高职高专数学系列教材

工　程　数　学

（机电类）

岳贵鑫　编

东 北 大 学 出 版 社

· 沈　阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

工程数学 / 岳贵鑫编. —沈阳：东北大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-81102-405-0

Ⅰ. 工…　Ⅱ. 岳…　Ⅲ. 工程数学—高等学校：技术学校—教材Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 078346 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress. com
http：// www. neupress. com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170mm×228mm
印　　张：11
字　　数：209 千字
出版时间：2007 年 8 月第 1 版
印刷时间：2007 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：刘乃义　刘宗玉　　责任校对：文　浩
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-405-0　　定　价：18.20 元

前　　言

近几年，由于高职高专教学改革的不断深入，高等数学、工程数学的课时量、教学内容、课程标准等都发生了较大变化。为了符合专业建设要求，与“工学结合”培养模式相适应，满足不同专业类别对数学教学的具体要求，结合教学改革实际，我们组织编写了土建类、机电类、经管类三个系列教材，兼顾统一性与多样化的关系，形成具有一定特色、优化配套的高职高专数学系列教材。

在编写过程中，充分考虑了上述各专业的特点和对工程数学知识的基本要求，力求做到内容精练、通俗易懂、易教易学，有较强的针对性。

整个系列教材由刘汝臣主编。本教材为机电类，可供高职高专院校的机械、汽车、计算机、电工电子、印刷等各专业学生使用，大约需要50至60学时。

编　者

2007年5月

目　　录

上篇　线性代数

第一章　行列式……………………………………………………… 1

第一节　二阶和三阶行列式……………………………………… 1
第二节　n 阶行列式 …………………………………………… 5
第三节　行列式的性质…………………………………………… 9
第四节　克莱姆（Cramer）法则 ……………………………… 13
第一章习题参考答案 …………………………………………… 17

第二章　矩　　阵 ……………………………………………… 18

第一节　矩阵的概念 …………………………………………… 18
第二节　矩阵的运算 …………………………………………… 20
第三节　矩阵的初等变换 ……………………………………… 25
第四节　矩阵的秩 ……………………………………………… 30
第五节　逆矩阵 ………………………………………………… 32
第二章习题参考答案 …………………………………………… 39

第三章　向量组的线性相关性 ………………………………… 42

第一节　n 维向量及其运算 …………………………………… 42
第二节　向量组的线性相关性 ………………………………… 44
第三节　向量组的秩 …………………………………………… 52
第三章习题参考答案 …………………………………………… 54

第四章　线性方程组 …………………………………………… 56

第一节　齐次线性方程组 ……………………………………… 56
第二节　非齐次线性方程组 …………………………………… 65
第四章习题参考答案 …………………………………………… 75

下篇　概率论

第五章　随机事件及其概率 …………………………………………… 79

第一节　随机事件 …………………………………………… 80
第二节　随机事件的概率 …………………………………… 86
第三节　条件概率　全概率公式 …………………………… 90
第四节　事件的独立性与伯努利概型 ……………………… 98
第五章习题参考答案 ………………………………………… 104
附　录 ………………………………………………………… 106

第六章　随机变量及其概率分布 ………………………………… 108

第一节　随机变量及其分布函数 …………………………… 108
第二节　离散型随机变量 …………………………………… 111
第三节　连续型随机变量 …………………………………… 117
第四节　随机变量的函数及其分布 ………………………… 124
第六章习题参考答案 ………………………………………… 126

第七章　二维随机变量及其分布 ………………………………… 128

第一节　二维随机变量及其分布函数 ……………………… 128
第二节　二维离散型随机变量及其分布 …………………… 129
第三节　二维连续型随机变量及其分布 …………………… 134
第四节　随机变量的独立性及二维随机变量函数的分布 … 138
第七章习题参考答案 ………………………………………… 143

第八章　随机变量的数字特征 …………………………………… 145

第一节　数学期望 …………………………………………… 145
第二节　方　差 ……………………………………………… 152
*第三节　协方差与相关系数 ………………………………… 158
第四节　大数定律与中心极限定理 ………………………… 161
第八章习题参考答案 ………………………………………… 166

附表 1 ……………………………………………………………… 167

附表 2 ……………………………………………………………… 170

上篇　线性代数

第一章　行列式

行列式是线性代数中的一个基本工具. 本章在介绍二、三阶行列式的基础上，给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质与计算. 作为行列式的初步应用，还将解决一类 n 元方程组的求解问题.

第一节　二阶和三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

设有二元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

用加减消元法解此方程组得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

这就是二元线性方程组(1)的求解公式. 为了便于记忆，我们引入二阶行列式的概念.

定义 1　由四个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 写成下面的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}, \tag{3}$$

称为二阶行列式，它表示 $a_{11}a_{22}$ 与 $a_{12}a_{21}$ 的差，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

等式右边的式子称为二阶行列式的展开式.

在二阶行列式中，横排称为行，竖排称为列，数 $a_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$称为行列式(3)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下角标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下角标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

二阶行列式的展开式可用对角线法则来记忆，如图 1_1 所示. 把 a_{11}，a_{22}所在直线称为主对角线，a_{12}，a_{21}所在直线称为副对角线，于是二阶行列式的展开式就是主对角线的两个元素之积与副对角线两个元素之积的差. 即

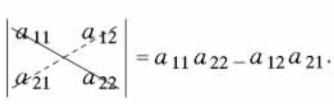


图 1_1

方程组(1)左边未知元的系数按原来相对位置构成的行列式就是式(3)，称为方程组(1)的系数行列式.

按照定义 1，有

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

这两个行列式是由行列式(3)分别将第一、第二列换成方程组(1)的常数列而得到. 于是公式(2)便可以记为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}.$$

例 1　**解方程组**

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 8, \\ 7x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

解　**因为**

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4&8\\7&5\end{vmatrix}=20-56=-36,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{-13}=-\frac{1}{13},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-36}{-13}=\frac{36}{13}.$$

二、三阶行列式

设三元线性方程组为

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{array}\right\}\tag{4}$$

我们也可以用加减消元法得到其求解公式.

与二元线性方程组的情形相类似，为了便于记忆求解公式，我们引入三阶行列式的概念.

定义 2　由九个数组成下面的式子

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\tag{5}$$

称为三阶行列式，其值规定为

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}&=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\\&\quad(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\\&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{6}$$

将式(6)右边的二阶行列式展开整理得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\\&\quad a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}\tag{7}$$

由式(7)可知，三阶行列式的展开式为六项的代数和，其规律遵循图 1_2 所示的对角线法则，每一项均为位于不同行不同列的三个元素之积，实线相连的三个元素之积带“＋”号，虚线相连的三个元素之积带“－”号.

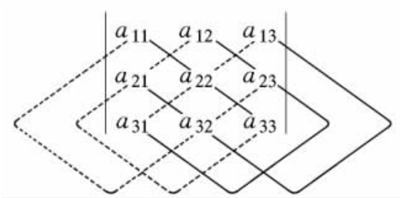


图 1_2

方程组(4)左边未知元的系数按原来相对位置构成的行列式称为方程组(4)的系数行列式. 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

如果 $D\neq 0$，那么方程组(4)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1- \\ &\quad 1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)-1\times1\times(-1) \\ &=-5, \end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2+0+1-0-2-6=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1+(-6)+0-(-1)-0-4=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0+2+(-4)-2-1-0=-5,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{-5}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-5}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-5}{-5}=1.$$

习题 1_1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&1&4\\8&9&5\end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&c\\0&d&0\end{vmatrix}$.

2. 验证下列等式：

(1) $\begin{vmatrix}a+a_1&b\\c+c_1&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&b\\c_1&d\end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$；

(3) $a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

3. 利用行列式求解下列方程组：

(1) $\begin{cases}5x+2y=3,\\11x-7y=1;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x\cos\alpha-y\sin\alpha=a,\\x\sin\alpha+y\cos\alpha=b;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+\ y-2z=-3,\\5x-2y+7z=22,\\2x-5y+4z=4.\end{cases}$

第二节　n 阶行列式

上一节，我们首先定义了二阶行列式，然后用二阶行列式给出了三阶行列式的定义，按此方法我们可以定义四阶、五阶等高阶行列式.

定义 3　设 $n-1(n\geqslant 3)$ 阶行列式已经定义，规定由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的具有 n 行 n 列的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

为 n 阶行列式. 其值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

在式(8)中，横排称为行，竖排称为列，数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$称为行列式(8)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下角标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下角标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. 把 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 所在直线称为主对角线，a_{1n}，$a_{2\,n-1}$，$\cdots$，a_{n1} 所在直线称为副对角线.

规定由一个数组成的行列式为一阶行列式,其值规定为这个数.

值得注意的是，高于三阶的行列式没有对角线展开法.

定义 4　划去式(8)中元素 a_{ij} 所在的行和列，剩余元素按原来相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}. 即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

根据定义 4，式(6)可以改写为

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},\end{aligned}$$

式(9)可以改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

例 3　**在 n 阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，主对角线上方的元素都为零，称此行列式为下三角行列式，试计算该行列式的值.

解　由行列式定义，按第一行展开时，元素 a_{12}，a_{13}，…，a_{1n}的值皆为零，所以

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11},$$

依此类推，得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，主对角线之外的元素都为零的行列式称为对角行列式. 显然

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4　**计算四阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1-0+0-8=-7.$$

习题 1_2

1. **填空**：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$ ________；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$ ________；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ________.

2. **计算下列行列式**：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；　(8) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；

(9) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$；　(10) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$.

第三节　行列式的性质

由行列式的定义可知，当行列式阶数 n 较大时，直接用定义计算行列式是较为繁琐的．下面介绍行列式的性质，以此简化行列式的计算．

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称行列式 D^{T} 为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 1 说明，行列式中行和列的地位是对称的．行列式关于行成立的性质对于列也同样成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式中两行(列)的位置，行列式变号.

互换 i，j 两行记作 $\mathrm{r}_i \leftrightarrow \mathrm{r}_j$，互换 i，j 两列记作 $\mathrm{c}_i \leftrightarrow \mathrm{c}_j$.

推论 1　如果行列式中有两行(列)元素对应相等，则此行列式为零.

性质 3　行列式中某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式，即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 2　行列式中某一行(列)中所有元素的公因数，可以提取到行列式符号的前面.

推论 3　如果行列式中某行(列)的元素全为零，则此行列式为零.

推论 4　如果一个行列式的两行(列)元素对应成比例，则此行列式为零.

性质 4　如果行列式中某行(列)的各元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5　把行列式的某一行(列)的元素的 k 倍加到另一行(列)对应元素上去，行列式的值不变．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 4 和推论 4 即可得证.

第 j 行的 k 倍加到第 i 行对应元素上记作 $\mathrm{r}_i+k\mathrm{r}_j$，第 j 列的 k 倍加到第 i 列对应元素上记作 $\mathrm{c}_i+k\mathrm{c}_j$.

定理 1 n 阶行列式 D 等于它的任一行（列）元素与它们所对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

证明从略.

定理 2 行列式 D 的某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n;\ i\neq j)$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n;\ i\neq j).$$

证明从略.

定理 1 与定理 2 的结论可以合并为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}\cdot D.$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

上述结论非常重要，它是证明许多其他命题的基础. 对行列式的列来说也有同样的性质成立.

现在利用行列式的定义与性质来计算行列式的值.

例 5　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　利用行列式的性质 5，**可得**

$$D\xlongequal[r_2+3r_4]{r_3-r_4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{4+2}\times(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 8 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-60.$$

例 6　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解　这个行列式的特点是各行元素的和都是 6，**所以可以把第** 2，3，4 **行同时加到第** 1 **行上去，提出公因子** 6，**然后各行再减去第一行.**

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1}6\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6\times 8=48.$$

习题 1_3

1. **利用行列式的性质计算下列行列式：**

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} 2 & 201 & 1 \\ 2 & 302 & 2 \\ 4 & 403 & 3 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 11 \end{vmatrix}$； (8) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$；

(9) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$； (10) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 1 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$；

(11) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$； (12) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 75 \end{vmatrix}$；

(13) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. **利用行列式的性质证明：**

(1) $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}=1$；

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$；

(4) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$.

3. 若存在常数 c_1，c_2，使得 $\begin{cases} a_{31}=c_1a_{11}+c_2a_{21}, \\ a_{32}=c_1a_{12}+c_2a_{22}, \\ a_{33}=c_1a_{13}+c_2a_{23} \end{cases}$ 成立．求证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

第四节　克莱姆(Cramer)法则

本节讨论 n 元 n 个方程的线性方程组

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{array}\right\} \tag{10}$$

称式(10)为 n 元线性方程组．若右端的常数项 b_1，b_2，…，b_n 不全为零，则称式(10)为非齐次线性方程组；而当 b_1，b_2，…，b_n 全为零时，则称式(10)为齐次线性方程组．记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称其为线性方程组(10)的系数行列式，又记

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1, 2, \cdots, n),$$

D_j 是用方程组右端的常数项 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 来替换系数行列式 D 中的第 j 列的元素而得到的行列式. 关于线性方程组(10)的解有下述法则.

克莱姆法则　如果线性方程组(10)的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组有唯一解，其解的形式为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}. \tag{11}$$

例 7　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0,$$

故可用克莱姆法则. 又因为

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27,$$

即得方程组的唯一解为

$$x_1=3,\ x_2=-4,\ x_3=-1,\ x_4=1.$$

克莱姆法则对研究线性方程组的解起着重大的作用，如果抛开公式(11)，克莱姆法则可转述如下.

定理 3　若线性方程组(10)的系数行列式 $D\neq 0$，则式(10)一定有解，并且解是唯一的.

定理 3 的逆否命题如下.

定理 4　若线性方程组(10)无解或有解但不唯一，则式(10)的系数行列式必为零.

显然，齐次线性方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

有解：$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，称其为式(12)的零解；如果有一组不全为零的数是式(12)的解，则称其为式(12)的非零解.

齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解.

把定理 3 应用于齐次线性方程组(12)，有如下定理.

定理 5　若齐次线性方程组(12)的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组(12)无非零解.

定理 5 的逆否命题如下.

定理 6　若齐次线性方程组(12)有非零解，则齐次线性方程组(12)的系数行列式一定为零.

可以证明，齐次线性方程组(12)的系数行列式 $D=0$ 是齐次线性方程组(12)有非零解的充分必要条件.

习题 1_4

1. 用克莱姆法则解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+z-\omega=8, \\ 2x-y-3\omega=3, \\ 3x+3y+5z-6\omega=5; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+7x_4=14, \\ 4x_1+6x_2+7x_3+x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4, \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4=1, \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+x_4=2, \\ x_1+x_3-x_4=1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 5x_1+4x_3+2x_4=3, \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=1, \\ 4x_1+x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$

2. **求三次多项式**

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

使得

$$f(-1)=0,\ f(1)=4,\ f(2)=3,\ f(3)=16.$$

3. **当 λ，μ 取何值时，齐次线性方程组**

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\mu x_2+x_3=0, \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

4. **设齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+\lambda x_2+(2-\lambda)x_3=0, \\ x_1+(\lambda+1)x_2=0 \end{cases}$$

有非零解，求 λ.

第一章习题参考答案

习题 1_1

1. (1) 18；(2) 5；(3) 0.

3. (1) $x=\frac{23}{57}$，$y=\frac{28}{57}$；

   (2) $x=a\cos\alpha+b\sin\alpha$，$y=b\cos\alpha-a\sin\alpha$；

   (3) $x=1$，$y=2$，$z=3$.

习题 1_2

1. (1) 24；(2) -6；(3) 24.

2. (1) 256；(2) 24；(3) -7；(4) 32；(5) 0；(6) -3；

   (7) -21；(8) 8；(9) 11；(10) $(a+3)(a-1)^3$.

习题 1_3

1. (1) 4；(2) 0；(3) -3；(4) -69；(5) -24；(6) 0；

   (7) 84；(8) 125；(9) 1；(10) $b(b-1)(b^2+b-4a)$；

   (11) $(x-y-z)(y-x-z)(z-x-y)(x+y+z)$；

   (12) 24；(13) 160.

