的弧坐标分别为 S_1 和 S_2 。对式(12.15)两边作相应的积分,得

$$\int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \int_{S_1}^{S_2} F_t ds$$

$$\text{或} \quad \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{1,2}$$

其中 $W_{1,2}$ 表示质点从 M_1 运动到 M_2 过程中作用于质点 L 的力所做的功。

即:在任一段路程中,质点动能的改变,等于

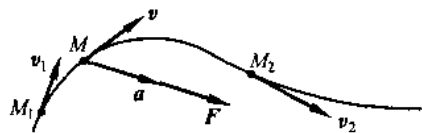


图 12.7

作用于质点上的力在这一段路程上所做的功。这就是质点动能定理的积分形式。

由此可知,动能并不等于功,只是动能的变化在数量上等于功。动能是描述质点某瞬时运动的量,而功则是表征力在某一段路程上作用效果的度量,力做功的结果使质点的动能发生改变。力做正功,质点的动能增加;力做负功,质点的动能减小。

2. 质点系的动能定理

设有 n 个质点组成的质点系,将作用在该质点系上的力分为外力和内力。取质点系中任一质量为 m_i 的质点 M ,速度为 v_i ,根据质点的动能定理有

$$d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \delta W_i^{(e)} + \delta W_i^{(i)}$$

其中, $\delta W_i^{(e)}$ 和 $\delta W_i^{(i)}$ 分别表示作用于质点 M_i 上的外力合力和内力合力的元功。

对质点系中的每个质点都可写出这样的方程,将这 n 个方程相加得

$$d \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \delta W_i^{(e)} + \sum \delta W_i^{(i)}$$

或

$$dT = \sum \delta W^{(e)} + \sum \delta W^{(i)} \quad (12.16)$$

式(12.16)表明:在任一段路程中,质点系动能的改变,等于作用在该质点系上所有外力和内力在同一段路程上所做的功之和。这就是质点系动能定理的积分形式。

例 12.1 桥式起重机上的吊车吊着重物 A 沿横向作匀速运动,重物的质量为 m ,速度为 v_0 。由于突然原因急刹车,重物因惯性必将绕悬挂点向前摆动,如图 12.8 所示。绳长为 L ,求最大摆角 φ_m 。

解 急刹车时,重物 A 的动能为 $T = \frac{1}{2} m v_0^2$,当摆到最大摆角 φ_m 时,速度为零,此时对应的动能也为零。在重物的速度由 v_0 变为零的过程中,其摆的角位移刚好是 φ_m ,所以可取重物 A 为研究对象,取速度从 v_0 到零的变化过程为研究过程,用积分形式的动能定理求解。解题的步骤大致如下。

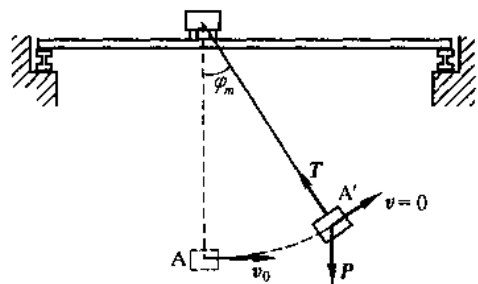


图 12.8

(1) 选取研究对象和研究过程。这里以重物 A 为研究对象,摆角从零到 φ_m 为研究过程。

(2) 分析重物 A 的受力,计算力的功。重物受重力 P 和绳的张力 T 作用,如图 12.8 所示,这里绳子不可伸长,是理想约束,所以 T 不做功, P 的功为

$$W_{1,2} = -PL(1 - \cos \varphi_m)$$

(3) 分析运动并计算动能。运动分析如图 12.8 所示,动能为

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad T_2 = 0$$

(4) 应用定理列方程,求解并分析结果。根据积分形式的动能定理 $W_{1,2} = T_2 - T_1$,有

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgL(1 - \cos \varphi_m)$$

理论力学

解得 $\cos \varphi_m = 1 - \frac{v_0^2}{2gL}$

例 12.2 升降机提升质量为 m 的重物 A 以速度 v_0 下降,如图 12.9 所示。若钢绳的上端突然被滑轮卡住,设钢绳的刚度为 k ,质量不计。求钢绳的最大张力。

题意分析:当绳的上端被卡住后,重物由于惯性还将继续下降,因而绳被拉长,其张力增加,一直增至重物的速度为零时止。在此过程中,重力和绳的张力做的功与绳的伸长量有关,而重物动能的减少量是已知的,故可用积分形式的动能定理先求绳的伸长量,再求出绳的张力。

解 以重物为研究对象,研究刚卡住瞬时到重物速度为零的瞬时这一过程。重物受重力 P 及绳子张力 T 作用,所做功为

$$W_{1,2} = W_{1,2}(P) + W_{1,2}(T) = mg\lambda_m + \frac{1}{2}k[\delta_0^2 - (\delta_0 + \lambda_m)^2]$$

式中的 δ_0 为绳子未被卡住时的伸长量(静伸长),由于卡住前重物作匀速运动,故有

$$mg = k\delta_0$$

于是力的功可写为

$$W_{1,2} = mg\lambda_m - \frac{1}{2}k\lambda_m^2 - k\delta_0\lambda_m = -\frac{1}{2}k\lambda_m^2$$

从绳子被卡住瞬时,重物以初速 v_0 向下作减速运动,下降 λ_m 后速度减为零,故若以卡住瞬时为状态 1, $v = 0$ 的瞬时为状态 2,有

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad T_2 = 0$$

根据积分形式的动能定理,有

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}k\lambda_m^2$$

解得 $\lambda_m = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}v_0$

舍去负值,再由胡克定律得绳的最大张力为

$$T_{\max} = k(\delta_0 + \lambda_m) = mg\left(1 + \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

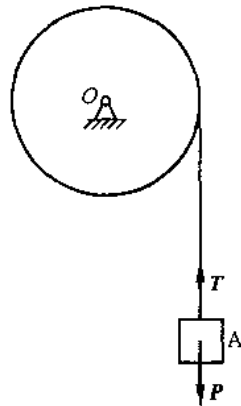


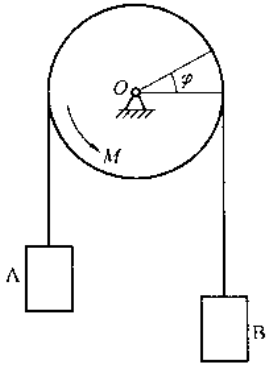
图 12.9

习 题

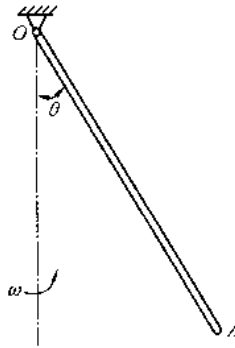
12.1 如题 12.1 图所示,圆盘的半径 $r = 0.5 \text{ m}$,可绕水平轴 O 转动。在绕过圆盘的绳上吊有两物块 A、B,质量分别为 $m_A = 3 \text{ kg}$, $m_B = 2 \text{ kg}$,绳与盘之间无相对滑动。在圆盘上作用一力偶,力偶矩按 $M = 4\varphi$ 的规律变化(M 以 $\text{N} \cdot \text{m}$ 计, φ 以 rad 计)。试求由 $\varphi = 0$ 到