习题 1_4

1. (1) $(1, 5, -5, -2)$；(2) $(1, -1, 0, 2)$；

   (3) $x_1=0.8$，$x_2=0.9$，$x_3=0.5$，$x_4=0.3$；

   (4) $x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=-1$，$x_4=1$.

2. $a_0=2$；$a_1=-5$；$a_2=0$；$a_3=7$.

3. **略**.

4. $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$.

第二章 矩 阵

矩阵是线性代数的主要内容之一，它作为一个数学工具贯穿于线性代数的全过程. 本章介绍矩阵的基本概念及其运算、矩阵的初等变换、矩阵的秩及逆矩阵.

第一节 矩阵的概念

一、矩阵的定义

在生产实践与科学技术中有大量的问题和矩形数表有关.

引例 1 某厂生产三种产品 P_1，P_2，P_3，上半年的销售额和利润(单位：万元)见表 2_1.

表 2_1

	P_1	P_2	P_3
销售额	1025	980	543
利 润	97	103	35

将其中的数字按原来的位置排成一个矩形数表如下：

$$\begin{pmatrix} 1025 & 980 & 543 \\ 97 & 103 & 35 \end{pmatrix}.$$

引例 2 对于线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=1, \\ x_1+2x_3=4, \\ -4x_1+3x_2+5x_3=3, \end{cases}$$

因为它的解只与方程组中未知数的系数及右端常数项有关，所以如果将系数及常数项按照它们在方程组中原来的位置排成数表，即有

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

此数表与线性方程组是一一对应的，此表决定着给定方程组是否有解，以及如果有解，解是什么等问题.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n

列数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记作$(a_{ij})_{m\times n}$或$(a_{ij})_{mn}$. 组成矩阵(1)的每个数称为矩阵的元素，简称元. a_{ij} 表示矩阵第 i 行第 j 列的元. 矩阵常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示. 把 m 行 n 列矩阵记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{mn}$.

显然，矩阵和行列式是两个完全不同的概念.

二、特殊矩阵

元都是实数的矩阵称为实矩阵，元中含有复数的矩阵称为复矩阵，本书中的矩阵都是实矩阵.

当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，记作 $\boldsymbol{A}_{nn}$ 或 $\boldsymbol{A}_n$，一阶方阵就看作一个数.

元都是 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{mn}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

仅有一行的矩阵称为行矩阵. 仅有一列的矩阵称为列矩阵.

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{mn}$ 的对应元都相等，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

方阵中从左上角到右下角的元素所在直线称为主对角线，主对角线的一侧所有元都为零的方阵称为三角形矩阵，三角形矩阵分为上三角形矩阵和下三角形矩阵.

主对角线以外的元全为零的方阵称为对角矩阵. 对角线上的元都为 1 的对角阵称为单位矩阵，简称单位阵，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$.

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元总有 $a_{ij}=a_{ji}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，即对称矩阵的元以主对角线为对称轴对应相等，如

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

为对称矩阵.

第二节　矩阵的运算

一、矩阵的加法与数乘矩阵

1. 矩阵的加法

定义 2　设有两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{mn}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

由定义 2 可知，只有两个同型矩阵才能够相加.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$，则 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，$-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.

由矩阵加法及负矩阵，可以定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

矩阵加法满足下列运算律（设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵）：

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

2. 数乘矩阵

定义 3　以数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元所得到的矩阵，称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积，记作 $k\boldsymbol{A}$. 即

$$k\boldsymbol{A}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵满足下列运算律（设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵）：

（1）$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

（2）$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

（3）$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$.

例 1　设 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$. 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

解　由 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}$ 得

$$X=\frac{1}{3}(B-2A)=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}8&2&6\\5&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-4&0\\8&6&10\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&6&6\\-3&-3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}.$$

二、矩阵与矩阵的乘法

定义 4　设 $A=(a_{ij})_{ms}$，$B=(b_{ij})_{sn}$，规定矩阵 A 与 B 的乘积为矩阵 $C=(c_{ij})_{mn}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

由定义 4 可知，只有 A 的列数等于 B 的行数时，AB 才有意义，并且 AB 是 $m\times n$ 矩阵，而乘积 AB 的第 i 行第 j 列元是矩阵 A 的第 i 行各元分别与矩阵 B 的第 j 列各对应元的乘积之和.

例 2　(1)已知 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-4&0\\3&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}7&-9\\-8&10\end{pmatrix}$，求 AB；

(2)已知 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，求 AB 与 BA；

(3)已知 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，求 AB 与 BA.

解　(1)

$$AB=\begin{pmatrix}2&-1\\-4&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-9\\-8&10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times7+(-1)\times(-8)&2\times(-9)+(-1)\times10\\(-4)\times7+0\times(-8)&(-4)\times(-9)+0\times10\\3\times7+1\times(-8)&3\times(-9)+1\times10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&-28\\-28&36\\13&-17\end{pmatrix}.$$

(2)

$$AB=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{BA}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n).$$

(3)

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

例 2 表明：一般地，矩阵乘法不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 因此，矩阵相乘时，有左乘与右乘之分. 特别值得注意的是：$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，即两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵. 由此还说明，若 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 或 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$，当 $C\neq\boldsymbol{O}$ 时，不能推出 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，即一般不能在等式两端都消去矩阵 $\boldsymbol{C}$. 也就是说矩阵乘法不适合消去律.

矩阵乘法满足以下运算律（假设运算都是可行的）：

(1)结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，

$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$　（λ 为常数）；

(2)分配律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

对于单位阵 $\boldsymbol{E}$，容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{mn}=\boldsymbol{A}_{mn}, \quad \boldsymbol{A}_{mn}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{mn}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 是同阶方阵，则有

$$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}.$$

由此可见，在矩阵乘法中，单位阵 $\boldsymbol{E}$ 起着类似于数 1 的作用.

由于矩阵乘法满足结合律，所以可以定义方阵的乘幂. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，记作 $\boldsymbol{A}^k$，即

$$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}.$$

显然，只有方阵才有 k 次幂，且满足以下运算律：

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}, \quad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl} \quad (k, l \text{ 为整数}).$$

值得注意的是，当 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵时

$$(\boldsymbol{AB})^k=\underbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}_{k\text{个}},$$

而

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}\underbrace{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\cdots\boldsymbol{B}}_{k\text{个}},$$

这两个等式的右端只有当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$（称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换）时才相等．因此，对方阵的幂来说，一般地，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

矩阵的乘法有着广泛的应用，许多复杂的问题借助于矩阵乘法可以表达得很简便，例如对于线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},$$

则线性方程组可用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.$$

三、矩阵的转置

定义 5　将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与列依次互换，得到的 $n\times m$ 矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\ a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

转置矩阵具有如下性质：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

四、方阵的行列式

定义 6　由方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元按原来次序所构成的行列式，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式．记作 $|\boldsymbol{A}|$.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，λ 为常数，则方阵的行列式具有如下运算规律：

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$;

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$($n$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶);

(3) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

情形(3)还可以推广到多个 n 阶方阵相乘的情形. 如果 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, …, $\boldsymbol{A}_k$ 都是 n 阶方阵, 则

$$|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_k|.$$

例 3 由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 各个元的代数余子式 A_{ij} 所构成的方阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 试证

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

证 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(b_{ij})_{nn}$, 则根据代数余子式的性质, 有

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij},$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(|\boldsymbol{A}|\delta_{ij})_{nn}=|\boldsymbol{A}|(\delta_{ij})_{nn}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

类似地, 可证

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

习题 2_2

1. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

2. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

3．计算：

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,0)+\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{10}$；

(3) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

4．设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},$$

求$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

5．已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\3&0&1\end{pmatrix},$$

求：(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$；(2) $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$；(3) 比较(1)与(2)的结果，可得出什么结论？

6．已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&1&2\\2&1&0\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$.

第三节　矩阵的初等变换

一、矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是矩阵的一种十分有用的运算，它在解线性方程组、求逆矩阵及矩阵理论的探讨中都有十分重要的作用.

定义 7　下列三种变换，称为矩阵的初等行变换：

(1)交换两行(交换 i，j 两行，记作 $\mathrm{r}_i\leftrightarrow\mathrm{r}_j$)；

(2)以数 $\lambda\neq0$ 乘某一行中的所有元(λ 乘第 i 行，记作 $\mathrm{r}_i\times\lambda$)；

(3)把某一行的所有元的 λ 倍加到另一行的对应元上(第 j 行的 λ 倍加到第 i 行上，记作 $r_i+\lambda r_j$).

把定义中的行换成列，即得到矩阵的初等列变换.

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称初等变换.

显然，三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类的初等变换：变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身；变换 $r_i\times\lambda$ 的逆变换就是 $r_i\times(1/\lambda)$(或记作 $r_i\div\lambda$)；变换 $r_i+\lambda r_j$ 的逆变换为 $r_i+(-\lambda)r_j$(或记作 $r_i-\lambda r_j$). 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记作 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价 ，记作 $\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

(1)反身性　$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；

(2)对称性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$；

(3)传递性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

二、行阶梯形矩阵

定义 8　满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵：

(1)矩阵的零行(元素全为 0 的行)全在矩阵的下方；

(2)非零行的首非零元的列标随着行标的递增而严格增大.

利用初等行变换可以把矩阵化为行阶梯形.

例 4　将下面的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\1&2&3&-1&4\\2&3&-1&-1&-6\end{pmatrix}.$$

解

$$\boldsymbol{A}\overset{\substack{r_3-r_1\\r_4-2r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\0&1&1&-4&3\\0&1&-5&-7&-8\end{pmatrix}\underset{\substack{r_4-r_2\\r_4\leftrightarrow r_3}}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\0&0&-6&-3&-9\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

如果行阶梯形矩阵还满足下列两个条件，则称为行最简阶梯形矩阵：

(1)各非零行的首非零元都是 1；

(2)每个首非零元所在列的其余元都是零.

利用初等行变换可以把行阶梯形矩阵化为行最简阶梯形矩阵.

例 5　将下面的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1&0\\1&1&-2&3&2\\3&-1&8&1&2\\1&3&-9&7&8\end{pmatrix}$$

解

$$\boldsymbol{A}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-3r_1\\r_4-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1&0\\0&2&-7&4&2\\0&2&-7&4&2\\0&4&-14&8&8\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\r_4-2r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1&0\\0&2&-7&4&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1&0\\0&2&-7&4&2\\0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{\frac{1}{2}r_2\\\frac{1}{4}r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1&0\\0&1&-\frac{7}{2}&2&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&5&-1&0\\0&1&-\frac{7}{2}&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1&0\\0&1&-\frac{7}{2}&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

三、初等矩阵

定义 9　由单位阵 E 经一次初等变换所得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应三种初等矩阵.

(1) **对调两行或对调两列.**

把单位阵 E 中第 i，j 两行对调($r_i\leftrightarrow r_j$)**得到初等矩阵**

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&0&\cdots&\cdots&\cdots&1&&\\&&\vdots&1&&&\vdots&&\\&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&\\&&\vdots&&&1&\vdots&&\\&&1&\cdots&\cdots&\cdots&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\text{第 } i\text{ 行}\\\\\\\\\text{第 } j\text{ 行}\\\\\\\end{array}.$$

用 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_m(i,j)$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$\boldsymbol{E}_m(i,\ j)\boldsymbol{A}=\begin{array}{l} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array},$$

相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行对调($\mathrm{r}_i\leftrightarrow\mathrm{r}_j$)，即对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以第一种初等行变换. 与此相类似，用 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{E}_n(i,\ j)$右乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列和第 j 列对调($\mathrm{c}_i\leftrightarrow\mathrm{c}_j$)，即对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以第一种初等列变换.

(2)以数 $\lambda\neq 0$ 乘某行或某列.

以数 $\lambda\neq 0$ 乘单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行($\mathrm{r}_i\times\lambda$)，得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i(\lambda))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\text{第 } i \text{ 行}.$$

与上面的情形相类似，以 $\boldsymbol{E}_m(i(\lambda))$左乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，相当于以数 λ 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行($\mathrm{r}_i\times\lambda$). 以 $\boldsymbol{E}_n(i(\lambda))$右乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，相当于以数 λ 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列($\mathrm{c}_i\times\lambda$).

(3)以数 λ 乘某行(列)加到另一行(列)上.

以数 λ 乘单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行加到第 i 行上($\mathrm{r}_i+\lambda\mathrm{r}_j$)或以数 λ 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 列加到第 i 列上($\mathrm{c}_i+\lambda\mathrm{c}_j$)，得初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,\ j(\lambda))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

可以验证，以 $\boldsymbol{E}_m(i,\ j(\lambda))$左乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换 $\mathrm{r}_i+\lambda\mathrm{r}_j$；以 $\boldsymbol{E}_n(i,\ j(\lambda))$右乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作初等列变换 $\mathrm{c}_j+\lambda\mathrm{c}_i$.

由上面的讨论我们得出以下结论：设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等列变

换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵. 例如，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是三阶初等矩阵，根据上面的结论，初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 的第二、第三行，因此不用计算便知

$$\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

习题 2_3

1. 利用初等行变换，将下列矩阵化成行阶梯形矩阵和行最简阶梯形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 解矩阵方程. 设

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

3. 计算

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

4. 计算

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第四节　矩阵的秩

一、矩阵秩的概念

定义 10　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，从 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行 k 列（$k\leqslant\min(m,n)$），位于这些行和列的相交处的元，按照它们原来的相对位置所构成的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一、第三两行，第二、第四两列相交处的元所构成的二阶子式为 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵. 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时，它的任何子式都为零；当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，它至少有一个元不为零，即它至少有一个一阶子式不为零. 这时再考虑二阶子式，如果 $\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式不为零，则往下考虑三阶子式，依此类推. 最后必达到 $\boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不为零，而再没有比 r 更高阶的不为零的子式. 这个不为零的子式的最高阶数 r，反映了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 内在的重要特性，在矩阵的理论及应用中都有重要意义. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq0$，但它的任何三阶子式皆为零，即不为零的子式的最高阶数 $r=2$.

定义 11　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 中不为零的子式的最高阶数为 r，即存在 r 阶子式不为零，而任何 $r+1$ 阶子式皆为零，则称 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})=r$. 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时，规定 $R(\boldsymbol{A})=0$.

上例中，$R(\boldsymbol{A})=2$. 显然 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，$0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant\min(m, n)$.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵或非奇异矩阵. 否则称为降秩矩阵或奇异矩阵.

二、矩阵秩的求法

定理 1 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

例 6 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&-1\\3&-1&0&4\\1&4&5&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&-1\\3&-1&0&4\\1&4&5&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-3r_1\\r_4-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&-2\\0&-1&0&1\\0&4&5&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-1)r_3\\r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&2&0&-2\\0&4&5&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-2r_2\\r_4-4r_2\\r_3\leftrightarrow r_4}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&5&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_1,$$

由定理 1，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}_1)$，而 $R(\boldsymbol{A}_1)=3$（行阶梯形矩阵的秩等于其非零行数），故 $R(\boldsymbol{A})=3$.

例 7 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1\\r_4-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\r_4-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此 $R(\boldsymbol{A})=2$.

习题 2_4

1. 求下列矩阵的秩，并求它的一个最高阶非零子式：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & -1 & 2 \\ 5 & 3 & \mu & 6 \end{pmatrix},$$

若 $R(\boldsymbol{A})=2$，求 λ 和 μ 的值.

第五节　逆矩阵

逆矩阵在矩阵理论和应用中都起着重要的作用.

定义 12　对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果有一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 称为可逆矩阵(或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆)，$\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，简称逆阵，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

由定义 12 可知：

(1)可逆矩阵必为方阵，并且它的逆矩阵一定是同阶方阵；

(2)如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{B}$ 也是可逆矩阵，并且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 互为逆阵，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$；

(3)如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，那么它的逆阵是唯一的.

事实上，如果 $\boldsymbol{A}$ 有两个逆阵 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$，根据定义 12，有

$$\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

于是

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{AB}_2)=(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{EB}_2=\boldsymbol{B}_2.$$

定理 2　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$可逆的充分必要条件是$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 $|A|$ 中元 a_{ij} 的代数余子式.