$\varphi = 2\pi$ 时,力偶 M 与物块 A、B 的重力所做的功之总和。

12.2 长为 l 、质量为 m 的均质杆 OA 以球铰链 O 固定,并以等角速度 ω 绕铅直线转动,如题 12.2 图所示。如杆与铅直线的交角为 θ ,求杆的动能。



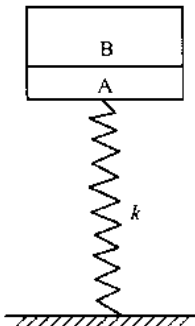
题 12.1 图



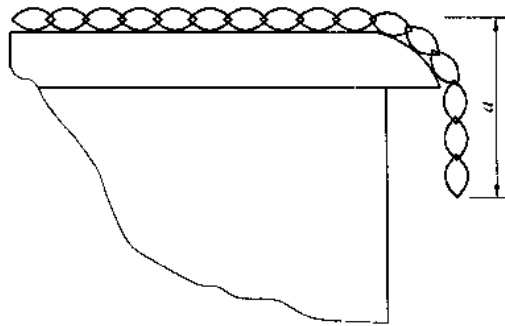
题 12.2 图

12.3 质量为 2 kg 的物块 A 在弹簧上处于静止,如题 12.3 图所示。弹簧的刚度 $k = 400\text{ N/m}$ 。现将质量为 4 kg 的物块 B 放置在物块 A 上,刚接触就释放它。求:(1) 弹簧对两物块的最大作用力;(2) 两物块得到的最大速度。

12.4 长度为 l 的链条,放在光滑的桌面上,如题 12.4 图所示。开始时链条静止,并有长度为 a 的一段下垂。求链条离开桌面时的速度。

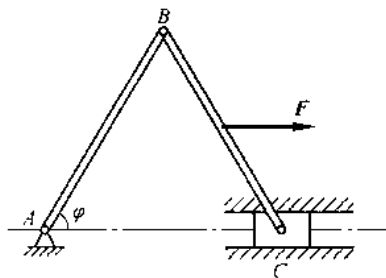


题 12.3 图



题 12.4 图

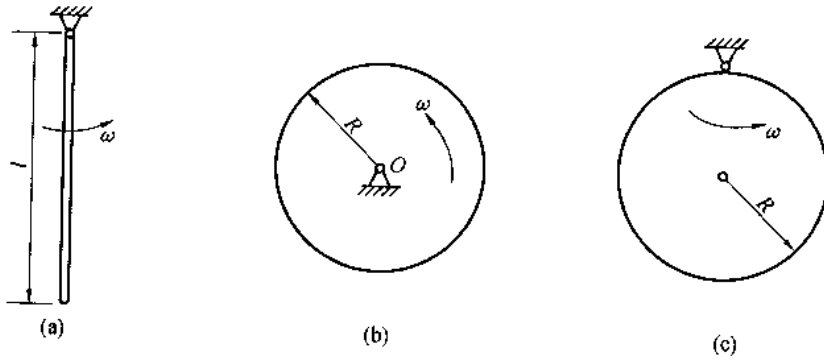
12.5 如题 12.5 图所示机构中, $AB = BC = 20\text{ cm}$, 已知一大小和方向均不变的水平力 $F = 100\text{ N}$, 并作用于 BC 的中点。求 AB 与水平的夹角 φ 由 60° 转至 30° 时,力 F 所做的功。



题 12.5 图

理论力学

12.6 计算题图 12.6 所示各匀质物体的动能。设各物体的质量均为 m , 各物体的尺寸及有关的角速度 ω 和速度 v 为已知。



题 12.6 图

第 13 章 达朗贝尔原理

达朗贝尔原理为研究质点或质点系的动力学问题提供了一个新的普遍的方法。利用该原理研究非自由质点系的动反力问题时,更加显示了它的方便性。因此,这一原理在工程实际中广泛应用。

达朗贝尔原理是在引入了惯性力的基础上,用研究力系平衡问题的方法来研究动力学问题的,所以运用这一原理来解决动力学问题的方法又被称为动静法。

13.1 惯性力及其力系的简化

13.1.1 惯性力

当物体受到另一个物体的作用而引起运动状态发生改变时,由于该物体具有惯性,力图保持其原有的运动状态,因此对施力物体有一个反作用力,这种反作用力称为惯性力。

例如,当人用手推小车使其运动状态发生改变时,若不计摩擦力,则小车在水平方向上只有手作用于小车上的力。如果小车的质量为 m ,加速度为 a ,则由牛顿第二定律可得受的推力 $F = ma$,同时,车对手有反作用力 $F' = -F$,这个力即为小车的惯性力。

又如,绳于的一端系着一个质量为 m 的小球,令小球在水平面上作匀速运动,如图 13.1 所示,设小球的质量为 m ,法向加速度为 a ,则小球受到的拉力为 $T = ma$ 。由作用力与反作用力定律知:小球作用于绳的反作用力为 $T' = -T = -ma$ 。

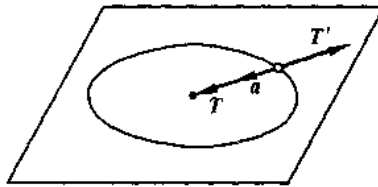


图 13.1

综上所述,质点的惯性力定义如下:质点惯性力的大小等于质点的质量与其加速度的乘积,方向与加速度方向相反,它不作用于运动质点本身,而作用于使质点运动状态发生改变的施力物体上。

13.1.2 惯性力系及其简化

考虑由 n 个质点组成的质点系,如果其中第 i 个质点的质量为 m_i ,加速度为 a_i ,惯性力 $F_{gi} = m_i a_i$,一共有 n 个这样的惯性力组成惯性力系。如果 n 个惯性力的作用线在同一个平面内,则称为平面惯性力系,否则为空间惯性力系。

理论力学

由力系简化定理知:惯性力系可以应用力的平移定理,向已知点 O 简化,简化的结果为作用于简化中心 O 的力和一个力偶,它们由惯性力系的主矢 R_g 和主矩 M_g 决定。现在就常见的刚体平动、刚体的定轴转动和刚体的平面运动讨论如下。

惯性力的主矢为

$$R_g = \sum F_{gi} = \sum -m_i a_i = - \sum m_i a_i \quad (13.1)$$

将质心坐标公式 $r_C = \frac{\sum m_i r_i}{m}$ 对时间取二阶导数得

$$m a_C = \sum m_i a_i \quad (13.2)$$

将上式代入式(13.1)得惯性力系的主矢为

$$R_g = m a_C \quad (13.3)$$

由于主矢 R_g 与简化中心位置无关,因此,无论刚体作何种运动,惯性力系的主矢都等于刚体的总质量与质心加速度的乘积,方向与质心加速度的方向相反。

惯性力系的主矩 M_g 为

$$M_g = \sum M_O(F_{gi}) = \sum r_i \times (-m_i a_i) \quad (13.4)$$

由于惯性力系的主矩 M_g 与简化中心位置有关,即不同的简化中心有不同的值,故应分别讨论。

1. 刚体平动

刚体作平动时,同一瞬时其上各点的加速度均等于质心的加速度 a_C ,因而惯性力系为均匀分布在体积内的平行力系,如图 13.2 所示。将惯性力系向质心简化,得到惯性力系的主矢和主矩为

$$R_g = - M a \quad (13.5)$$

$$M_g = \sum M_C(F_{gi}) = \sum r_i \times (-m_i a_i) = - \left(\sum -m_i r_i \right) \times a_C \quad (13.6)$$