证　必要性.

设 A 可逆，由 $AA^{-1}=E$ 得 $|AA^{-1}|=|E|$，于是 $|A||A^{-1}|=1$. 即若 A 为可逆矩阵，则 $|A|\neq 0$.

充分性.

利用例 3 的结论，有

$$AA^{*}=A^{*}A=|A|E.$$

当 $|A|\neq 0$ 时，有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)A=E.$$

由逆阵定义知 A 可逆，并且有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

例 8　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解　因为

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以 A 可逆.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-5,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & -5\end{vmatrix}=10,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=7,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -5\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & -5\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

于是得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 10 & -2 & 2\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 5 & -1 & 1\\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

推论 1　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，并且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$.

用本推论去判断一个矩阵是否可逆，比直接用定义去判断要节省一半的计算量. 另外，利用本推论可以方便地得到逆阵的一些运算规律. 例如：

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(2) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(5) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

总结上面的讨论可得：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，且都可逆，数 $\lambda\neq0$，则有下列逆阵的运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$；

(2) $\lambda\boldsymbol{A}$ 也可逆，且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(3) $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

例 9　用逆矩阵解线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

解　令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix},$$

得矩阵方程为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时，用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘方程的两端，得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b},$$

即

$$Ex=A^{-1}b,$$

从而

$$x=A^{-1}b.$$

这就是方程的解.

值得注意的是：用逆阵求解线性方程组，只适合方程的个数和未知量的个数相等并且$|A|\neq 0$(系数矩阵的行列式不等于零)的情形，此时线性方程组有唯一解.

例 10　用逆阵解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-7, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-8, \\ x_1+3x_2=7. \end{cases}$$

解　将线性方程组改写成矩阵方程，设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix},$$

则

$$Ax=b.$$

因为

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=19\neq 0,$$

所以 A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -6 & 9 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

因为

$$x=A^{-1}b,$$

所以

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -6 & 9 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=-4. \end{cases}$$

例 11 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}-3 & 2\\5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\3 & -1\end{pmatrix}.$$

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\5 & -3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\3 & -1\end{pmatrix}.$$

上述矩阵方程可表示为 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$. 由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0,\ |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}-3 & 2\\5 & -3\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

故 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在. 分别用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 左乘、右乘 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的两端，得

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AXB})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1},$$
$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{BB}^{-1})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1},$$
$$\boldsymbol{EXE}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1},\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}.$$

因为
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\5 & 3\end{pmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 13\\-34 & -18\end{pmatrix}.$$

运用定理 2 求逆矩阵的方法适合阶数较低的方阵，求阶数较高方阵的逆矩阵应使用初等变换的方法.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_l$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$.

定理 3 表明：可逆矩阵的标准形是单位阵. 其实可逆矩阵的行最简阶梯形矩阵也是单位阵，因此，我们有如下推论.

推论 2 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$.

证 先证必要性. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由定理 3 有初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_l$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{E}.$$

此式表明：$\boldsymbol{E}$ 经 l 次初等行变换可化为 $\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$.

再证充分性. 设 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$，即有有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，…，$\boldsymbol{P}_l$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{E}$. 因为初等矩阵可逆，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

下面介绍利用初等变换求逆矩阵的方法.

如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，根据定理 3，存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_l$，使得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$. 那么有

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{A},$$

即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{A},\tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{E}.\tag{3}$$

式(2)表示对 A 的行施以若干次初等行变换化为 E，式(3)表示对 E 的行施以同样的初等行变换化为 A^{-1}，于是可以得到一个求逆矩阵的方法：

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}).$$

例 12　求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&-2&3&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&3&-1&0&0&1\end{array}\right)\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&0&1&0\\2&-2&3&1&0&0\\1&3&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{}{\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&0&1&0\\0&-4&1&1&-2&0\\0&2&-2&0&-1&1\end{array}\right)\overset{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\r_3+2r_2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&0&1&0\\0&2&-2&0&-1&1\\0&0&-3&1&-4&2\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\left(\frac{1}{2}\right)r_2\\\left(-\frac{1}{3}\right)r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&-1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{r_1-r_3\\r_2+r_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{5}{6}&-\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

$$\overset{r_1-r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{7}{6}&\frac{5}{6}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{5}{6}&-\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\end{array}\right),$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{7}{6}&\frac{5}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{5}{6}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

对于给定的方阵 $\boldsymbol{A}$，判断其是否为可逆矩阵的方法有：(1)如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，否则方阵 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆矩阵；(2)对方阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换，如果 $\boldsymbol{A}$ 能化成单位矩阵，则方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，否则方阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

习题 2_5

1. 解下列矩阵方程，求出未知矩阵 $\boldsymbol{X}$：

(1) $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\4&3&2\\1&2&5\end{pmatrix}$；

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$.

2. 判断下列方阵是否可逆，如果可逆，求其逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}(ad-bc\neq 0)$；　(2) $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. **用逆阵解下列线性方程组**：

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

第二章习题参考答案

习题 2_2

1. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -11 & 0 & 5 & 5 \\ -10 & 15 & -6 & 1 \\ 10 & -4 & 19 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

3. (1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$；

(3) $(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 +$
$(a_{13}+a_{31})x_1x_3 + (a_{23}+a_{32})x_2x_3)$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$.

5. (1) $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　(3)**结果不一致**.

6. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ 4 & 4 & -5 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

习题 2_3

2. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

习题 2_4

1. (1) $R=4$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$;

(2) $R=3$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$;

(3) $R=3$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$;

(4) $R=3$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

2. $\lambda=5$, $\mu=1$.

习题 2_5

1. (1) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -9 & 7 & -4 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (1) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$；　(2) **不存在**；

(3) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (1) $(5, 0, 3)^T$；(2) $(1, 0, 0)^T$.

第三章　向量组的线性相关性

n 维向量和由 n 维向量组成的向量组是线性代数的基本内容之一. 本章在引入向量概念及其运算的基础上，讨论向量组的线性组合、线性相关性及向量组的秩等问题.

第一节　n 维向量及其运算

定义 1　由 n 个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为 n 维向量，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为向量的分量，常用黑体小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，…表示向量.

例如 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. n 维向量有时也写成一列的形式，例如

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

写成行形式的向量称为行向量，写成列形式的向量称为列向量. 如果将向量看作矩阵，n 维行向量可理解成 $1\times n$ 矩阵，n 维列向量可理解成 $n\times 1$ 矩阵，用矩阵的转置可将它们相互转化，即

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

我们还规定：

分量全为零的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$；

向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的各分量的相反数所构成的向量，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向

量，记作$-\boldsymbol{\alpha}$，即

$$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n);$$

两个向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，若$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称这两个向量相等，记作$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

定义 2　设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是两个$n$维向量，它们的对应分量的和所构成的向量

$$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

称为两向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的和，记作$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$

由向量的加法及负向量的定义，可定义向量的减法：

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n).$$

定义 3　数k与向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的乘积称为数$k$与向量$\boldsymbol{\alpha}$的乘积（或数乘），记作$k\boldsymbol{\alpha}$，即

$$k\boldsymbol{\alpha}=k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).$$

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算，它们满足如下运算规律（设$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$都是n维向量，k，l是实数）：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

(5) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

(6) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$；

(8) $1\times\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

根据向量的加法和数乘运算的定义，上述八条性质是不难证明的，这里只给出性质(1)的证明.

设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)=(b_1+a_1,b_2+a_2,\cdots,b_n+a_n)\\&=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}.$$

其他性质的证明留给读者作为练习.

例 1　已知向量$\boldsymbol{\alpha}=(7,2,0,-8)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,1,-4,3)$，求$2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}$.

解　$$\begin{aligned}2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}&=2(7,2,0,-8)+3(2,1,-4,3)\\&=(14,4,0,-16)+(6,3,-12,9)=(20,7,-12,-7).\end{aligned}$$

例 2　设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(5,-1,3,2,4)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,1,-2,2,1)$，且 $3\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=4\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{\gamma}$.

解　因为

$$3\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=4\boldsymbol{\beta},$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}&=-3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}=(-15,3,-9,-6,-12)+(12,4,-8,8,4)\\&=(-3,7,-17,2,-8).\end{aligned}$$

由于向量可以被看作矩阵，上述关于向量相等、向量的线性运算也可借助于矩阵的运算定义得出. 其运算规律与矩阵的运算规律一致.

习题 3_1

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,-3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,4)$. 求：
(1) $2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$；　　(2) $5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. 已知向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix},$$

求：(1) $2\boldsymbol{\alpha}_1-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$；　(2) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$.

3. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(4,5,-5,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)$. 如果

$$3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})-5(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},$$

求 $\boldsymbol{\alpha}$.

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(5,3,0,3)$，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,3,4,-1)$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$.

第二节　向量组的线性相关性

一、向量的线性组合

例 3　对于线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=2,\\2x_1+3x_2-4x_3=-6,\\-x_1-2x_2+x_3=3,\end{cases}$$

若设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix},$$

则线性方程组可写成向量方程的形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}.$$

因为

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&-2\\2&3&-4\\-1&-2&1\end{vmatrix}=-5\neq0,$$

由克莱姆法则，可求出线性方程组的解为 $x_1=2$，$x_2=-2$，$x_3=1$，所以

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

我们称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 一般地，有如下定义.

定义 4　设 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 都是 n 维向量，若存在 m 个数 k_1，k_2，…，k_m，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，也称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

显然，零向量是任何向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合，或者说零向量可由任何向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

例 4　设向量组

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},$$

试判断 $\boldsymbol{\beta}$ 是否是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

解　设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

由向量的线性运算和相等的定义，得线性方程组

$$\begin{cases}3k_1+k_2+2k_3=2,\\k_1+2k_2+3k_3=0,\\2k_1+3k_2+k_3=4.\end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{vmatrix}=-18\neq0,$$

所以，由克莱姆法则，得方程组的解为

$$k_1=1,\ k_2=1,\ k_3=-1,$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

例 5 已知向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ -2),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-2,\ 4),\ \boldsymbol{\beta}=(1,\ -4),$$

试问向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示？

解 设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，即

$$(1,\ -4)=k_1(1,\ -2)+k_2(-2,\ 4),$$

得线性方程组

$$\begin{cases} k_1-2k_2=1, \\ -2k_1+4k_2=-4. \end{cases}$$

由第二个方程得 $k_1-2k_2=2$，与第一个方程矛盾，所以方程组无解，因而向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

例 6 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

试问 $\boldsymbol{\beta}$ 是否能用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

解 设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

得线性方程组

$$\begin{cases} 2k_1+k_2+3k_3=2, \\ 3k_1+2k_2+2k_3=1, \\ k_1+k_2-k_3=-1. \end{cases}$$

由于第一个方程加第三个方程正好等于第二个方程，所以第二个方程是多余的. 去掉第二个方程，得同解方程组

$$\begin{cases} 2k_1+k_2+3k_3=2, \\ k_1+k_2-k_3=-1. \end{cases}$$

将 k_3 移到方程的右边，得

$$\begin{cases} 2k_1+k_2=2-3k_3, \\ k_1+k_2=-1+k_3. \end{cases}$$

令 $k_3=0$，求出 $k_1=3$，$k_2=-4$. 故方程组的一个解为

$$k_1=3,\ k_2=-4,\ k_3=0,$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_2.$$

由于 k_3 可任意取值，从而方程组有无穷多解，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的方式也有无穷多种.

二、向量组的线性相关性

定义 5　设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_m，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

否则，若仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，上式才成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

由定义 5 可得出以下结论：

(1) 只由一个非零向量构成的向量组必线性无关；

(2) 只由一个零向量构成的向量组必线性相关；

(3) 含有零向量的任一向量组必线性相关；

(4) 若一向量组线性无关，则它的任何一部分向量所构成的向量组也线性无关；

(5) 若一向量组线性相关，则增加一些向量后所构成的向量组也线性相关.

例 7　判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2)$$

的线性相关性.

解　设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，即

$$k_1(2,1,0)+k_2(1,2,1)+k_3(0,1,2)=(0,0,0),$$

得线性方程组

$$\begin{cases}2k_1+k_2=0,\\ k_1+2k_2+k_3=0,\\ k_2+2k_3=0.\end{cases}$$

因为方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=4\neq 0,$$

所以方程组只有零解，即

$$k_1=k_2=k_3=0,$$

因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 8 讨论向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,-3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1)$$

的线性相关性.

解 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，即

$$k_1(1,2,-1)+k_2(2,-3,1)+k_3(4,1,-1)=(0,0,0),$$

得线性方程组

$$\begin{cases} k_1+2k_2+4k_3=0, \\ 2k_1-3k_2+k_3=0, \\ -k_1+k_2-k_3=0. \end{cases}$$

因为方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

所以方程组有非零解，即 k_1，k_2，k_3 不全为零，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

一般地，判别向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性相关性，都可通过相应的齐次线性方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$是否有非零解来判断. 若有非零解，则向量组线性相关；若只有零解，则向量组线性无关.

例 9 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，求证 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$ 也线性无关.

证 设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})+k_3(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})=\mathbf{0}$，则

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}+(k_1+k_2)\boldsymbol{\beta}+(k_2+k_3)\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，于是

$$\begin{cases} k_1+k_3=0, \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0. \end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以 $k_1=k_2=k_3=0$，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关.

定理 1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$线性相关的充分必要条件是其中存在一个向量可以由其余向量线性表示.

证 必要性：因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，所以存在不全为零的数 k_1，

k_2，…，k_m，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

不妨设 $k_1\neq 0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-\frac{k_m}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

充分性：设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m.$$

于是

$$1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1-l_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_3\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

而 1，$-l_2$，…，$-l_m$ 已经有一个数 1 不是零，根据定义，$\boldsymbol{\alpha}_1$，，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

定理 2　若向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

线性无关，则在每一个向量上添加一个分量所得到的 $n+1$ 维向量组

$$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},a_{i\,n+1})\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

也线性无关.

这个结论可以推广到添加 n 个分量的情形.

三、向量组线性相关性的矩阵判别法

对于 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

我们可以得到 m 个行向量

$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$，…，

$\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$，

称其为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组.

同时也可得到 n 个列向量

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},$$

称其为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组.

反之，任何行向量组可以构成一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，并以此向量组作为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量

组；任何列向量组可以构成一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，并以此向量组作为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组.

关于向量组线性相关性的判别有如下定理.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r$.

(1) 若 $r<m$（或 $r<n$），则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组（或列向量组）线性相关.

(2) 若 $r=m$（或 $r=n$），则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组（或列向量组）线性无关.

根据定理 3，我们可得判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的方法和步骤如下：

(1) 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵，求出 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r$；

(3) 应用定理 3，判别向量组的线性相关性.

例 10 判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,0,2),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,3,0)$$

的线性相关性.

解 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 作矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&2&0&2\\0&0&3&0\end{pmatrix}.$$

显然 $\boldsymbol{A}$ 已是一个行阶梯形矩阵，$R(\boldsymbol{A})=3$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 11 判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\\4\end{pmatrix}$$

的线性相关性.

解 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 作矩阵 $\boldsymbol{A}$，并对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&-1&3\\0&2&-4\\2&-1&4\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3\\3&1&1\\0&2&-4\\2&-1&4\end{pmatrix}\underset{r_4+(-2)r_1}{\overset{r_2+(-3)r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&4&-8\\0&2&-4\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&2&-4\\0&4&-8\end{pmatrix}\underset{r_4+(-4)r_2}{\overset{r_3+(-2)r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以，$R(\boldsymbol{A})=2$，于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

习题 3_2

1．判断向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示：

(1) $\boldsymbol{\beta}=(-3, 3, 7)$，　$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, -1, 2)$，
　$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 1, 0)$，　$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 2, 1)$；

(2) $\boldsymbol{\beta}=(0, 10, 8)$，　$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1, 2, 3)$，
　$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 3, 2)$，　$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 8, 7)$；

(3) $\boldsymbol{\beta}=(2, 0, 2)$　$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1)$，
　$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 1, -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, -1, 1)$.

2．已知向量

$$\boldsymbol{\beta}=(1, m, 5),\ \boldsymbol{\alpha}_1=(1, -3, 2),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2, -1, 1).$$

问 m 取何值时，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可用向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示？并求出表示式.

3．用定义判别下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 2, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 6, 3)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, -4, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 14, 7)$.

4．利用矩阵的初等变换，判别向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(3, 1, 0, 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, -1, 2, -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 3, -4, 4)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, -1, 0, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 1, 3, 1, 1)$，
　$\boldsymbol{\alpha}_3=(2, 2, 0, 0, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0, 0, 1, 1, 1)$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 3, 1, 2, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3, 2, 1, 3, 2, 1)$，
　$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 1, 1, 1, 1, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

5．若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，试证：$2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.

第三节　向量组的秩

定义 6　设 T 是 n 维向量所组成的向量组，若在 T 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 满足：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，

(2) 对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in T$，$\boldsymbol{\alpha}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 T 的一个最大线性无关组，简称最大无关组.

例 12　求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1, 3, 3),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 2),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 2, 2)$$

的一个最大无关组.

解　由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 作矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&3&3\\0&1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}\overset{r_3-r_1}{\sim}\begin{pmatrix}-1&3&3\\0&1&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}-1&3&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=3$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

又因为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 均可用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个最大无关组.

例 13　求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,3,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2,0),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,1,1)$$

的一个最大无关组.

解　由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 作矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&3&3&1\\0&1&2&0\\-1&2&1&1\end{pmatrix}\overset{r_3-r_1}{\sim}\begin{pmatrix}-1&3&3&1\\0&1&2&0\\0&-1&-2&0\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}-1&3&3&1\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2<3$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，易知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且

$\boldsymbol{\alpha}_1=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组的一个最大无关组.

从例 13 中我们还可得出 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是向量组的最大无关组，即最大无关组不是唯一的. 但我们可以看到，各最大无关组中所含向量的个数相同，一般地，有如下结论.

定理 4　向量组的任意两个最大无关组所含向量的个数相同.

定义 7　向量组中最大无关组所含向量的个数称为向量组的秩.

例如，例 12 中，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个最大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，所以向量组的秩为 3. 再如，例 13 中，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个最大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，所以向量组的秩为 2.

下面讨论如何求向量组的秩及它的一个最大无关组.

定理 5　矩阵的秩等于其列向量组的秩，也等于其行向量组的秩.

根据定理 5，可得到求向量组的秩及一个最大无关组的方法和步骤如下.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 n 维行向量组，则由列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 作 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$；若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 n 维列向量组，直接由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 作 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$.

（2）将矩阵 A 通过若干次初等行变换，化为行阶梯形矩阵 B，求出矩阵 A 的秩 $R(A)$，从而得到向量组的秩也为 $R(A)$.

（3）行阶梯形矩阵 B 的非零行的首非零元所在列的列数所对应的矩阵 A 的这些列向量就是一个最大无关组.

例 14　求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 3, -1),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(3, 2, 1, -1),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(4, 4, 4, -2),\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(2, 0, -2, 0),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_5=(2, 3, 1, 1)$$

的秩及它的一个最大无关组.

解　依次以各向量为列作 4×5 矩阵 $\boldsymbol{A}$，并对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&4&2&2\\2&2&4&0&3\\3&1&4&-2&1\\-1&-1&-2&0&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2+(-2)r_1\\r_3+(-3)r_1\\r_4+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&4&2&2\\0&-4&-4&-4&-1\\0&-8&-8&-8&-5\\0&2&2&2&3\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&4&2&2\\0&2&2&2&3\\0&-8&-8&-8&-5\\0&-4&-4&-4&-1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+4r_2\\r_4+2r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&4&2&2\\0&2&2&2&3\\0&0&0&0&7\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{7}r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&4&2&2\\0&2&2&2&3\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}\overset{r_4+(-5)r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&4&2&2\\0&2&2&2&3\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=3$，即向量组的秩是 3，因而最大无关组中有三个向量. 由于第一、第二、第三非零行的首非零元所在的列数分别为第一、第二、第五列，于是矩阵 A 的第一、第二、第五列的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 就是向量组的一个最大无关组.

习题 3_3

1. 求下列向量组的秩及一个最大无关组：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 2, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 0, 3)$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\2\\6\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\\1\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 4, 1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 1, -1, -3)$，

$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 0, 0, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1, 0, 3, -1)$；

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, -2, -1, -2, 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4, 1, 2, 1, 3)$，

$\boldsymbol{\alpha}_3=(2, 5, 4, -1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\left(1, 1, 1, 1, \frac{1}{3}\right)$.

2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, \lambda+1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, \lambda, 2\lambda+1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2-\lambda, 4-2\lambda, 0)$的秩为 3，求 λ.

第三章习题参考答案

习题 3_1

1. (1) $(0, -23, -9)$；(2) $(8, 23, -7)$.

2. (1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 11 \\ -13 \\ 12 \end{pmatrix}$.

3. $(-3, -3, 0, -6)$.

4. $\boldsymbol{\alpha}=(3, 3, 2, 1)$，$\boldsymbol{\beta}=(-2, 0, 2, -2)$.

习题 3_2

1. (1) $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$；(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

   (3) $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. $m=-8$；$\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

3. (1)线性无关；(2)线性相关.

4. (1)线性相关；(2)线性无关；(3)线性相关.

习题 3_3

1. (1) 秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$；(2)秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$；

   (3) 秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$；(4) 秩为 4，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$.

2. $\lambda\neq-1$ 且 $\lambda\neq2$.

第四章　线性方程组

本章运用向量和矩阵的知识，讨论线性方程组在什么情况下有解，并给出求解的一般方法，即用矩阵的初等行变换解线性方程组的方法．研究解的结构，即用向量组线性相关性的理论来讨论线性方程组的解．

第一节　齐次线性方程组

对于 n 元齐次线性方程组

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

则方程组(1)可改写成矩阵形式

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}. \tag{2}$$

其中，称 $\boldsymbol{A}$ 为齐次线性方程组(1)的系数矩阵，称 $\boldsymbol{x}$ 为未知向量．若 $x_1=\xi_{11}$，$x_2=\xi_{21}$，…，$x_n=\xi_{n1}$ 为(1)的解，则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组(1)的解向量，它也就是向量方程(2)的解．

定理 1　n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})<n$.

证　先证必要性．

设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，要证 $R(\boldsymbol{A})<n$，用反证法．设

$R(\boldsymbol{A})=n$，则在 $\boldsymbol{A}$ 中应有一个 n 阶非零子式 D_n，从而 D_n 所对应的 n 个方程只有零解(根据克莱姆法则)，这与原方程组有非零解相矛盾，因此 $R(\boldsymbol{A})=n$ 不能成立，即 $R(\boldsymbol{A})<n$.

再证充分性.

设 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，则 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵只含 r 个非零行，从而知其有 $n-r$ 个自由未知量. 任取一个自由未知量为 1，其余自由未知量为 0，即可得方程组的一个非零解. 证毕.

齐次线性方程组(1)的解向量具有如下两条性质.

性质 1 若 ξ_1，ξ_2 是 n 元齐次线性方程组(1)的两个解向量，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是 n 元齐次线性方程组(1)的解向量.

证 将 $\xi_1+\xi_2$ 代入 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，因为

$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\xi_1+\xi_2$ 也是齐次线性方程组(1)的解向量. 证毕.

性质 2 若 ξ 是 n 元齐次线性方程组(1)的解向量，c 为任意实数，则 $c\xi$ 也是 n 元齐次线性方程组(1)的解向量.

证 因为 $\boldsymbol{A}(c\xi)=c(\boldsymbol{A}\xi)=c\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，所以 $c\xi$ 是齐次线性方程组(1)的解向量. 证毕.

推论 若 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 是 n 元齐次线性方程组(1)的 s 个解向量，则它们的任一线性组合 $c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_s\xi_s$($c_1$，$c_2$，…，$c_s$ 为任意实数)也是 n 元齐次线性方程组(1)的解向量.

定义 若 n 元齐次线性方程组(1)的一组解向量 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 满足下列条件：

(1) ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 线性无关；

(2) 方程组(1)的任一解向量都可由 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 线性表示.

我们就称 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 是齐次线性方程组(1)的一个基础解系.

根据定义，若齐次线性方程组(1)只有零解向量，则齐次线性方程组(1)不存在基础解系；若齐次线性方程组(1)有非零解向量，则齐次线性方程组(1)所有的解向量为无穷多个解向量；若把这无穷多个解向量看成一个向量组，则基础解系就是它的一个最大线性无关组. 于是，只要找出齐次线性方程组(1)的基础解系，齐次线性方程组(1)的全部解向量就能由基础解系的线性组合表示出来.

设 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 为齐次线性方程组(1)的一个基础解系，则其解可表示为

$$\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_s\xi_s \quad (c_1，c_2，\cdots，c_s \text{ 为任意实数})，$$

上式称为齐次线性方程组(1)的通解.

定理 2 若 n 元齐次线性方程组(1)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，则 n 元齐次线性方程组(1)的基础解系存在，并且基础解系含有 $n-r$ 个解向量.

证　因为 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个列向量线性无关，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

于是齐次线性方程组(1)的同解方程组为

$$\left.\begin{aligned}x_1&=-c_{1,r+1}x_{r+1}-c_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{1n}x_n,\\ x_2&=-c_{2,r+1}x_{r+1}-c_{2,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{2n}x_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r&=-c_{r,r+1}x_{r+1}-c_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{rn}x_n,\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中 x_{r+1}，x_{r+2}，…，x_n 为自由未知量，任给$(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n)$一组值，代入(3)就可以确定齐次线性方程组(1)的一个解向量.

将(3)补齐未知量，改写成

$$\begin{cases}x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-c_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{1n}x_n,\\ x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-c_{2,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{2n}x_n,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-c_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-c_{rn}x_n,\\ x_{r+1}=x_{r+1},\\ x_{r+2}=x_{r+2},\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=x_n,\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\\ x_{r+1}\\ x_{r+2}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x_{r+1}\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\ \vdots\\ -c_{r,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+x_{r+2}\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\ \vdots\\ -c_{r,r+2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}-c_{1n}\\ \vdots\\ -c_{rn}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

记

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\\ x_{r+1}\\ x_{r+2}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\ \vdots\\ -c_{r,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\ \vdots\\ -c_{r,r+2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1n}\\ \vdots\\ -c_{rn}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

将自由未知量 x_{r+1}，x_{r+2}，…，x_n**分别用任意常数** c_1，c_2，…，c_{n-r}**代入得**

$$\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}. \tag{4}$$

下面证明 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}**是方程组**(1)**的一个基础解系.**

事实上，ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}**是齐次线性方程组**(1)**的一组解向量，由于** ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}**的后** $n-r$ **个分量构成的向量组线性无关，我们知道，若向量组** $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,s)$**线性无关，则在每一个向量上添加一个分量所得到的** $n+1$ **维向量组** $\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},a_{i,n+1})(i=1,2,\cdots,s)$**也线性无关，从而添加有限个分量也线性无关．由此可知，**ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}**线性无关．又由式**(4)**可知齐次线性方程组**(1)**的任一个解向量** ξ **都可由** ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}**线性表示，故** ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}**是齐次线性方程组**(1)**的一个基础解系．于是齐次线性方程组**(1)**的通解为**

$$\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中，c_1，c_2，…，c_{n-r}**为任意常数．证毕.**

例 1　求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0,\\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0,\\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$$

的基础解系与通解.

解　对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换变为行最简阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\underset{r_2\div(-3)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是得 $R(\boldsymbol{A})=2<4$**，所以所求齐次线性方程组有非零解，并得到与原方程组**

同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1-2x_3-\dfrac{5}{3}x_4=0, \\ x_2+2x_3+\dfrac{4}{3}x_4=0, \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} x_1=2x_3+\dfrac{5}{3}x_4, \\ x_2=-2x_3-\dfrac{4}{3}x_4. \end{cases} \quad (x_3,\ x_4\ \text{可任意取值})$$

令 $x_3=c_1$，$x_4=c_2$，将上面的方程补齐未知变量，得

$$\begin{cases} x_1= \quad 2c_1+\dfrac{5}{3}c_2, \\ x_2=-2c_1-\dfrac{4}{3}c_2, \\ x_3= \quad c_1, \\ x_4= \quad \quad c_2, \end{cases}$$

其中，c_1，c_2 为任意常数，或写成向量形式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1,\ c_2\in\mathbf{R}),$$

且得到两个$(n-R(\mathbf{A})=4-2=2)$线性无关的解

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 就是所求齐次线性方程组的基础解系. 所求齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中，$c_1$，$c_2$ 为任意常数. 若令 $x_3=c_1+c_2$，$x_4=c_1-c_2$，并补齐未知变量，得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{11}{3}c_1 + \dfrac{1}{3}c_2, \\ x_2 = -\dfrac{10}{3}c_1 - \dfrac{2}{3}c_2, \\ x_3 = c_1 + c_2, \\ x_4 = c_1 - c_2, \end{cases}$$

其中，c_1，c_2 为任意常数，或写成向量形式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \dfrac{11}{3} \\ -\dfrac{10}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}),$$

同样得到两个$(n-R(\boldsymbol{A})=4-2=2)$线性无关的解向量

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{3} \\ -\dfrac{10}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 也是所求齐次线性方程组的基础解系. $\boldsymbol{\eta}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）也是所求齐次线性方程组的通解.

例 1 说明，当一个给定的齐次线性方程组有解并且解不唯一时，其基础解系可以不同，因此通解的形式也会不同，但基础解系所含解向量的个数是相同的.

例 2 求 λ，使齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 0, \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，并求其通解.

解 首先计算系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1),$$

$D=\lambda^2(\lambda-1)=0$，也就是当 $\lambda=0$，1 时有非零解.

将 $\lambda=0$ 代入原方程组，得到一个齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=0,\\ \quad -x_2+x_3=0,\\ 3x_1\quad +3x_3=0.\end{cases}$$

对系数矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 施行初等行变换变为行最简阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&-1&1\\3&0&3\end{pmatrix}\overset{r_3-r_1}{\sim}\begin{pmatrix}3&1&2\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}3&1&2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}3&0&3\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2\div(-1)}{\overset{r_1\div 3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

可见 $R(\boldsymbol{A}_1)=2<3$，故所求齐次线性方程组有非零解．与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_3,\\ x_2=\ \ x_3.\end{cases}$$

令 $x_3=c$（c 为任意常数），将上面方程组补齐未知变量，得

$$\begin{cases}x_1=-x_3=-c,\\ x_2=\ \ x_3=\ \ c,\\ x_3=\ \ x_3=\ \ c,\end{cases}$$

其中，c 为任意常数，或写成向量形式：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbf{R}),$$

得到一个（$n-R(\boldsymbol{A}_1)=3-2=1$）**基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，所求齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{\xi}=c\boldsymbol{\xi}_1$（$c$ 为任意常数）．**

将 $\lambda=1$ 代入原方程组得

$$\begin{cases}4x_1+x_2+2x_3=0,\\ x_1\quad +x_3=0,\\ 6x_1+x_2+4x_3=0,\end{cases}$$

对系数矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 施行初等行变换变为行最简阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}4&1&2\\1&0&1\\6&1&4\end{pmatrix}\overset{r_3-r_1}{\sim}\begin{pmatrix}4&1&2\\1&0&1\\2&0&2\end{pmatrix}\overset{r_3-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}4&1&2\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\4&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_2-4r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A}_2)=2<3$，所以所求齐次线性方程组有非零解，并得到与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=\ \ 2x_3.\end{cases}$$

令 $x_3=c$，将上面方程组补齐未知变量，得

$$\begin{cases}x_1=-x_3=-c,\\x_2=\ \ 2x_3=2c,\\x_3=\quad x_3=c,\end{cases}$$

或写成向量形式：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbf{R}),$$

得到一个($n-R(\boldsymbol{A}_2)=3-2=1$)基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，所求齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{\eta}=c\boldsymbol{\eta}_1$($c$ 为任意常数).