因 r_i 是各质点对质心的矢径,对于以质心 C 为原点的坐标系,有

$$\sum -m_i r_i = m r_C = 0 \quad (13.7)$$

故

$$M_g = 0 \quad (13.8)$$

刚体平动时,惯性力系简化为过质心的一个合力,其大小等于刚体的总质量与加速度的乘积,方向与质心加速度方向相反。

2. 具有质量对称平面的刚体绕垂直于该平面的轴转动

在这种情况下,可将刚体的空间惯性力简化为在对称平面内的平面惯性力系,再将此平面惯性力系向对称平面与转轴的交点 O 简化,如图 13.3 所示,则惯性力系的主矢和主矩为

$$R_g = - m a_C$$

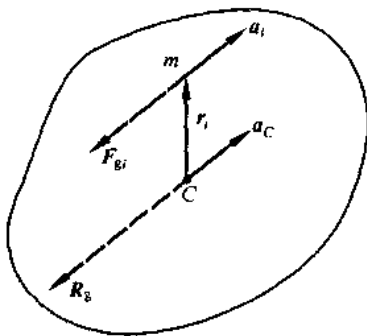


图 13.2

$$M_g = \sum M_O(F_{gi}) = \sum M_O(F'_{gi}) = \sum (-m_i r_i \epsilon) r_i = -(\sum (-m_i r_i^2) \epsilon) = -J_O \epsilon$$

具有质量对称平面的刚体绕垂直于该平面的轴转动时,惯性力系简化为通过轴 O 的一力和一力偶,此力的矢量等于刚体的总质量与质心加速度的乘积,方向与质心加速度的方向相反。此力偶的力偶矩等于刚体对轴的转动惯量与角加速度的乘积,转向与角加速度的方向相反。

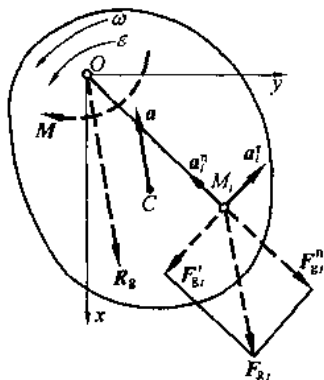


图 13.3

由此可知:

① 若转轴 O 通过质心 C , 则主矢为零, 此时惯性力系简化为一力偶。

② 若刚体匀速转动, 则主矩为零, 此时惯性力系简化为通过转轴 O 的一个力。

③ 若转轴 O 与质心 C 重合, 且刚体匀速运动, 则惯性力系的主矢和主矩均为零, 此时惯性力系为一平衡力系。

3. 具有质量对称平面的刚体的平面运动

此时, 仍可将刚体的空间惯性力系简化为对称平面内的平面惯性力系。由于平面运动可以分解为随同质心 C 的平动和绕质心 C 的转动, 故惯性力系向质心 C 简化, 得到惯性力系的主矢和主矩为

$$\left. \begin{aligned} R_g &= -ma_c \\ M_g &= -J_C \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (13.9)$$

上式表明: 具有质量对称的平面的刚体在平行于此平面内作平面运动时, 惯性力系简化为通过质心 C 的一力和一力偶, 此力的矢量等于刚体总质量与质心 C 加速度的乘积, 方向与加速度的方向相反。此力偶的力偶矩等于刚体对质心 C 的转动惯量与刚体角速度的乘积, 转向与角加速度的转向相反。

13.2 达朗贝尔原理

13.2.1 质点的达朗贝尔原理

假定有一质点 m , 受主动力 F 和约束反力 N 作用, 被约束在曲线上运动。质点在 F 和 N 这两个力的作用下产生加速度 a , 依据牛顿第二定律有

$$F + N = ma \quad (13.10)$$

引入惯性力概念, 上式改写为

$$F + N + F_g = 0 \quad (13.11)$$

此式表示: 非自由质点在运动的每一瞬时, 作用在质点上的主动力、约束反力和惯性力组

理论力学

成一平衡力系。这就是质点的达朗贝尔原理,式(13.11)是其数学表达式。

表面上看,式(13.11)与式(13.10)只是在形式上不同,但实质上,式(13.11)所表达的达朗贝尔原理为我们处理质点动力学问题提供了一种新的方法,这就是用静力平衡的方法处理动力学问题。

为了加深对原理的理解,将举例与达朗贝尔原理的表达式(13.11)联系起来进一步讨论。如图 13.4 所示,若分析小车的受力,则小车的惯性力 F_g 与人推小车的主动动力 F 在形式上构成一个平衡力系。学习静力学时,曾反复强调,力系的平衡一定是指作用在同一物体上的力系,但现在 F_g 和 F 是分别作用在两个不同的物体上,怎么能平衡呢?事实上也

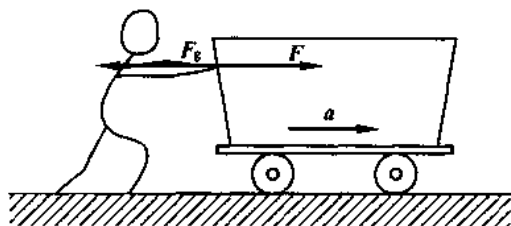


图 13.4

确实不平衡,只是当应用达朗贝尔原理时,是借助静力平衡的处理方法,因此必须把惯性力 F_g 人为地、主观地加到所研究的物体上。从这个意义讲,惯性力纯粹是假的、虚设的,客观上不存在于研究对象上的一个作用力。按此设想,对于动力学问题,只要在研究的物体上加上惯性力,就可以用静力平衡的方法建立动力学方程。

例 13.1 如图 13.5 所示,重为 P 的小球系于长为 L 的绳一端,绳的另一端固定于 A 点,使小球在水平面内作等速圆周运动,绳与垂线的夹角为 α 。求绳的张力 T 及角速度 ω 。

解 选小球为研究对象,置小球于运动的一般位置,分析步骤如下。

(1) 分析受力。小球受自身的重力 P 及绳的张力 T 。

(2) 分析运动,加惯性力。由于小球作匀速圆周运动,仅有向心加速度,根据惯性力的定义加惯性力 F_g ,如图 13.5 所示。

(3) 列平衡方程(在 ACm 平面内)。

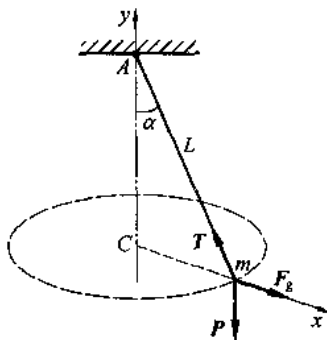


图 13.5

$$\sum F_x = 0 \quad F_g - T \sin \alpha = \frac{P}{g} L \omega^2 \sin \alpha - T \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -P + T \cos \alpha = 0$$

解得
$$T = \frac{P}{\cos \alpha} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \alpha}}$$

13.2.2 质点系的达朗贝尔原理

设有由 n 个质点组成的质点系,若其中的任一质点 M_i 的质量为 m_i ,作用于其上主动力的合力为 F_i ,约束反力的合力为 N_i ,质点的加速度为 a_i ,则惯性力 $F_{gi} = -m_i a_i$ 。由质点的达朗贝尔原理有

$$F_i + N_i + F_{gi} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

如果对质点系中的每个质点都假想地加上它的惯性力,则所有惯性力组成一惯性力系,它与质点系上作用的其他力在形式上组成平衡力系。

即:在质点系运动的任一瞬时,作用于质点系上所有的主动力、约束反力和假想加于各质点上的惯性力,在形式上组成一平衡力系。这就是质点系的达朗贝尔原理。

由以上定义可知,对于质点系,作用于其上的力系一般并不是汇交力系,而是一空间任意力系。由静力学力系简化理论知,空间任意力系的平衡条件是力系的主矢等于零和主矩等于零,若将作用于质点系上的力分为外力(包括约束反力)和质力,则应有

$$\left. \begin{aligned} \sum F_i + \sum F_{gi} &= 0 \\ \sum M_O(F_i) + \sum M_O(F_{gi}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

这就是质点系达朗贝尔原理的数学表达式。

例 13.2 物体系统如图 13.6 所示,设滑轮质量为 m ,物体 A 的质量为 $4m$,物体 B 的质量为 m ,滑轮视为半径为 r 的均质圆环,不计轮轴 O 处的摩擦。求物体 A 运动的加速度及 O 处的约束反力。

题意分析: 这是一个典型的质点系动力学问题,用达朗贝尔原理求解本题的关键是如何把物体 A、B 及滑轮的惯性力加上去。

解 选系统整体为研究对象,受力分析如图 13.6 所示,其中 P_A 、 P_B 、 P_O 是各物体的重力, N_{Ox} 、 N_{Oy} 是 O 处的约束反力。由运动分析知, a 的方向向下,因而物体 A 的惯性力 $F_{gA} = -4ma$, 方向向上; 物体 B 的惯性力 $F_{gB} = -ma$, 方向向下; 滑轮的惯性力需要借助微元分析的方法求出,取微元 ds , 其质量为 $dm = \frac{m}{2\pi r} ds = \frac{m}{2\pi} d\varphi$ 。由于对称且 F_g^e 过 O 点,所以微元的惯性力 F_{gi}^e 和 F_{gi}^r 的主矢及 F_{gi}^e 的主矩都为零,而 F_{gi}^r 的主矩为

$$M_{O\epsilon}(F_g^r) = - \int_0^{2\pi} adm \cdot r = - \int_0^{2\pi} r^2 \epsilon \frac{m}{2\pi} d\varphi = -mr^2\epsilon = -J_O\epsilon$$

这也是滑轮惯性力系简化的结果,负号表示 $M_{O\epsilon}$ 转向与 ϵ 的转向相反。

应用达朗贝尔原理列方程

$$\begin{cases} \sum M_O(F) = 0 & -J_O\epsilon + (4mg - 4ma)r - (mg + ma)r = 0 \\ \sum F_x = 0 & N_{Ox} = 0 \\ \sum F_y = 0 & N_{Oy} - P_A - P_B - P_O - \frac{P_B}{g}a + \frac{P_A}{g}a = 0 \end{cases}$$

因 $P_A = 4mg$, $P_B = mg$, $P_O = mg$, 解得

$$a = \frac{1}{2}g \quad N_{Ox} = 0 \quad N_{Oy} = \frac{9}{2}mg$$

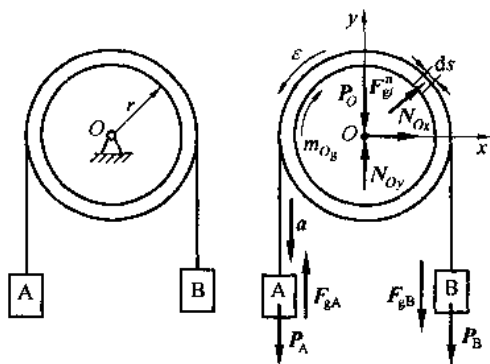


图 13.6

理论力学

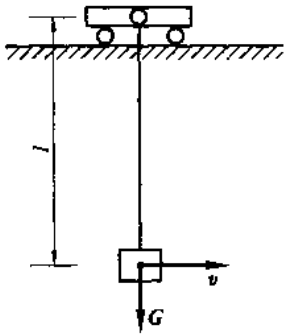
此题若是用动力学普遍方程求解,则必须联合应用动能定理或动量矩定理和动量定理。

应注意的是:在所画的受力图中,必须去掉约束。

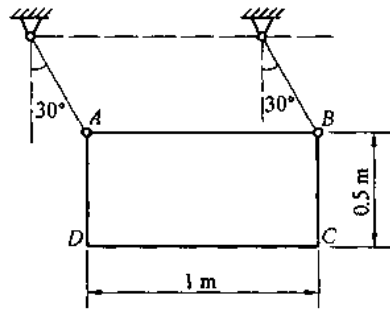
习 题

13.1 行车连同起吊重物一起以匀速 v 运动。当行车突然停住时,重物将向前摆动,如题 13.1 图所示。试求此时钢索的张力。设重物重为 G ,钢索长为 l ,质量不计。

13.2 匀质长方形薄板重 $G = 1000 \text{ N}$,以两根等长的柔绳悬挂于题 13.2 图所示铅垂平面内。求当薄板在重力的作用下,由图示位置无初速地释放的瞬时,板所具有的加速度和两绳的拉力。



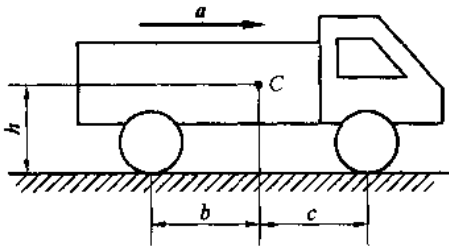
题 13.1 图



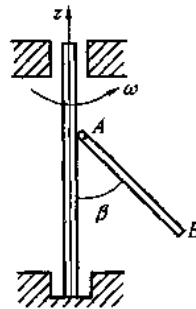
题 13.2 图

13.3 如题 13.3 图所示汽车总质量为 m ,以加速度 a 作水平直线运动。汽车质心 C 离地面的高度为 h ,汽车的前后轴到通过质心垂线的距离分别等于 c 和 b 。求其前后轮的正压力;若要使汽车前后轮压力相等,其加速度应为多少?