例 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵. 试证：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

证 考查以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，可见 $\boldsymbol{B}$ 的每个列向量都是上述方程组的解，故 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩不能超过该方程的全体解向量组的秩. 依据定理 2 知，全体解向量组的秩为 $n-R(\boldsymbol{A})$，故有

$$R(\boldsymbol{B})\leqslant n-R(\boldsymbol{A}),$$

即

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

习题 4_1

1. 求下列齐次线性方程组的基础解系及通解：

(1) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+\ \ x_4=0,\\x_1-2x_2+x_3-\ \ x_4=0,\\x_1-2x_2+x_3+5x_4=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+x_3-x_4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+4x_2-3x_3+x_4=0, \\ 3x_1+6x_2+2x_3-5x_4=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0. \end{cases}$

2. **设**

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=0, \\ -3x_1+3x_2-(1+\lambda)x_3=0, \end{cases}$$

问 λ **为何值时，此齐次线性方程组有非零解？并在有非零解时，求其通解.**

3. **已知线性方程组**

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ ax_1+bx_2+cx_3=0, \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0. \end{cases}$$

(1) a，b，c **满足何种关系时，方程组仅有零解？**

(2) a，b，c **满足何种关系时，方程组有无穷多解？并用基础解系表示其通解.**

第二节　非齐次线性方程组

设有 n **元非齐次线性方程组**

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{array}\right\}\tag{5}$$

记
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

则非齐次线性方程组(5)可改写成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}.\tag{6}$$

其中，称 $\boldsymbol{A}$ 为非齐次线性方程组(5)的系数矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为增广矩阵，$\boldsymbol{x}$ 为未知变量. 若 $x_1=\xi_{11}$，$x_2=\xi_{21}$，…，$x_n=\xi_{n1}$ 为(5)的解，则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\xi_{11}\\\xi_{21}\\\vdots\\\xi_{n1}\end{pmatrix}$$

称为方程组(5)的解向量，它也就是向量方程(6)的解.

定理 3 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证 不妨设 $R(\boldsymbol{A})=r$，且 $\boldsymbol{A}$ 的左上角有一个 r 阶子式不为零，利用初等行变换化 $\boldsymbol{B}$ 为行阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{B}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&c_{1,r+1}&\cdots&c_{1n}&d_1\\0&1&\cdots&0&c_{2,r+1}&\cdots&c_{2n}&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&c_{r,r+1}&\cdots&c_{rn}&d_r\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&d_{r+1}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

对应的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n+\quad d_1, \\ x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n+\quad d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n+\quad d_r, \\ 0= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad d_{r+1}. \end{cases}$$

先用反证法证明必要性.

设 n 元非齐次线性方程组有解，而 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$，则 $R(\boldsymbol{B})>R(\boldsymbol{A})=r$，于是 $d_{r+1}\neq 0$，得矛盾方程组，即非齐次线性方程组无解，与假设矛盾，所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

再证明充分性.

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$ 时，$d_{r+1}=0$. 令 $x_{r+1}=x_{r+2}=\cdots=x_n=0$，代入非齐次线性方程组得 $x_1=d_1$，$x_2=d_2$，…，$x_r=d_r$. 所以非齐次线性方程组的一个解为

$$\boldsymbol{\eta}^*=(d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0).$$

证毕.

下面讨论 n 元非齐次线性方程组解的结构.

在非齐次线性方程组(5)中，若 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，得 n 元齐次线性方程组

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{array}\right\} \tag{7}$$

我们称方程组(7)是方程组(5)所对应的齐次线性方程组. 方程组(5)、(7)所对应的向量方程为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}. \tag{9}$$

向量方程(8)的解就是非齐次线性方程组(5)的解向量，向量方程(9)的解就是齐次线性方程组(7)的解向量. 它们具有下面两条性质.

性质 3　若 $\boldsymbol{\eta}_1$ 及 $\boldsymbol{\eta}_2$ 都是 n 元非齐次线性方程组(5)的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为 n 元齐次线性方程组(7)的解.

证　若 $\boldsymbol{\eta}_1$ 及 $\boldsymbol{\eta}_2$ 都是非齐次线性方程组(5)的解，即都是方程(8)的解，有 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b}$，因此

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 满足方程(9)，从而满足齐次线性方程组(7). 证毕.

性质 4　若 $\boldsymbol{\eta}$ 是 n 元非齐次线性方程组(5)的解，ξ 是 n 元齐次线性方程组

(7)的解，则 $\xi+\boldsymbol{\eta}$ 仍是 n 元非齐次线性方程组(5)的解.

证　若 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组(5)的解，即是方程(8)的解，有

$$\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}.$$

若 ξ 是齐次线性方程组(6)的解，即是方程(9)的解，有

$$\boldsymbol{A}\xi=\boldsymbol{0},$$

得
$$\boldsymbol{A}(\xi+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{A}\xi+\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b},$$

即 $\xi+\boldsymbol{\eta}$ 满足方程(8)，从而满足非齐次线性方程组(5). 证毕.

根据上面两个性质很容易证明下述定理.

定理 4　若 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是 n 元非齐次线性方程组(5)的一个解向量，则 n 元非齐次线性方程组(5)的任一解向量都可以写成

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*+\xi,$$

其中 ξ 是 n 元非齐次线性方程组(5)所对应的 n 元齐次线性方程组(7)的通解.

证　因为 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\eta}^*$ 都是非齐次线性方程组(5)的解向量，也是方程(8)的解，所以，根据性质 3，$(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}^*)$ 是方程(9)的一个解，即齐次线性方程组(7)的一个解向量.

令 $\xi=\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}^*$，即得 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*+\xi$. 证毕.

因此要求出非齐次线性方程组(5)的全部解向量，只要求出非齐次线性方程组(5)的一个解向量(即非齐次线性方程组(5)的特解 $\boldsymbol{\eta}^*$)和非齐次线性方程组(5)所对应的齐次线性方程组(7)的全部解向量(即齐次线性方程组(7)的通解)就行了. 而齐次线性方程组(7)的通解，根据前一节内容，都能由它的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示，为 $\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，其中，$c_1$，$c_2$，…，$c_{n-r}$ 为任意常数. 于是非齐次线性方程组(5)的全部解向量为

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}^*+c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

其中，c_1，c_2，…，c_{n-r} 为任意常数. 也称它为 n 元非齐次线性方程组(5)的通解.

定理 3 给出了 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$. 在有解的情况下，根据 n 元非齐次线性方程组解的结构可得出下面两个结论.

结论 1　若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r<n$，则 n 元非齐次线性方程组(5)有无穷多解.

结论 2　若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r=n$，则 n 元非齐次线性方程组(5)有唯一解.

例 4　求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=10, \\ 11x_1+3x_2=8 \end{cases}$$

的通解.

解　对增广矩阵 B 施行初等行变换变为行阶梯形矩阵：

$$B=\begin{pmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\overset{r_1-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-11r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&-30&33&96\end{pmatrix}\overset{r_3\div 3}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&-10&11&32\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-2\end{pmatrix},$$

从而知 $R(A)=2$，$R(B)=3$，由于 $R(A)\neq R(B)$，故非齐次线性方程组无解.

例 5　求非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=1,\\2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2,\\3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-9x_5=3\end{cases}$$

的通解.

解　方法一

(1)所求非齐次线性方程组所对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=0,\\2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0,\\3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-9x_5=0,\end{cases}$$

对系数矩阵 A 施行初等行变换变为行最简阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3\\2&-1&2&2&6\\3&2&-4&-3&-9\end{pmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3\\0&-3&6&0&0\\0&-1&2&-6&-18\end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)r_3\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3\\0&1&-2&6&18\\0&-3&6&0&0\end{pmatrix}\underset{r_3+3r_2}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&-5&-15\\0&1&-2&6&18\\0&0&0&18&54\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3\div 18}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-5&-15\\0&1&-2&6&18\\0&0&0&1&3\end{pmatrix}\underset{r_2-6r_3}{\overset{r_1+5r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&-2&0&0\\0&0&0&1&3\end{pmatrix},$$

可得 $R(A)=3<5$，所以齐次线性方程组有非零解. 与齐次线性方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2x_3, \\ x_4 = -3x_5. \end{cases}$$

令 $x_3 = c_1$，$x_5 = c_2$，并将上面方程补齐未知变量，得

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2c_1, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = -3c_2, \\ x_5 = c_2, \end{cases}$$

其中，c_1，c_2 为任意常数．进一步写成向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}),$$

于是得到两个$(n-R(\mathbf{A})=5-3=2)$线性无关的解

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 就是所求齐次线性方程组的基础解系．齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{\xi} = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中，$c_1$，$c_2$ 为任意常数．

(2)令 $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$，代入原非齐次线性方程组，得$x_1 = 1$，即非齐次线性方程组的一个特解为

$$\boldsymbol{\eta}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故非齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^{*}+\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\quad(c_1,\ c_2\in\mathbf{R}).$$

方法二　对增广矩阵 B 施行初等行变换变为行最简阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3&1\\2&-1&2&2&6&2\\3&2&-4&-3&-9&3\end{pmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3&1\\0&-3&6&0&0&0\\0&-1&2&-6&-18&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)r_3\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3&1\\0&1&-2&6&18&0\\0&-3&6&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_3+3r_2}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&-5&-15&1\\0&1&-2&6&18&0\\0&0&0&18&54&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3\div 18}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-5&-15&1\\0&1&-2&6&18&0\\0&0&0&1&3&0\end{pmatrix}\underset{r_2-6r_3}{\overset{r_1+5r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&-2&0&0&0\\0&0&0&1&3&0\end{pmatrix},$$

所以，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3<5$**，非齐次线性方程组有无穷多解. 与已知方程组同解的方程组为**

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=2x_3,\\x_4=-3x_5.\end{cases}$$

令 $x_3=c_1$，$x_5=c_2$**，并将上面方程组补齐未知变量，得**

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=2c_1,\\x_3=c_1,\\x_4=-3c_2,\\x_5=c_2,\end{cases}$$

其中，c_1，c_2 **为任意常数，于是非齐次线性方程组的通解为**

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\quad(c_1,\ c_2\in\mathbf{R}).$$

设

$$\boldsymbol{\eta}^{*}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\\1\end{pmatrix},$$

方程组的通解也可以写成

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^{*}+\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}^{*}+c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中，c_1，c_2 为任意常数.

比较上述两种方法，方法一直接利用 n 元非齐次线性方程组解的结构；方法二通过对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换变为行最简阶梯形矩阵，求得非齐次线性方程组的同解方程组，巧妙地求出非齐次线性方程组的通解.

例 6　在含有参数 λ 的非齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$

中，λ 取何值时，此方程组(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？并在有无穷多解时求出通解.

解　方法一　由于系数矩阵是方阵，不难推证它有唯一解的充分必要条件是系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq0$. 由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_1\div(3+\lambda)]{r_1+r_2+r_3}(3+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}(3+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2,$$

因此，当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，方程组有唯一解.

当 $\lambda=0$ 时，非齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=3,\\x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换变为行阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{pmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_2\div3}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即得 $R(\boldsymbol{A})=1$，$R(\boldsymbol{B})=2$，由于 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$，所以非齐次线性方程组无解.

当 $\lambda=-3$ 时，非齐次线性方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2-2x_3=-3.\end{cases}$$

对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换变为行最简阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\overset{r_1+r_2+r_3}{\underset{r_2-r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-3&3&6\\1&1&-2&-3\end{bmatrix}$$

$$\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_2\div(-3)}{\underset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即得 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2<3$，所以非齐次线性方程组有无穷多解. 与非齐次线性方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3-1,\\ x_2=x_3-2.\end{cases}$$

令 $x_3=c$，将上面方程补齐未知变量，得

$$\begin{cases}x_1=x_3-1=c-1,\\ x_2=x_3-2=c-2,\quad (c\in\mathbf{R}),\\ x_3=x_3\qquad\ \ =c\end{cases}$$

得非齐次线性方程组的通解，写成向量形式为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}\quad (c\in\mathbf{R}).$$

方法二　对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换变为行阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&3\\1&1&1+\lambda&\lambda\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\1&1+\lambda&1&3\\1+\lambda&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-(1+\lambda)r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&-\lambda&-\lambda(2+\lambda)&-\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&0&-\lambda(3+\lambda)&(1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}.$$

可见：

(1)当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，非齐次线性方程组有唯一解；

(2)当 $\lambda=0$ 时，方程组无解；

(3)当 $\lambda=-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2<3$，方程组有无穷多解. 此时对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换变为行最简阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1+r_2+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 6\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\underset{r_1-r_2}{\overset{r_3\div(-3)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得与非齐次线性方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3-1,\\ x_2=x_3-2.\end{cases}$$

令 $x_3=c$，将上面方程补齐未知变量，得

$$\begin{cases}x_1=x_3-1=c-1,\\ x_2=x_3-2=c-2, \quad (c\in\mathbf{R}),\\ x_3=x_3 \qquad =c\end{cases}$$

得非齐次线性方程组的通解，写成向量形式为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}\quad (c\in\mathbf{R}).$$

比较上述两种方法，方法一比较简单，但方法一仅适用于系数矩阵是方阵的情形，而方法二则可适用于一般的情形.

习题 4_2

1. 判断下列非齐次线性方程组是否有解，若有解，求出它的通解：

(1) $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2,\\ 3x_1-x_2+2x_3=3,\\ 11x_1+3x_2 \qquad =-6;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=1,\\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4=5,\\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=-4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13, \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -6. \end{cases}$

2. **下列非齐次线性方程组，问λ取何值时，方程组**(1)**有唯一解**;(2)**无解**;(3)**有无穷多解？并在有无穷多解时求出通解.**

(1) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (3+\lambda)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = \lambda, \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (3+\lambda)x_3 = 3. \end{cases}$

第四章习题参考答案

习题 4_1

1.（1）基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，通解为 $\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2$（c_1，c_2 为任意常数）；

（2）基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$，通解为 $\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2$（c_1，c_2 为任意常数）；

（3）基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，通解为 $\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2$（c_1，c_2 为任意常数）；

（4）基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$，通解为 $\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2$（c_1，c_2 为任意常数）；

（5）基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，通解为 $\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2$（c_1，c_2 为任意常数）；

（6）基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，通解为

$\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+c_3\boldsymbol{\xi}_3$（$c_1$，$c_2$，$c_3$ 为任意常数）.

2. $\lambda=2$ 时，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）；$\lambda=-1$ 时，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数）.

3.（1）$a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$.

（2）当 $a=b\neq c$ 时，通解为 $\xi=c\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数）；当$a=c\neq b$时，通解为 $\xi=c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数）；当 $b=c\neq a$ 时，通解为 $\boldsymbol{\xi}=c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数）；当 $a=b=c$ 时，通解为$\boldsymbol{\xi}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）.

习题 4_2

1.（1）无解；

（2）$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）；

（3）$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\1\\0\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\-5\\1\\0\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数）；

(4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ （c_1，c_2 **为任意常数**）；

(5)**无解**；

(6) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ （c **为任意常数**）；

(7) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （c **为任意常数**）.

2.（1）**当** $\lambda \neq 1$ **且** $\lambda \neq -2$ **时，有唯一解；当** $\lambda = -2$ **时，无解；当** $\lambda = 1$ **时，有无穷多解，为**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ （c_1，c_2 **为任意常数**）；

(2)**当** $\lambda \neq 1$ **且** $\lambda \neq -2$ **时，有唯一解；当** $\lambda = -2$ **时，无解；当** $\lambda = 1$ **时，有无穷多解，为**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ （c_1，c_2 **为任意常数**）；

(3)**当** $\lambda \neq 0$ **且** $\lambda \neq 1$ **时，有唯一解；当** $\lambda = 0$ **时，无解；当** $\lambda = 1$ **时，有无穷多解，为**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ （c **为任意常数**）.