13.4 如题 13.4 图所示均质杆 AB 长为 l ,质量为 m ,以角速度 ω 绕铅直轴 z 转动。试求杆与铅垂轴的夹角 β 及铰链 A 的约束力。

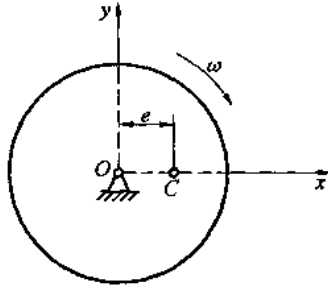


题 13.3 图



题 13.4 图

13.5 如题 13.5 图所示偏心飞轮位于铅垂面内。已知轮质量 $m = 23 \text{ kg}$, 对质心 C 的回转半径 $\rho_C = 0.2 \text{ m}$, 偏心距 $e = 0.15 \text{ m}$ 。图示位置时, 角速度为 $\omega = 8 \text{ rad/s}$ 。试求飞轮在图示瞬时的角加速度和轴承反力。



题 13.5 图

第 14 章 虚位移原理

虚位移原理是分析力学的基本原理之一,它建立了任意质点系的平衡条件,由于这一原理是以任意质点系为其对象,所以它比静力学中以刚体为对象所得的平衡条件更具有普遍意义。不仅如此,该原理避开了约束反力的出现,直接绘出了质点系平衡时,主动力之间应满足的关系,从而使得很多非自由质点系的平衡问题的求解变得非常简单。

虚位移原理的重要意义还在于它和达朗贝尔原理结合起来导出了非自由质点系的动力学普遍方程和著名的拉格朗日方程,从而得出了求解质点系动力学问题的重要方法,并在此基础上形成了整个分析力学体系。

本章只介绍虚位移原理的工程应用,而不按分析力学体系追求其完整性和严密性。

14.1 约束 自由度 广义坐标

14.1.1 约束和约束方程

任何非自由质点系的运动总要受到某些条件的限制,这种限制质点系运动的条件称为约束。如图 14.1 所示,单摆的小球被限制在由摆长所决定的圆周上运动;粗糙平面限制圆柱在其上作纯滚动等,都是工程实际中的约束实例。

1. 约束的分类

按限制条件的不同,约束可分为几何约束和运动约束两类。限制质点或质点系几何位置的约束,称为几何约束。限制质点系中各质点运动速度的约束,称为运动约束。如果约束与时间无关,则称为定常约束,否则称为非定常约束。如图 14.1(a) 中杆对小球的约束为几何约束,而图 14.1(b) 所示地面对轮子的约束是运动约束。

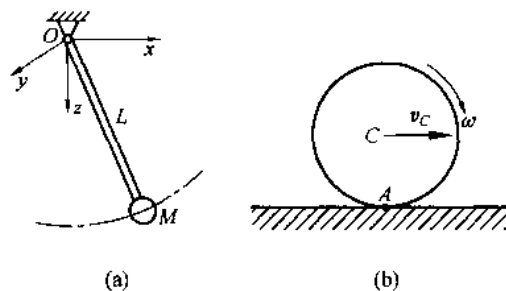


图 14.1

2. 约束方程

在力学分析中,常用数学方程表示质点或质点系的约束条件,这类方程称为约束方程。图 14.1(a) 表示小球 M 由长为 L 的刚性杆与而点球铰支座 O 相连,因此小球的空间位置被限制在以 O 为圆心, L 为半径的球面上,其相应的约束方程就是这个球面方程,即

$$x^2 + y^2 + z^2 - L^2 = 0$$

球面方程表达了描述小球 M 位置的 3 个坐标在运动过程中应满足的数学关系式,因式中各量都与时间无关,所以这是个定常的几何约束方程。图 14.1(b) 表示轮子沿水平而

作纯滚动。由运动学分析知,轮子运动过程中,轮缘上与地面的瞬时接触点 A 是速度瞬心,其速度必为零。设轮心的速度为 v_C ,角速度为 ω ,轮子半径为 R ,则表示轮子的这种运动学关系的方程为

$$v_A = v_C - R\omega = \frac{dR_C}{dt} - R\omega = 0$$

方程给出了轮心速度与角速度之间的关系,是限制车轮运动的条件,所以是运动约束方程。

一般,几何约束方程是代数方程,运动约束方程是微分方程。如果几何约束方程是等式的代数方程,称为双面约束。如果几何约束方程是不等式的代数方程,称为单面约束。如果运动约束方程中坐标对时间的导数能够通过积分消失,这样的约束称为完整约束;运动约束方程中坐标对时间的导数不能通过积分消失的约束称为非完整约束。本章涉及的约束只是定常双面约束。

14.1.2 自由度和广义坐标

我们知道,确定一个质点在空间的位置需要 3 个参数,通常可用 3 个直角坐标值表示。如果这个质点的运动受到一个约束方程的限制,如限制质点只在某平面上运动,则 3 个坐标中只有两个是独立的。如果这个质点的运动受到两个约束方程的限制,如限制质点只能沿某平面上的某直线运动,则 3 个坐标中只剩一个是独立的了。

自由度是描述质点或质点系能自由运动程度的物理量。比如上述质点,当描述该质点位置的坐标仅有两个是独立的,则称该质点有两个自由度;如果描述该质点的位置坐标仅有一个是独立的,则称该质点有一个自由度。一般可表述为:确定质点系在几何约束条件下的位置所需要的独立参变量数,称为该质点系的自由度。

对由 n 个质点组成的质点系,可以选取 $3n$ 个直角坐标 $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 来表示其中各质点的位置。如果该质点系没有任何外部约束,质点之间也没有任何约束,则这 $3n$ 个坐标是彼此独立的,此质点系的自由度为 $3n$,如果该质点系有 S 个约束,即存在 S 个约束方程,则 $3n$ 个坐标中必有 S 个变量不是独立的。因为,当其中 $K = 3n - S$ 个坐标确定后,其余的 S 个坐标就可以由 S 个约束方程解出。因此,由 n 个质点组成的质点系,如果有 S 个几何约束,则其自由度 $K = 3n - S$ 。

例 14.1 双质点摆如图 14.2 所示,已知 $OM_1 = L_1, M_1M_2 = L_2$ 。求该系统的自由度 K 。

解 此为用两根杆连接两个质点 M_1 、 M_2 的系统,质点的直角坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) ,共 6 个。因质点是限制在 xOy 平面上运动,所以恒有

$$z_1 = 0 \quad z_2 = 0 \quad (1)$$

这是两个约束方程,剩下的 4 个坐标还

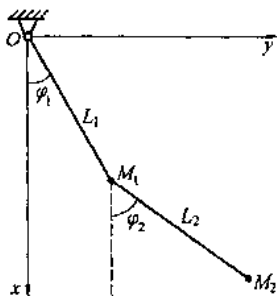


图 14.2

理论力学

满足另外两个约束方程,即

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - L_1^2 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L_2^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

系统由两个质点组成,约束方程的个数是4,所以,该系统的自由度为

$$K = 3 \times 2 - 4 = 2$$

也就是说,这个系统只有两个独立坐标。如取 x_1, x_2 为独立坐标,利用式(2)可解得

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sqrt{L_1^2 - x_1^2} \\ y_2 &= y_1 - \sqrt{L_2^2 - (x_1 - x_2)^2} \end{aligned} \right\}$$

所以,该系统的自由度为2。

在上例中,强调系统的自由度数是2,并取 x_1, x_2 为描述系统的独立参数。事实上,描述系统的独立参数也可以是 y_1, y_2 ,还可以自己定义。例如用 φ_1, φ_2 为描述系统的独立参数,此例中质点的直角坐标可表示为

$$\begin{aligned} x_1 &= L_1 \sin \varphi_1 & y_1 &= L_1 \cos \varphi_1 \\ x_2 &= L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin \varphi_2 & y_2 &= L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2 \end{aligned}$$