下篇　概率论

第五章　随机事件及其概率

在自然界和人类社会中存在着各种各样的现象. 有一类现象，在一定条件下必然发生(或必然不发生). 例如，向上抛一枚硬币必然下落，同性电荷互相排斥，等等. 它们的特点是现象发生由条件唯一确定，这类现象称为确定性现象. 还有一类现象，与其相反，具有不确定性，即使在相同的条件下，现象发生与否也无法确定. 例如，抛掷一颗质地均匀的骰子，观察出现的点数，3 点出现与否不能预知；抛掷一枚硬币，落地后观察哪一面朝上，币值面向上与否不能确定；打靶一次，观察中靶的环数，能否中 10 环无法确定；考查一昼夜登陆某网站的人次数，事先无法预知，等等. 这类现象称为随机现象.

对于随机现象，虽然每次观察的结果是不确定的，但是经过长期实践并深入研究后发现，在大量重复试验或观察下却呈现出某种规律性. 如多次抛掷一枚硬币后，我们会发现币值面和国徽面(花面)出现的次数大体相同；同一个人打靶，其中靶环数按照一定规律分布，等等. 由于随机现象的这种规律性是通过大量的实验统计得到的，我们称其为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科. 其理论和方法在应用上是十分广泛的，目前已遍及社会经济、自然科学、工程技术等各个领域. 例如，使用概率统计方法可以进行气象预报、水文预报、地震预报、产品的抽样检查，在产品开发、技术创新等过程中运用统计分析方法进行试验设计和数据处理，在可靠性分析方面使用概率统计方法可以获得元器件、装置和系统的使用可靠程度以及平均寿命的估计.

第一节　随机事件

一、随机试验

概率论是通过试验来研究随机现象的．在这里，试验是一个含义广泛的术语．凡是对现象的观察、测试或为此而进行的实验统称为试验．

E_1：抛掷一枚硬币，观察正面 H 和反面 T（有币值的一面）出现的情况；

E_2：抛掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：打靶一次，观察命中的环数；

E_4：一只袋子中装有 1 个白球和 99 个红球，只有颜色不同，从中连续取球，每次任取一只，取后放回，直到取得白球为止，观察取球的次数；

E_5：测试一只灯泡的寿命；

E_6：连续抛掷一枚硬币两次，观察正面 H 和反面 T 出现的情况；

E_7：某人计划去旅游，观察在预定的时间内能否完全抵达目的地；

……

观察上面的试验，它们都具有以下两个特点：

（1）试验的所有可能结果是已知的或者是无法确定的；

（2）每次试验将发生什么结果事先无法预先知道．

在概率论中，我们把具备以上两个特点的试验称为随机试验，简称为试验，用字母 E 表示．

二、样本空间

对于一个随机试验，我们既要清楚试验的过程，也要确定试验的所有可能结果．我们把一个随机试验所有可能结果组成的集合，称为这个试验的样本空间，记为 U．样本空间中的元素，即试验的每一个可能结果，称为样本空间的样本点，记为 e．

如上述各例中样本空间分别为：

$U_1=\{H, T\}$；

$U_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

$U_3=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$；

$U_4=\{1, 2, \cdots\}$；

$U_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$；

$U_6=\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$；

$U_7=\{$到达，没到达$\}$；

……

由此看出，样本空间可以是有限集合，也可以是无限集合. 在构造一个随机试验的数学模型时，首先必须明确它的样本空间. 样本空间的元素是由试验的目的所确定的.

三、随机事件

对于一个随机试验，我们不仅要知道它的样本空间的构成，还往往关注满足某种条件的样本点所组成的集合. 如在 E_3 中，若规定中靶 8 环及 8 环以上为优秀的话，我们关注由样本点 8，9，10 组成的集合 $A=\{8, 9, 10\}$. 又如在 E_5 中，若规定某种灯泡的寿命不小于 750h 为正品的话，我们关注由样本点 $t\geqslant 750$ 组成的集合 $B=\{t\mid t\geqslant 750\}$. 我们称 A 为试验 E_3 的一个随机事件，B 为试验 E_5 的一个随机事件.

一般地，我们把一个试验 E 的部分结果组成的集合，即样本空间 U 的子集称为 E 的随机事件. 随机事件常用大写字母 A，B，C 等来表示. 如果随机事件只含有一个试验结果，即事件是单元素集，则称此事件为基本事件.

在一次试验中，若事件 A 包含的某个结果出现了，就称在这次试验中事件 A 发生了，或称为事件 A 出现；反之，事件 A 发生就是指事件 A 包含的某个结果出现了. 简言之，事件 A 发生当且仅当事件 A 包含的某个结果出现.

每次试验都必然发生的事件称为必然事件，记作 U；每次试验都不会发生的事件称为不可能事件，记作 $\varnothing$. 实际上，必然事件和不可能事件是确定性事件，但是，为了研究问题方便，我们把它看作特殊的随机事件.

四、随机事件的关系和运算

在研究实际问题的过程中，我们往往要考查同一随机试验中的几个事件，而它们之间往往存在着一定的联系. 为了研究它们之间的关系，为了用简单的事件表示比较复杂的事件，我们引进事件之间的关系和运算. 为便于理解，在介绍本单元的概念时，我们以 E_3 中的事件为例加以说明. 在 E_3 中，设

$$A=\{9, 10\},$$
$$B=\{8, 9, 10\},$$
$$C=\{5, 6, 7, 8\},$$
$$D=\{0, 1, 2, 3\}.$$

1. 包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A（或事件 A 包含于事件 B），记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$），如图 5_1 所示. 例如在 E_3 中，$A\subset B$.

包含关系具有以下性质：

(1) $A \subset A$；

(2) 若 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$；

(3) $\varnothing \subset A \subset U$.

若 $A \subset B$ 且 $B \supset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$.

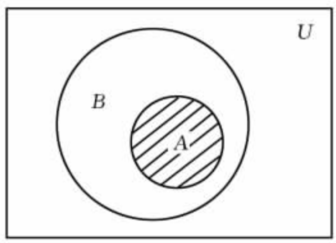


图 5_1

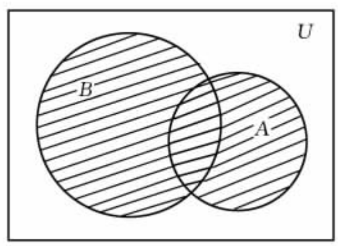


图 5_2

2．和事件

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与 B 的和事件，记作 $A \cup B$，如图 5_2 阴影部分所示．例如在 E_3 中

$$A \cup B = \{8, 9, 10\},$$
$$B \cup C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

由和事件的定义，显然有：

(1) $A \cup A = A$，$A \cup \varnothing = A$；

(2) $A \subset (A \cup B)$，$B \subset (A \cup B)$.

n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生的事件称为这 n 个事件的和事件，记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

3．积事件

事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与 B 的积事件，记作 AB(或 $A \cap B$)，如图 5_3 阴影部分所示．例如在 E_3 中

$$AB = \{9, 10\}, \quad BC = \{8\}.$$

由积事件的定义，显然有：

(1) $AA = A$，$A\varnothing = \varnothing$，$AU = A$；

(2) $AB \subset A$，$AB \subset B$.

n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件称为这 n 个事件的积事件，记作

$$A_1 A_2 \cdots A_n \text{ 或 } A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

4．互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容，

或称事件 A 与 B 互斥，如图 5_4 所示．例如在 E_3 中，$AC=\varnothing$，故 A 与 C 互斥．

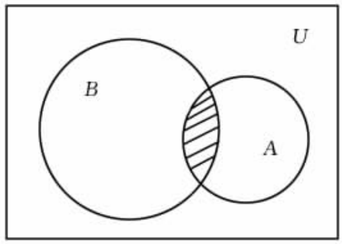


图 5_3

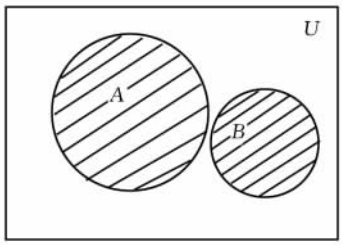


图 5_4

当事件 A 与 B 互斥时，其互斥和记作 $A+B$．

若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中任意两个事件互斥，则称这 n 个事件两两互斥，此时这 n 个事件的和事件记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i.$$

5．对立事件

若事件 A 与事件 B 满足

$$AB=\varnothing，A+B=U，$$

则称事件 B 为事件 A 的对立事件．A 的对立事件记作 $\overline{A}$，如图 5_5 阴影部分所示．例如在 E_3 中

$$\overline{A}=\{0，1，2，3，4，5，6，7，8\}.$$

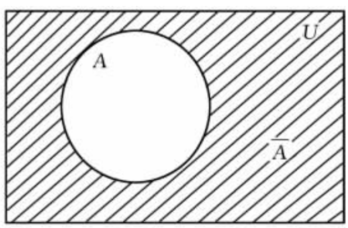


图 5_5

显然，对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件．

五、运算律

设 A，B，C 是三个事件，由事件的关系及运算的定义，可以得到下述运算性质(表 5_1)．

表 5_1

交换律	$A\cup B=B\cup A$	$AB=BA$
结合律	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A(BC)=(AB)C$
分配律	$A(B\cup C)=AB\cup AC$	$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$
对偶律	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

例 1　设样本空间为 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，事件 $A=\{3, 4\}$，$B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$，$C=\{5, 6, 7, 8\}$. 具体写出下列各事件：

(1) $\overline{A\cup B}$；

(2) $\overline{A}\overline{B}$；

(3) $\overline{AB}$；

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$；

(5) $A(B\cup C)$；

(6) $AB\cup AC$；

(7) $\overline{\overline{A}}$；

(8) $AB+A\overline{B}$.

解　(1) $\overline{A\cup B}=\{1, 7, 8, 9, 10\}$；

(2) $\overline{A}\overline{B}=\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\cap\{1, 7, 8, 9, 10\}$
$=\{1, 7, 8, 9, 10\}$；

(3) $\overline{AB}=\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$；

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$；

(5) $A(B\cup C)=\{3, 4\}$；

(6) $AB\cup AC=\{3, 4\}$；

(7) $\overline{\overline{A}}=\{3, 4\}$；

(8) $AB+A\overline{B}=\{3, 4\}$.

例 2　三门炮同时向同一目标各发射一发炮弹，试用事件之间的运算关系表示下列各事件：

(1) 只有第一发击中目标；

(2) 恰有一发击中目标；

(3) 没有一发击中目标；

(4) 至少有一发击中目标；

(5) 第一发击中，而第二发和第三发至少有一发未击中目标.

解　设 $A_i=\{第\ i\ 发击中目标\}(i=1, 2, 3)$，则

(1) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(2) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

(3) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(4) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$；

(5) $A_1(\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3)$.

习题 5_1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 同时抛掷两颗骰子，记录两颗骰子的点数之和；

(2) 抛掷一枚硬币，直到出现正面为止，记录掷币结果；

(3) 生产某种产品直至有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数；

(4) 一个袋子中装有红色、白色、蓝色球各一个，从袋子中有放回地连续取球两次，每次任取一个，观察两个球的颜色；

(5) 全班有 50 人参加一次数学考试，记录这 50 人的平均成绩(以百分计，每个人的成绩均为整数)；

(6) 6 件产品中有 2 件次品，每次从其中任取一只，取出后不放回，直到将 2 件次品都取出为止，记录抽取的次数；

(7) 在区间[0，1]上任取一点，记录其坐标；

(8) 从圆心在坐标原点的单位圆内部任意取一点，记录其坐标.

2. 用图示说明下列各等式：

(1) $A \cap U = A$；

(2) $A - B = A\overline{B}$；

(3) $A(B \cup C) = AB \cup AC$；

(4) $AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$；

(5) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$；

(6) $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$；

(7) $\overline{\overline{A}} = A$；

(8) 若 $B \subset A_1 + A_2 + A_3$，则 $B(A_1 + A_2 + A_3) = B$；

(9) $A = AB + A\overline{B}$.

3. 设 A，B，C 表示三个随机事件，试将下列随机事件用 A，B，C 的运算关系表示出来：

(1) A，B，C 同时发生；

(2) A，B，C 至少有一个发生；

(3) A 和 B 发生，但 C 不发生；

(4) A，B，C 恰有一个不发生；

(5) A 发生但 B，C 都不发生；

(6) A 发生但 B，C 至少有一个不发生；

(7) A, B, C 恰有一个发生;

(8) A, B, C 都不发生;

(9) A, B, C 至少有一个不发生;

(10) A, B, C 最多只有一个发生;

(11) A, B, C 至少有两个发生.

第二节　随机事件的概率

对于随机事件，我们不仅关心它是由哪些基本事件构成的，更重要的是希望知道它在一次试验中发生的可能性大小，并希望能找到一个合适的数值来“度量”它在一次试验中发生的可能性大小. 为此，我们首先引入频率的概念，进而给出概率的统计定义和古典概率定义.

一、概率的统计定义

定义 1　设随机事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为这 n 次试验中事件 A 出现的频率，记作 $W(A)$，即

$$W(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由定义 1 可知，事件 A 的频率是试验值. 重复试验的次数不同，事件 A 的频率可能不同，即使重复试验的次数相同，事件 A 的频率也可能不同. 然而，进行大量的重复试验，就会发现事件 A 的频率总在一个定值附近摆动，呈现出一定的稳定性.

历史上著名的数学家曾经做过抛掷硬币的试验，得到如下结果(表 5_2).

表 5_2

试验者	投掷次数 n	正面出现次数 n_A	正面出现的频率 n_A/n
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

由表 5_2 可以看出，随着投掷次数的增加，正面出现的频率逐渐稳定在 0.5 附近，这个数值是由事件本身唯一确定的.

定义 2　在相同的条件下进行大量重复试验，若事件 A 发生的频率稳定地在某一确定的常数 p 附近摆动，则称常数 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$，即

$$P(A)=p.$$

频率是试验值，在一定程度上反映了事件发生可能性的大小；概率是理论值，是唯一确定的，它精确地反映了事件发生可能性的大小.

二、古典概率

概率的统计定义虽然比较直观，但通过大量重复试验而寻求频率的稳定值是不现实甚至是没有意义的. 对于一些比较简单的随机现象，可以不必经过试验，依据经验，通过理论分析即可确定事件的概率.

1. 古典概型

具有下列特征的随机试验，称为古典概型：

(1) 试验的所有可能结果(或所有基本事件)只有有限个，即样本空间 U 为有限集；

(2) 每个基本事件发生的可能性相同.

如本章第一节中的 E_1，E_2，E_6 都是古典概型，而 E_3，E_4，E_5 则不是古典概型.

2. 古典概率

定义 3　对于古典概型，设样本空间 U 含有 n 个样本点，事件 A 含有 m 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

例 3　一批产品有90件正品和 3 件次品，从中任取一件，求取得正品的概率.

解　设 $A=\{$取出的产品是正品$\}$，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{90}^1}{C_{93}^1}=\frac{30}{31}.$$

例 4　从例 3 的这批产品中，连续抽取两次，每次任取一件，按放回抽样和不放回抽样两种方式进行. 求第一次取得次品且第二次取得正品的概率.

解　设 $A=\{$第一次取得次品且第二次取得正品$\}$，则

(1) 放回抽样

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^1\cdot C_{90}^1}{C_{93}^1\cdot C_{93}^1}=\frac{30}{961};$$

(2)不放回抽样

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^1\cdot C_{90}^1}{C_{93}^1\cdot C_{92}^1}=\frac{45}{1426}.$$

例 5　一只袋子中装有6个红球和 3 个白球，从中任意取出两球，求下列事

件的概率：

（1）两个球都是白球；

（2）两个球都是红球；

（3）一个红球一个白球.

解 设$A=\{$取出的两个球都是白球$\}$，

$B=\{$取出的两个球都是红球$\}$，

$C=\{$取出一个红球一个白球$\}$，

则

（1）$P(A)=\dfrac{m_A}{n}=\dfrac{C_3^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{12}$；

（2）$P(B)=\dfrac{m_B}{n}=\dfrac{C_6^2}{C_9^2}=0.417$；

（3）$P(C)=\dfrac{m_C}{n}=\dfrac{C_6^1C_3^1}{C_9^2}=0.5$.

三、概率的性质

1. 基本性质

性质 1 对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 2 $P(U)=1$，$P(\varnothing)=0$.

性质 3 如果事件 A 和 B 满足 $A\subset B$，则

$$P(A)\leqslant P(B).$$

2. 运算性质

定理 1 设事件 A 和 B 互斥，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

此性质称为加法定理.

推论 1 设有限个随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

推论 2 对于任意事件 A，有

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

例 6 从0，1，2，3 这四个数字中任取三个进行排列，求组成的三位数为偶数的概率.

解 设$A=\{$组成的三位数为偶数$\}$，

$A_0=\{$组成的三位数末位数字为 $0\}$，

$A_2=\{$组成的三位数末位数字为 $2\}$，

则

$$A=A_0+A_2,$$

$$P(A_0)=\frac{\mathrm{P}_3^2}{\mathrm{P}_4^3}=\frac{1}{4},$$

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{P}_4^3}=\frac{1}{6},$$

$$P(A)=P(A_0)+P(A_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}.$$

例 7　一批产品共有 60 件，其中合格品 55 件，从这批产品中任取 3 件，求其中有不合格品的概率.

解　设 $A=\{$取出的 3 件产品中有不合格品$\}$，$A_i=\{$取出的 3 件产品中恰有 i 件不合格品$\}(i=1,2,3)$，则

$$A=A_1+A_2+A_3.$$

方法一

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=\frac{\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_{55}^2}{\mathrm{C}_{60}^3}+\frac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_{55}^1}{\mathrm{C}_{60}^3}+\frac{\mathrm{C}_5^3}{\mathrm{C}_{60}^3}=0.233.\end{aligned}$$

方法二

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\mathrm{C}_{55}^3}{\mathrm{C}_{60}^3}=0.233.$$

显然，利用事件的对立关系求解较为简便，应注意使用.

定理 2　设 A 和 B 为任意两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

此性质称为广义加法定理.

推论 3　设 A，B，C 为任意三个事件，则

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

例 8　已知 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，分别就下列三种情况求 $P(\overline{A}B)$ 的值：

(1) $AB=\varnothing$；

(2) $A\subset B$；

(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解　由

$$B=BU=B(A+\overline{A})=AB+\overline{A}B$$

可得

$$P(B)=P(AB+\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B),$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB).$$

(1) $P(\overline{A}B)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$;

(2) 由 $A\subset B$,可得 $P(AB)=P(A)$,故

$$P(\overline{A}B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6};$$

(3) $P(\overline{A}B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

习题 5_2

1. 已知 $P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=\frac{1}{5}$,求以下概率值:

(1) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$;(2) $P(\overline{A}B)$;(3) $P(\overline{A}\cup B)$;(4) $P(\overline{A}\overline{B})$.

2. 设 A,B,C 表示三个随机事件,$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$. 求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

3. 七个人并排站成一排. 求(1)甲站在中间的概率;(2)甲乙站在两边(左、右不限)的概率.

4. 把一个表面涂有红色的立方体分割成 1000 个大小相同的小立方体,并且从中任意取出一个. 试求恰好取到有两个侧面涂有红色的小立方体的概率.

5. 设某田径队有十名运动员,编号分别为 1~10 号,任选三人记录号码,分别求最小号码为 5 和最大号码为 5 的概率.

6. 把七本数学书和三本物理书任意排放在同一层书架上,求三本物理书排放在一起的概率.

7. 20 名运动员有两名种子选手,现将运动员平均分成两组,(1)求两名种子选手分在不同组的概率 p_1;(2)求两名种子选手分在同一组的概率 p_2.

第三节　条件概率　全概率公式

一、条件概率

在实际问题中,有时会遇到求在事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率,这时,因为以"事件 A 已经发生"为前提条件而求事件 B 发生的概率,所以称这种概率为条件概率,记作 $P(B|A)$.

例 9　某工厂甲、乙两个车间生产相同产品,产量、质量情况如表 5_3 所示.

表 5_3

	合格品数	次品数	合　计
甲车间产品数	50	5	55
乙车间产品数	40	5	45
合　　计	90	10	100

现将这 100 件产品混放在一起后从中任取一件.

（1）求取到甲车间产品的概率；

（2）求取到合格品的概率；

（3）求取到甲车间产品并且是合格品的概率；

（4）若已知取到甲车间的产品，求它是合格品的概率.

解　设 $A=\{$取到甲车间产品$\}$，$B=\{$取到合格品$\}$，则

（1）$P(A)=\dfrac{55}{100}$；

（2）$P(B)=\dfrac{90}{100}$；

（3）$P(AB)=\dfrac{50}{100}$；

（4）$P(B|A)=\dfrac{50}{55}$.

观察上面的结果，我们可以看到 $P(B)\neq P(B|A)$，这表明事件 A 的发生影响了事件 B 发生的概率. 进一步分析还可以得到

$$P(B|A)=\frac{50}{55}=\frac{\dfrac{50}{100}}{\dfrac{55}{100}}=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

即

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

对于一般古典概型问题，上面关系式仍然成立.

设试验 E 的样本空间包含 n 个样本点，事件 A 包含 $m_A(m_A>0)$ 个样本点，事件 AB 包含 m_{AB} 个样本点，则

$$P(B|A)=\frac{m_{AB}}{m_A}=\frac{\dfrac{m_{AB}}{n}}{\dfrac{m_A}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

即

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

我们把上式作为条件概率的定义.

定义 4 设 A 和 B 为试验 E 的两个事件，$P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

例 10 抛掷一颗骰子，观察出现的点数.

(1) 求出现偶数点的概率；

(2) 求出现 2 点的概率；

(3) 已知出现的是偶数点，求出现 2 点的概率.

解 设 $A=\{$出现偶数点$\}$，$B=\{$出现 2 点$\}$.

(1) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$；

(2) $P(B)=\frac{1}{6}$；

(3) 方法一

$$P(B|A)=\frac{1}{3}.$$

方法二

$$P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

例 9 和例 10 的方法一是根据条件概率的含义，结合实际问题直接确定 $P(B|A)$的值，即不在原来样本空间中计算$P(B|A)$. 因为事件 A 已经发生，因此样本空间 U 变成缩减的样本空间 U_A，只要在 U_A 中计算事件 B 发生的概率，得到的就是条件概率 $P(B|A)$.

二、乘法公式

由条件概率的定义，可以得到下述定理.

定理 3 设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

此式称为概率的乘法公式.

例 11 一个袋子中装着只有颜色不同的10个球，其中 7 个红球、3 个白球. 从中连续取球两次，每次任取一只，不放回抽样. 求第二次才取得红球的概率.

解 依题意，第一次取得白球，第二次取得红球.

设 $A_i=\{$第 i 次取得红球$\}(i=1,2)$，则

$$P(\overline{A}_1)=\frac{3}{10},\ P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{7}{9}.$$

因此

$$P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}.$$

乘法定理可以推广到有限多个事件的积的情形，如对于三个事件 A_1，A_2，A_3，有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2),$$

其中，$P(A_1A_2)>0$.

例 12　某人有三把钥匙，其中只有一把钥匙能打开他的门，他逐个地利用它们试开(不放回抽样)，求下列事件的概率：

(1) 第一把钥匙打开门；

(2) 第二把钥匙才打开门；

(3) 第三把钥匙才打开门.

解　设 $A_i=\{$第 i 把钥匙打开门$\}(i=1,2,3)$，则

(1) $P(A_1)=\dfrac{1}{3}$；

(2) $P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$；

(3) $$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{3}.$$

三、全概率公式

在计算比较复杂事件的概率时，往往要同时使用概率的加法公式和乘法公式.

例 13　某工厂仓库内存放同种零件若干箱，由甲、乙两个车间生产，产量比为 2∶1，合格率分别为 0.95 和 0.90. 从仓库内任取一箱，再从中任取一只，求取得零件为合格品的概率.

解　设 $A=\{$取得零件为甲车间生产$\}$，

$B=\{$取得零件为合格品$\}$，

则

$$P(A)=\frac{2}{3},P(\overline{A})=\frac{1}{3},$$

$$P(B|A)=0.95,\ P(B|\overline{A})=0.90.$$

因为

$$B=BU=B(A+\overline{A})=BA+B\overline{A},$$

所以

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$
$$=\frac{2}{3}\times 0.95+\frac{1}{3}\times 0.90=0.94.$$

例 13 所解决的问题具有普遍性，将上面的作法推广到一般情形，便得到全概率公式：

设(1) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，

(2) $B\subset A_1+A_2+\cdots+A_n$，$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，

则

$$B=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n,$$
$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n).$$

在许多实际问题中，$P(B)$不易直接求得，但却容易找到满足公式中条件(1)和(2)的一个事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，且 $P(A_i)$和 $P(B|A_i)(i=1,2,\cdots,n)$或为已知，或容易求得，这样即可求出 $P(B)$.

例 14 市场上某种商品由三个厂家同时供货. 第一个厂家的供货量是第二个厂家的 2 倍，第三个厂家和第二个厂家的供货量相同. 已知三个厂家产品的次品率依次为 2%，2%，4%，求市场上供应的该种商品的正品率.

解 从市场上任意选购一件该种商品，设

$A_i=\{$选购到第 i 个厂家的产品$\}(i=1,2,3)$，

$A=\{$选购到次品$\}$，

则

$$P(A_1)=0.5,\ P(A_2)=P(A_3)=0.25,$$
$$P(A|A_1)=P(A|A_2)=0.02,\ P(A|A_3)=0.04.$$

由于

$$A=A(A_1+A_2+A_3)=AA_1+AA_2+AA_3,$$

故

$$P(A)=P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)$$
$$=0.5\times 0.02+0.25\times 0.02+0.25\times 0.04=0.025,$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.025=0.975.$$

例 15 一个保险公司根据长期统计资料分析认为，某个险种投保人可以分成两类，第一类人容易出事故，在固定的一年内出一次事故的概率为 0.4，第二类人比较谨慎，在固定的一年内出一次事故的概率为 0.1. 假定第一类人占该险种投保总人数的 30%，那么一个新保险客户在他购买该种保险后一年内出一次事故的概率是多少？

解　设 $A_1=\{$新保险客户且容易出事故的人$\}$，

$A_2=\{$新保险客户且不容易出事故的人$\}$，

$B=\{$新保险客户在固定的一年内出一次事故$\}$，

则

$$B=BA_1+BA_2,$$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$
$$=0.3\times 0.4+0.7\times 0.1=0.19.$$

在上述条件下进一步提出以下问题：

如果一个新保险客户在他购买该种保险后一年内出了一次事故，问他是容易出事故的人的概率有多大？

这个客户购买该种保险后一年内发生了一次事故，即事件 B 已经发生，在这个条件下求他是容易出事故的人的概率，即求 $P(A_1|B)$.

因为

$$P(A_1)P(B|A_1)=0.3\times 0.4=0.12,$$
$$P(B)=0.19,$$

所以

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.12}{0.19}=\frac{12}{19}\approx 0.63.$$

这说明，出了事故的人属于容易出事故那一类人的可能性较大.

综上可得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}.$$

类似地

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}.$$

这就是很有用的公式——贝叶斯公式.

*四、贝叶斯公式

设（1）A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，

（2）$B\subset A_1+A_2+\cdots+A_n$，且

$$P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n),\ P(B)>0,$$

则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)}$$

$$(i=1,2,\cdots,n).$$

此公式称为贝叶斯公式.

例 16 某晶体管生产厂家共有三个车间，根据以往的记录有以下统计数据（表 5_4）：

表 5_4

	第一车间	第二车间	第三车间
次 品 率	0.02	0.01	0.03
所占份额	15%	80%	5%

这三个车间生产出来的产品随机地混放在仓库内.

（1）从中任取一只，求它是次品的概率；

（2）从中任取一只，发现是次品，为了分析此次品出自哪个车间的可能性较大，需要求出该次品是由每个车间生产的概率.

解 设 $A_i=\{$取到第 i 车间的产品$\}(i=1,2,3)$，

$B=\{$取到的产品为次品$\}$，

则

① A_1，A_2，A_3 两两互斥；

② $B\subset A_1+A_2+A_3$.

$P(A_1)=0.15$，$P(A_2)=0.80$，$P(A_3)=0.05$，

$P(B|A_1)=0.02$，$P(B|A_2)=0.01$，$P(B|A_3)=0.03$.

（1）由全概率公式得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$
$$=0.15\times0.02+0.80\times0.01+0.05\times0.03=0.0125;$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.15\times0.02}{0.0125}=0.24,$$
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.80\times0.01}{0.0125}=0.64,$$
$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.05\times0.03}{0.0125}=0.12.$$

以上结果表明，这只次品来自第二车间的可能性最大.

习题 5_3

1. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$. 求(1) $P(AB)$；(2) $P(B)$；(3) $P(A\cup B)$.

2. 有一道问答题，甲先回答，答对的概率为 0.4，如果答错再由乙答，答对的概率为 0.5. 求问题由乙答出的概率.

3. 四张足球票，其中三张乙票，一张甲票. 用抽签的方式分配给四个人，求每个人抽得甲票的概率.

4. 一批产品中有 4%是废品，而合格品中有 75%为一级品. 现从中任取一件产品，求这件产品是一级品的概率.

5. 设甲袋中有三个红球和一个白球，乙袋中有四个红球和两个白球. 从甲袋中任取一球放入乙袋，再从乙袋中任取一球. 求从乙袋中取得红球的概率.

6. 已知一台机器工作状态良好时，产品的合格率为 99%，工作状态一般时，产品的合格率为 95%. 设机器工作状态良好的概率为 90%. 在生产出的产品中任取一件，求这件产品为合格品的概率.

7. 两台车床加工同样的零件，第一台车床加工的零件出现次品的概率为 0.03，第二台车床加工的零件出现次品的概率为 0.02. 若第一台车床加工的零件是第二台车床加工零件的两倍，两台车床加工的零件放在一起，从中任取一件，求它是合格品的概率.

8. 袋中有三个红球和七个白球，从袋中取球两次，每次任取一个，取出后不放回.

(1) 求两个球都是红球的概率；

(2) 求第一次取得白球，第二次取得红球的概率；

(3) 求两个球中有一个红球、一个白球的概率；

(4) 在第一次取得白球的情况下，求第二次取得红球的概率；

(5) 求第二次取得红球的概率.

*9. 某车间有一条生产线，正常运转的时间为 95%，正常运转时产品的合格率为 90%，不正常运转时产品的合格率为 40%. 现从产品中任取一件进行检验，发现它不是合格品，问这时生产线正常运转的概率是多少？

*10. 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“·"和“—”. 由于通讯系统受到干扰，当发出信号“·"时，收报台未必收到信号“·"，而是分别以 0.8 和 0.2 的概率收到“·"和“—”；同样发出信号“—”时，收报台分别以 0.9 和 0.1 的概率收到“—”和“·". 求：

(1) 收报台收到信号“·" 的概率；

（2）当收报台收到信号“·"时，发报台是发出信号“·" 的概率.

第四节　事件的独立性与伯努利概型

一、事件的相互独立性

1. 两个事件的相互独立性

一般来说，$P(B|A)\neq P(B)$，即事件 A 的发生对事件 B 的发生的概率产生影响. 但在某种情况下，$P(B|A)$与 $P(B)$也可能相等. 我们来看下面的例子.

一袋中装有 6 只白球和 4 只黑球，现从中连续取球两次，每次任取一只，观察球的颜色. 设

$$A=\{第一次取得白球\}，B=\{第二次取得白球\}.$$

就下面两种情况分别求 $P(B)$和 $P(B|A)$：

（1）不放回抽样；

（2）放回抽样.

因为 $B=AB+\overline{A}B$，所以

（1）不放回抽样：

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{3}{5},\end{aligned}$$

$$P(B|A)=\frac{5}{9};$$

（2）放回抽样：

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\end{aligned}$$

$$P(B|A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

这说明，对于放回抽样问题，$P(B|A)$与 $P(B)$相等. 此时

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B).$$

定义 5　设 A 和 B 是两个事件，且 $P(A)>0$，若

$$P(B|A)=P(B),$$

则称事件 B 对事件 A 独立.