由此可知,确定一个系统的位置除采用独立的直角坐标外,也可用其他的独立参数。把确定系统位置的独立参量称为广义坐标。对具有完整约束的系统,其广义坐标的数目等于系统的自由度数。

确定系统的自由度对应用虚位移原理解决实际问题很重要。确定系统的自由度,除上述解析法外,还可以用几何分析的办法。即每次限定系统的一个广义坐标,直到把系统限制为一个死机构为止,限制的次数就是系统的自由度。如上例中,第一次限制 φ_1 后,系统还可以绕 M_1 转动,若再限制 φ_2 后,则系统就不能运动了,所以系统的自由度数为2。

14.2 虚位移及虚位移原理

14.2.1 虚位移

在静力学中主要涉及的是静止平衡的问题,现在要用动力学方法求解。系统处于静止状态,其实际并没有产生位移,如何让其动起来,需要假想地给静止的系统以位移。为了达到预期的目的,这些位移应该满足某些条件,由此产生了虚位移的概念:在某瞬时质点在约束允许的条件下所假想的任何无限小位移称为虚位移。虚位移可以是线位移也可以是角位移,虚位移不是经过时间发生的真实小位移,而是假想的约束允许的某种无限小位移,因而不用微分符号 dr ,而是用是变分符号 δr 表示。 δ 是变分法里的通用符号,它包含有无限小变动的意思,与虚位移的含义相一数。

由虚位移的定义可知,虚位移必须满足2个条件:①为约束条件所允许;②无限小。

例 14.2 图 14.3 所示曲柄连杆机构,曲柄 $OA = AB = r$ 。求该系统的自由度及 A、B 处的虚位移。

解 利用几何分析法求系统的自由度。若限制 B 点的位移, 系统便成为死机构。 B 点因约束所限, 只能沿水平方向有位移, 所以该系统的自由度数为 1。

另外, 该系统在约束允许的条件下, OA 杆只能绕 O 点转动, B 点只能沿水平方向移动, 故 A 点的虚位移 δr_A 只能是在以 O 为圆心, 以 OA 为半径的圆在 A 点处的切线上。至

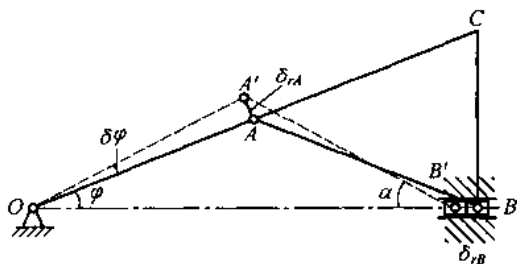


图 14.3

于 δr_A 的具体指向, 由虚位移方向的任意性可以先假设, B 点的虚位移 δr_B 沿水平线, 具体指向也可以任设, 如图 14.3 所示。

设 OA 杆转动的虚位移为 $\delta\varphi$, 则 A 、 B 点的虚位移关系的计算式为

$$\delta r_A = r\delta\varphi \quad (14.1)$$

注意到 A 与 B 是刚体 AB 上的两个点, 类似速度投影定理, 此两点的虚位移在 AB 连线上的投影也应相等, 即有

$$|\delta r_B| \cos \alpha = |\delta r_A| \cos(90^\circ - 2\varphi) \quad (14.2)$$

因为

$$\alpha = \varphi$$

故

$$|\delta r_B| = |\delta r_A| \cdot 2\sin \varphi \quad (14.3)$$

结论:

(1) 本题给出的虚位移中, 仅有一个是独立的。一般而言, 系统独立的虚位移个数与系统的自由度相等。

(2) 由本题可看出, 实际结构中, 受独立虚位移所限, 各点虚位移的方向并不能完全任意, 比如取 $\delta\varphi$ 为独立虚位移参数, 则 δr_A 和 δr_B 的具体指向都要依 $\delta\varphi$ 的转向而定。

14.2.2 虚位移的计算

虚位移的计算有两种方法: 一是几何法, 即根据运动学中求刚体内各点速度的方法, 建立各点虚位移之间的关系; 二是解析法, 即对坐标进行变分运算。

1. 解析法

应用广义坐标的概念, 选取适当的坐标系, 列出各主动力作用点的直角坐标与广义坐标的关系, 然后进行坐标变分运算, 即可求得各点的虚位移, 这就是解析法。坐标的变分运算类似坐标的微分运算。这里仍以上例为例介绍求虚位移的解析法。选 φ 角为广义坐标, 则 A 、 B 两点的直角坐标与广义坐标 φ 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} x_A &= r\cos \varphi & y_A &= r\sin \varphi \\ x_B &= -2r\cos \varphi & y_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

对式(14.4)进行变分, 得变量变分之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \delta x_A &= -r\sin \varphi \delta\varphi & \delta y_A &= r\cos \varphi \delta\varphi \\ \delta x_B &= 2r\sin \varphi \delta\varphi \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

式(14.5)就是 A 、 B 两点虚位移沿直角坐标的投影与广义虚位移 $\delta\varphi$ 之间的关系。

理论力学

对式(14.5)作进一步的计算,得

$$\begin{aligned} |\delta r_A| &= \sqrt{(\delta x_A)^2 + (\delta y_A)^2} = r\delta\varphi \\ |\delta r_B| &= |\delta x_B| = |\delta r_A| \cdot 2\sin\varphi \end{aligned}$$

2. 几何法

从虚位移的概念可知,虚位移之间的关系完全是几何关系,所以可用几何方法计算。对上例中 δr_A 和 δr_B 的计算就是几何法。由于速度的比例关系与位移的比例关系相似,所以也可以用运动学中的速度关系计算虚位移。即求 A 、 B 点的虚位移可借助运动学的方法找到 AB 杆的速度瞬心 C 。

设 $\beta = \angle ACB$, 则 $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 。因 $CA = r$, $CB = 2r\sin\varphi$, $\delta r_A = CA\delta\beta = r \cdot \delta\beta$,
 $\delta r_B = CB\delta\beta = 2r\sin\varphi\delta\beta$
所以

$$\delta r_B = \delta r_A 2\sin\varphi$$

可见,两种方法的计算结果是相同的。

14.2.3 约束力和理想约束

质点系如果不存在约束,那么它在一段时间内运动状态的改变完全取决于质点系所受的主动动力。但是如果系统存在约束,那么它在一段时间内运动状态的改变,不但取决于主动动力,而且还必须满足约束条件。由牛顿定律知道,质点运动状态的改变是质点受力的作用的结果。而约束对质点的运动状态的影响,也是由于约束所产生的某些附加的力来实现的。这些和主动动力一起决定质点系运动规律的附加力称为约束力。静力学中约束力和主动动力一起使质点系保持平衡;动力学中约束力和主动动力一起使质点系满足约束条件下按一定的规律而运动。在前几章处理刚体的动力学问题时,我们曾把圆体内的任两点之间的作用力视为内力,但是如果用现在的观点来看,这种内力实质上就是一种约束力。正是这种约束力使得刚体内任两点之间的距离始终保持不变。同样,如像连接两物体之间的铰链、无重刚杆、绳索等,它们之间的作用力均可视为约束力,可以不去分析它们是外力还是内力。

虚位移原理是研究质点系所受力在其任一虚位移上所作的功的性质,考察质点系是否能平衡的。力在虚位移上所做的功称为力的虚功,并记为

$$\delta W = F \cdot \delta r \quad (14.6)$$

由于 δr 是一个微量,所以虚功 δW 也是一个微量。根据矢量的数量积运算,上式也可以写成

$$\delta W = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z \quad (14.7)$$

其中, F_x 、 F_y 、 F_z 为力 F 在直角坐标轴上的投影。

前面章节中,我们曾经讨论过一些约束力在质点系的实位移中的元功为零的情形,在这里我们不难用同样的方法得出结论:它们在质点系的任何虚位移上所做的虚功也必为零。约束力在任何虚位移上所做虚功为零,则称此约束为理想约束。如果系统的所有约束反力在系统的任何虚位移上所做的虚功的代数和为零,则系统为理想系统。理想系统的条

件可表示为

$$\sum_{i=1}^n N_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (14.8)$$

其中, N_i 为系统的一个约束力。

14.2.4 虚位移原理

具有定常、理想约束的质点系,在某一位置保持静止平衡的充分必要条件为:所有作用于质点系的主动动力在该位置的任何虚位移上所做的虚功之和等于零,即

$$\sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (14.9)$$

证明:(1) 必要性

当质点系平衡时,系中任一质点也必须平衡,即满足

$$F_i + N_i = 0$$

于是, F_i 与 N_i 在任何虚位移 δr_i 中的元功之和亦必为零,即

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^n N_i \cdot \delta r_i = 0$$

根据理想约束条件 $\sum_{i=1}^n N_i \cdot \delta r_i = 0$

得

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = 0$$

必要性得证。

(2) 充分性

采用反证法。假设质点系主动动力的虚功之和等于零,但质点系中至少有一质点不平衡,由静止开始运动,这意味着质点系的动能将产生一个大于零的增量 dT ,根据质点系的动能定理有

$$dT = \sum (F_i + N_i) \cdot \delta r_i > 0$$

由于质点系是理想约束系统,即有 $\sum_{i=1}^n N_i \cdot \delta r_i = 0$,于是有

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i > 0$$

显然,这一结论与原来假设主动动力的虚功之和等于零相矛盾。因此,若主动动力的虚功之和等于零,则质点系必保持静止平衡。

实际应用中,虚位移原理常用解析式表示为

$$\sum (F_{ix} \cdot \delta x_i + F_{iy} \cdot \delta y_i + F_{iz} \cdot \delta z_i) = 0 \quad (14.10)$$

式中, F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} 和 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 分别表示主动动力 F 和虚位移 δr_i 在各个坐标轴上的投影。

应用式(14.9)、式(14.10)时需注意两点:第一,虚位移原理假设系统的约束都是理想约束,这个假设虽然反映了绝大多数约束的性质,但在工程实际中,也常遇到摩擦这类约束,相应的摩擦力在系统虚位移中的元功可能等于零,也可能不等于零。因此,具体应用虚

理论力学

位移原理时,应将元功不等于零的摩擦力视为主动力,列入虚位移原理的方程之中。第二,建立的方程中只包含系统所受的主动力。这里的主动力应包含系统所受的外力和内力。因为只有刚体的内力是理想约束,变形体的内力不是,即变形体内力的虚功之和不等于零。所以用虚位移原理求解变形体问题时,应将变形体的内力作为主动力看待列入虚位移原理的公式中。

例 14.3 曲柄式压榨机如图 14.4 所示,其中间铰上作用有水平力 F , 若 $AB = BC = L$, $\angle BAC = \varphi$, 求机构在图示位置平衡时, 作用于 C 处的压榨力 P 的大小。

解 取杆 AB 、 BC 及压板 D 为研究对象, 设被压物体作用于压板 D 上的力为 P , 则作用在系统上的所有主动力为 P 和 F 。

若限制点 C 沿竖直方向的移动, 机构变为死系统, 由此可判断系统只有一个自由度。设 φ 为广义坐标。给 AB 杆沿顺时针方向转动的虚位移 $\delta\varphi$, 则在主动力作用点 B 、 C 处有虚位移 δr_B 、 δr_C , 虚功方程为

$$F \cdot \delta r_B + P \cdot \delta r_C = 0$$

$$\text{即} \quad F \cdot |\delta r_B| \cos \varphi - P |\delta r_C| = 0 \quad (1)$$

由于这是一个多自由度的系统, 所以必须找出各虚位移与独立广义坐标之间的关系

$$|\delta r_B| = L\delta\varphi \quad |\delta r_C| = 2L\sin\varphi\delta\varphi \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$(F\cos\varphi - P \cdot 2\sin\varphi)L\delta\varphi = 0 \quad (3)$$

$\delta\varphi$ 是任意的, 式(3)要成立, 必须满足

$$F\cos\varphi - P \cdot 2\sin\varphi = 0$$

$$\text{得} \quad P = \frac{1}{2}F\cot\varphi$$

例 14.4 图 14.5 所示连杆机构中, 当曲柄 OC 绕 O 轴摆动时, 滑块 A 沿曲柄自由滑动, 并带动 AB 杆在铅垂导槽 K 内移动。已知: $OC = a$, $OK = L$, 在点 C 处垂直于曲柄作用一力 Q , 在点 B 处沿 BA 作用一力 P 。求机构平衡时, P 与 Q 的关系。

解 系统只有一个自由度, 在点 B 和 C 处任给虚位移 δr_B 、 δr_C 如图 14.5 所示。根据虚位移原理有

$$\sum \delta W_F = 0 \quad Q\delta r_C - P\delta r_B = 0 \quad (1)$$

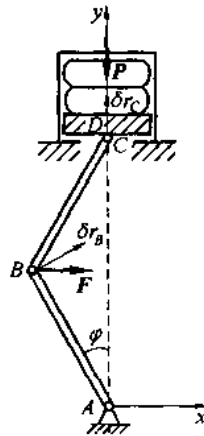


图 14.4

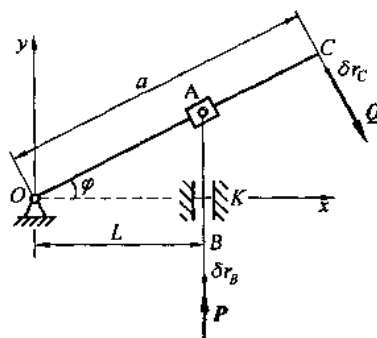


图 14.5

因为仅有一个虚位移是独立的,所以需建立 2 个虚位移之间的关系,根据几何条件有

$$\frac{\delta r_B \cos \varphi}{L} = \frac{\delta r_C}{a}$$

得

$$\delta r_C = \frac{a \cos^2 \varphi}{L} \delta r_B \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$\left(Q \frac{a \cos^2 \varphi}{L} - P \right) \delta r_B = 0$$

由于 $\delta r_B \neq 0$, 因此

$$Q \frac{a \cos^2 \varphi}{L} - P = 0$$

得

$$P = Q \frac{a \cos^2 \varphi}{L}$$

例 14.5 求图 14.6 所示组合梁支座 A 处的约束反力。

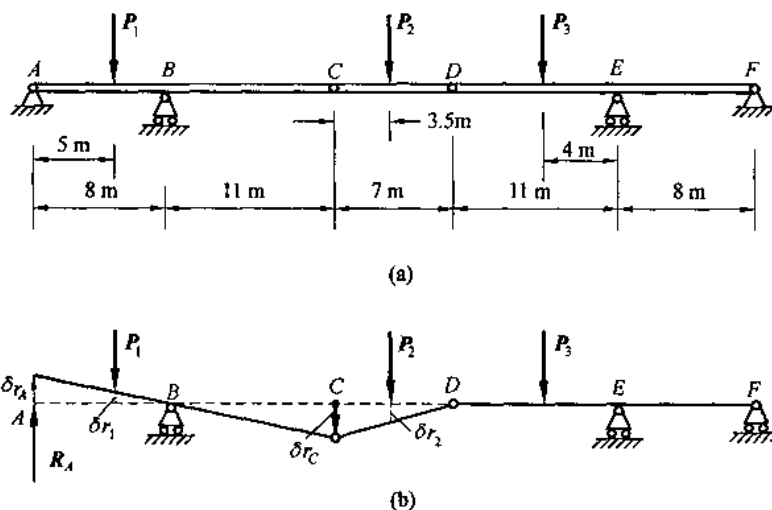


图 14.6

解 本题结构的自由度为零。因为虚位移原理是借助做功来进行计算的,所以,为应用原理解题,必须解除待求约束反力处的约束(比如本题的 A 处),并以约束反力代之,同时,为满足应用定理的条件(理想约束),将该约束反力归入主动力。

基于上述基本思想,解除 A 处的约束,并代之以约束反力 R_A ,由于主动力没有水平方向的分量,故不可能引起水平方向的约束反力。此时,系统为一个自由度的问题。

给 A 处一个虚位移 δr_A ,由此引起点 C 及 P_1 与 P_2 作用点处的虚位移,如图 14.6(b) 所示。

应用虚位移原理有

$$R_A \delta r_A - P_1 \delta r_1 + P_2 \delta r_2 = 0 \quad (1)$$

由于三角形的等比关系可得各虚位移之间的关系为

理论力学

$$\frac{\delta r_1}{\delta r_A} = \frac{3}{8} \quad \frac{\delta r_2}{\delta r_A} = \frac{\delta r_2}{\delta r_C} \cdot \frac{\delta r_C}{\delta r_A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} = \frac{11}{16} \quad (2)$$

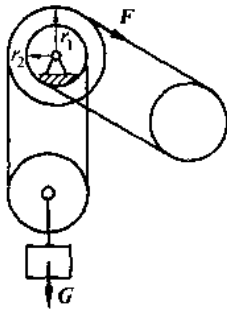
将式(2)代入式(1)得

$$R_A = \frac{3}{8} P_1 - \frac{11}{16} P_2$$

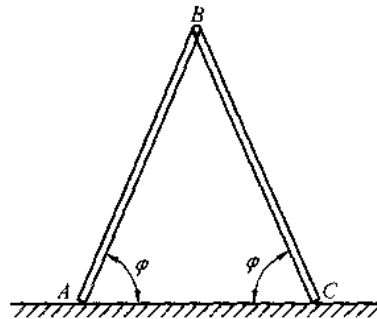
习 题

14.1 如题 14.1 图所示,已知差动滑轮的半径为 r_1, r_2 ,求平衡时主动力 F 和 G 的大小之间的关系。

14.2 如题 14.2 图所示,两等长均质杆 AC 和 BC 在 B 处用铰链连接,放置于粗糙水平地面上。设梯子与地面间的摩擦因数为 f ,试求平衡时梯子与水平面所成的最小角度 φ 。

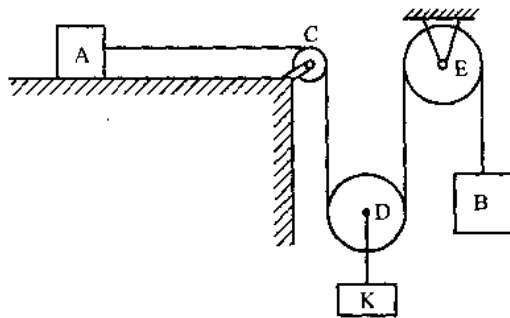


题 14.1 图



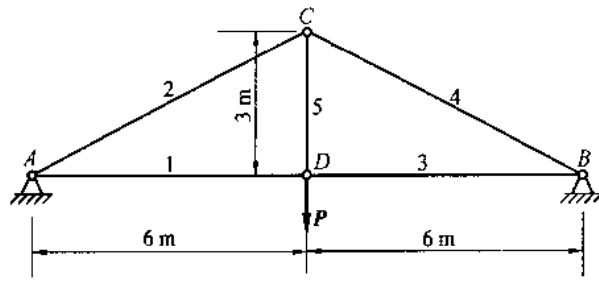
题 14.1 图

14.3 如题 14.3 图所示,已知重物 A 和 B 的质量相等,重物 A 系于一绳的两端,可沿水平方向移动,绳绕过定滑轮 C 和动滑轮 D 后,再绕过定滑轮 E 在绳的另一端挂上重物 B。动滑轮 D 的轴上挂有重为 Q 的重物 K。求平衡时重物 A、B 的质量 P ,以及重物 A 与水平面之间的滑动摩擦系数 μ 。



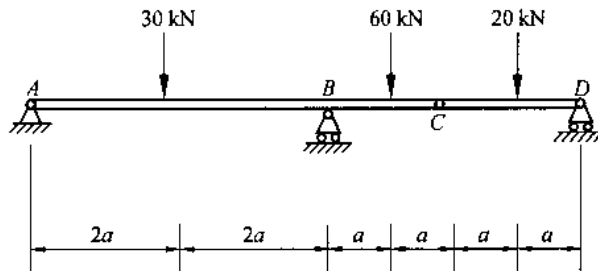
题 14.3 图

14.4 用虚位移原理求题 14.4 图所示桁架中杆 3 的内力。



题 14.4 图

14.5 一组合梁如题 14.5 图所示, 梁上作用 3 个铅垂力, 分别为 30 kN、60 kN 和 20 kN。求支座 A、B、D 三处的约束反力。



题 14.5 图

参考文献

- [1]何钦珊.理论力学[M].北京:高等教育出版社,2000.
- [2]刘延柱.理论力学[M].北京:高等教育出版社,2001.
- [3]谢传锋.静力学[M].北京:高等教育出版社,1999.
- [4]谢传锋.动力学:I[M].北京:高等教育出版社,1999.
- [5]谢传锋.动力学:II[M].北京:高等教育出版社,1999.
- [6]王崇斌.理论力学[M].北京:高等教育出版社,1988.
- [7]朱照宣,周起钊,殷金生.理论力学[M].北京:北京大学出版社,1982.
- [8]贾书惠,李万琼.理论力学[M].北京:高等教育出版社,2002.
- [9]清华大学理论力学教研室.理论力学:上册,中册,下册[M].4版.北京:高等教育出版社,1991.
- [10]刘延柱,杨海兴,朱本华.理论力学[M].2版.北京:高等教育出版社,2001.
- [11]贾书惠,张怀瑾.理论力学辅导[M].修订版.北京:清华大学出版社,2003.