当事件 B 对事件 A 独立且 $P(B)>0$ 时

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A),$$

即

$$P(A|B)=P(A).$$

这说明，当事件 B 对事件 A 独立时，事件 A 对事件 B 也是独立的，即独立是相互的.

定理 4　事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

定理 5　若事件 A 与事件 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都是相互独立的.

证　仅证 A 与 $\overline{B}$ 相互独立．因为

$$A=AU=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B},$$

所以

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}),$$

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B}),$$

即

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}).$$

由定理 4 得，A 与 $\overline{B}$ 是相互独立的.

在研究实际问题的过程中，判断事件的相互独立性，往往不直接利用定义和判定定理判断，而是根据问题的实际意义进行分析确定.

例 17　甲、乙两人同时独立地打靶一次，中靶的概率分别为0.4和 0.5，求下列事件的概率：

(1) 两人同时中靶；

(2) 恰有一人中靶；

(3) 至少有一人中靶.

解　设 $A=\{$甲中靶$\}$，$B=\{$乙中靶$\}$，则

$$P(A)=0.4,\ P(B)=0.5.$$

依题意，事件 A 与 B 相互独立，于是

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.4\times0.5=0.2$；

(2) $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$
$=0.4\times0.5+0.6\times0.5=0.5$；

(3) 方法一

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$=0.4+0.5-0.4\times0.5=0.7.$$

方法二

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\overline{B})$$
$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.6\times0.5=0.7.$$

两个事件的相互独立性的概念可以推广到有限多个事件的情形.

2. 有限多个事件的相互独立性

定义 6 设 A_1，A_2，…，A_n 为 $n(n>2)$ 个事件，若对于任意一组 i_1，i_2，…，$i_k(1<k\leqslant n$，每组 i_1，i_2，…，i_k 取 1，2，…，n 中的 k 个不同的值)，等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

总成立，则称 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 是相互独立的.

如 $n=3$ 时，只有当

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),$$
$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),$$
$$P(A_1A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)P(A_1)$$

都成立时，才能说 A_1，A_2，A_3 是相互独立的.

例 18 一个家庭有两个孩子，现观察两个孩子的性别. 设

$A_1=\{$第一个孩子是男孩$\}$，$A_2=\{$第二个孩子是男孩$\}$，

$A_3=\{$两个孩子性别不同$\}$，

则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{4},$$

所以

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),$$
$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),$$

由定义 6 可知，A_1，A_2，A_3 两两相互独立.

但

$$P(A_1A_2A_3)=0,$$

$$P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8},$$

$$P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

由定义 6 可知，A_1，A_2，A_3 不相互独立.

综上所述，由 n 个事件两两相互独立不能判断 n 个事件相互独立；反之，n 个事件相互独立却能推出 n 个事件两两相互独立.

判断多个事件的相互独立性，往往也是根据问题的实际意义进行分析确定.

例 19　不断地掷一枚骰子，直到首次出现六点为止. 求试验在第十次终止的概率.

解　设 $A_i=\{$第 i 次不出现六点$\}$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$，则

$$P(A_i)=\frac{5}{6}\quad(i=1, 2, \cdots, 9),\ P(\overline{A}_{10})=\frac{1}{6},$$

依题意，A_1，A_2，…，A_9，A_{10} 相互独立，由定理 6 可知，A_1，A_2，…，A_9，$\overline{A}_{10}$ 相互独立，于是

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_9\overline{A}_{10})&=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_9)P(\overline{A}_{10})\\&=\left(\frac{5}{6}\right)^9\times\frac{1}{6}=\frac{5^9}{6^{10}}.\end{aligned}$$

例 20　称一个元件能正常工作的概率为这个元件的可靠性，由元件组成的一个系统能正常工作的概率为这个系统的可靠性. 设由三个元件分别构成系统Ⅰ(图 5_6)和系统Ⅱ(图 5_7)，若构成各系统的每个元件的可靠性均为 $p(0<p<1)$，且各个元件能否正常工作是相互独立的，求每个系统的可靠性.

(Ⅰ)

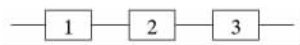


图 5_6

(Ⅱ)

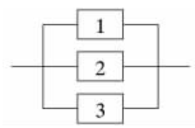


图 5_7

解　设 $A_i=\{$第 i 个元件能正常工作$\}$ $(i=1, 2, 3)$，

$B=\{$系统能正常工作$\}$，

则 $P(A_i)=p(i=1, 2, 3)$. 依题意可知，事件 A_1，A_2，A_3 相互独立. 于是

(Ⅰ) $B=A_1A_2A_3$，

$$P(B)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=p^3;$$

(Ⅱ) $B=A_1\cup A_2\cup A_3$，

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=1-(1-p)^3.\end{aligned}$$

二、伯努利概型

1. 伯努利概型

将一个试验重复进行多次，而每次试验都是相互独立的，即相应于每一次试验的随机事件的概率都不依赖于其他各次试验的结果．称这类试验为重复独立试验．

定义 7 若一个试验只有两个对立的可能结果 A 和 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p(0<p<1)$．将此试验重复独立进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验，或称为伯努利概型．

伯努利概型有着广泛的应用．例如，从具有一定次品率的一批产品中逐件地抽取产品，如果采用的是放回抽样，那么，可以把每抽取一次产品作为一次试验，又因为每次抽取产品的次品率是相同的，所以，这样抽取 n 次就构成了一个 n 重伯努利试验．即使是不放回抽样，当产品批量很大时，也可以将其近似地当作重复独立试验来处理．如果试验有多种可能的结果，我们可以根据问题的需要，将多个结果划分为两组：A 和 $\overline{A}$，从而可以用伯努利概型来处理．

2. 二项概率公式

在 n 重伯努利试验中，事件 A 可能发生的次数是：0，1，2，…，n．以下讨论在 n 次重复独立试验中事件 A 恰好发生 k 次（$0\leqslant k\leqslant n$）的概率 $P_n(k)$．

先讨论 $n=4$，$k=3$ 的情形．

设 $A_i=\{$事件 A 在第 i 次试验发生$\}$（$i=1，2，3，4$），显然，重复独立试验 4 次，事件 A 恰好发生 3 次的方式共有 $C_4^3=4$ 种：

$$\overline{A}_1A_2A_3A_4,\ A_1\overline{A}_2A_3A_4,$$
$$A_1A_2\overline{A}_3A_4,\ A_1A_2A_3\overline{A}_4,$$

$$\begin{aligned}P_4(3)&=P(\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4)\\&=C_4^1p^3(1-p).\end{aligned}$$

一般地，在 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好发生 k 次（$0\leqslant k\leqslant n$）的概率可以类似推得：

$$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\quad (k=0，1，\cdots，n).$$

称此式为二项概率公式．并且有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}P_n(k)&=P_n(0)+P_n(1)+\cdots+P_n(n)\\&=C_n^0p^0(1-p)^{n-0}+C_n^1p^1(1-p)^{n-1}+\cdots+C_n^np^n(1-p)^{n-n}\\&=[p+(1-p)]^n=1.\end{aligned}$$

例 21 设一批产品中有20％的次品，进行重复抽样检查，共取 5 件样品．

（1）求 5 件样品中恰有 3 件次品的概率；

（2）求 5 件样品中至少有一件次品的概率.

解　设 $A=\{$抽到次品$\}$，则 $P(A)=0.2$. 这是 $n=5$，$p=0.2$ 的二项概率问题.

（1）$k=3$，$P_5(3)=C_5^3p^3(1-p)^{5-3}=0.0512$；

（2）$P_5(1)+P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$

$$=1-P_5(0)=1-C_5^0\cdot 0.2^0\cdot 0.8^5=0.6723.$$

习题 5_4

1. 设 A 和 B 为两个相互独立的事件，已知 $P(A\cup B)=0.6$，$P(A)=0.4$. 求 $P(B)$.

2. 设三台机器相互独立地运转着. 第一台、第二台、第三台机器不发生故障的概率依次为 0.9，0.8，0.7. 求这三台机器中至少有一台发生故障的概率：

3. 人造卫星带回甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.9 和 0.95. 在两批种子中各随机地取一粒，计算事件 A 和 B 的概率.

（1）$A=\{$两粒都发芽$\}$；

（2）$B=\{$恰有一粒发芽$\}$.

4. 一颗质地均匀的骰子，连掷 5 次，求有三次出现六点的概率.

5. 不断地掷一枚骰子，直到首次出现六点为止. 求第三次停止的概率.

6. 袋子中有 7 个红球和 3 个白球，连续取球三次，每次任取一只，不放回抽样. 求第三次取得红球的概率.

7. 一项建筑工程向甲、乙两家公司招标. 假定甲、乙两公司的投标是相互独立的，且甲公司提交该项投标的概率是 0.8，乙公司提交该项投标的概率是 0.7，试分别计算这两家公司共提交 0 项、1 项和 2 项投标的概率.

8. 某种电子元件的寿命在 1000h 以上的概率为 0.8，求三只这种电子元件使用 1000h 以后，最多只有一只损坏的概率.

9. 某系统由三个元件 A，B，C 按图 5_8 所示的方式构成. 设元件 A，B，C 正常工作与否是相互独立的，其不能正常工作的概率依次为 0.3，0.2，0.2. 求该系统不能正常工作的概率.

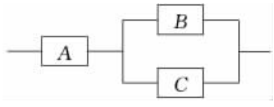


图 5_8

10. 某系统由四个元件 A，B，C，D 按图 5_9 所示的方式构成. 设元件 A，B，C，D 正常工作的概率均为 0.8，且各元件正常工作与否是相互独立的，求

该系统的可靠性.

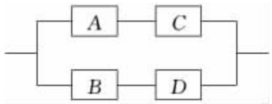


图 5_9

11. 甲、乙、丙三人独立地去破译一个密码，他们能译出的概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，问能将此密码译出的概率是多少？

12. 某竞赛分两个阶段，先进行个人比赛，再进行团体比赛. 团体比赛以小组为单位，每组三人. 按照规定，个人比赛获胜者才有资格参加第二阶段的团体比赛. 由甲、乙、丙三人组成的小组在个人比赛中获胜的概率均为 0.7. 若只有一个人获胜，在团体比赛中胜出的概率为 0.2；若有两个人获胜，在团体比赛中胜出的概率为 0.5；若三人都获胜，在团体比赛中胜出的概率为0.8. 求他们最终获胜的概率.

13. 某单位电话总机的占线率为 0.4，其中某车间分机的占线率为 0.3，假定电话总机及分机占线与否相互独立. 现从外部打电话给该车间，求：

(1) 第一次能打通的概率；

(2) 第二次才打通的概率.

第五章习题参考答案

习题 5_1

1.(1) $U=\{2, 3, \cdots, 12\}$；

(2) $U=\{H, TH, TTH, T\cdots TH, \cdots\}$；

(3) $U=\{10, 11, 12, \cdots\}$；

(4) $U=\{$(红，红)，(红，白)，(红，蓝)，(白，白)，(白，红)，(白，蓝)，(蓝，蓝)，(蓝，红)，(蓝，白)$\}$；

(5) $U=\left\{0, \frac{1}{50}, \cdots, \frac{50\times 100}{50}\right\}$；

(6) $U=\{2, 3, 4, 5, 6\}$；

(7) $U=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$；

(8) $U=\{(x, y) \mid x^2+y^2<1\}$.

2. 略.

3. (1) ABC；(2) $A\cup B\cup C$；

(3) $AB\overline{C}$；

(4) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

(5) $A\overline{B}\overline{C}$；

(6) $A(\overline{B}\cup\overline{C})$ 或 $A\,\overline{BC}$；

(7) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

(8) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$；

(9) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

(10) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

(11) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$ 或 $AB\cup BC\cup CA$.

习题 5_2

1. (1) 0.8；(2) $\frac{1}{20}$；(3) $\frac{13}{15}$；(4) $\frac{37}{60}$.

2. $\frac{5}{8}$.　　3. $\frac{1}{7}$；$\frac{1}{21}$.　　4. 0.096.

5. $\frac{1}{12}$；$\frac{1}{20}$.　　6. $\frac{1}{15}$.

7. (1) $p_1=\frac{10}{19}$；(2) $p_2=\frac{9}{19}$.

习题 5_3

1. (1) $\frac{1}{12}$；(2) $\frac{1}{6}$；(3) $\frac{1}{3}$.　　2. 0.3.

3. $\frac{1}{4}$.　　4. 0.72.　　5. $\frac{19}{28}$.

6. 0.986.　　7. 0.973.

8. (1) $\frac{1}{15}$；(2) $\frac{7}{30}$；(3) $\frac{7}{15}$；(4) $\frac{1}{3}$；(5) $\frac{3}{10}$.

*9. 0.76.　　*10. (1) 0.52；(2) $\frac{12}{13}$.

习题 5_4

1. $\frac{1}{3}$.　　2. 0.496.　　3. (1) 0.855；(2) 0.14.

4. 0.0322.　　5. $\frac{25}{216}$.　　6. 0.7.　　7. 0.06；0.38；0.56.

8. 0.896.　　9. 0.328.　　10. 0.8704.

11. $\frac{3}{5}$.　　12. 0.5327.　　13. (1) 0.42；(2) 0.2436.

附　　录

凡是本教材涉及到的加法原理、乘法原理、排列组合问题，n，r，$r_i(i=1, 2, \cdots, n)$均表示正整数.

一、两个基本原理

1. 加法原理

如果完成某一件事情有 n 种不同的方式，而第 i 种方式又有 $r_i(i=1, 2, \cdots, n)$种不同的方法，则完成这件事共有

$$r=r_1+r_2+\cdots+r_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

种不同的方法.

例如，某人从甲地去乙地，在一天之内可以乘坐汽车、火车或飞机，而每天汽车有 10 个班次，火车有 5 个班次，飞机有 2 个班次，则此人在一天之内从甲地到乙地有

$$10+5+2=17$$

种不同的走法.

2. 乘法原理

如果完成一件事情必须经过 n 个步骤，而第 i 个步骤有 $r_i(i=1, 2, \cdots, n)$种不同的方法，则完成这件事共有

$$r=r_1 r_2\cdots r_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

种不同的方法.

例如，完成某项工作必须经过三个步骤，第一个步骤有 2 种不同的方法，第二个步骤有 5 种不同的方法，第三个步骤有 4 种不同的方法，那么完成这项工作共有

$$2\times5\times4=40$$

种不同的方法.

二、排列

从 n 个不同的元素中任取 r（$r\leqslant n$）个，按一定顺序排成一列，称之为排列，如果要求排列中诸元素互不相同，则称其为选排列；反之，如果排列中可以有相同的元素，则称为可重复排列.

从 n 个不同的元素中任取 r（$r\leqslant n$）个，所有不同的选排列种数称为排列数，记为 P_n^r. 根据乘法原理，这种选排列共有

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

种不同的排法.

当 $r=n$ 时，称 P_n^n 为全排列数，记为 $n!$，此时，

$$P_n^n=n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1.$$

规定当 $n=0$ 时，$0!=1$. 于是，P_n^r 也可以表示为

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

对于可重复排列的排列数，根据乘法原理，有 n^r 种不同的排法.

三、组合

从 n 个不同的元素中任取 r（$r\leqslant n$）个不同元素，不考虑次序，组成一组，称之为组合，这种不同的组合数为

$$C_n^r=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

例如，已知甲袋中装有 2 只白球、3 只红球，乙袋中装有 4 只白球、5 只红球. 从甲袋中任意取出 2 只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取出 3 只球，那么共有

$$C_5^2C_{11}^3=\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{11!}{3!8!}=1650$$

种不同的分组方法.

第六章　随机变量及其概率分布

为了对随机试验进行全面和深入的研究，从中揭示出客观存在的统计规律性，我们常把随机试验的结果与实数对应起来，即把随机试验的结果数量化，引入随机变量的概念. 随机变量是概率论与数理统计的最基本的概念之一，本章将介绍随机变量及其分布和各种常用的随机变量.

第一节　随机变量及其分布函数

一、随机变量的概念

对一随机试验，其结果可以是数量性的，也可以是非数量性的. 对这两种情况，都可以把试验结果数量化.

例 1　设有10件产品，其中正品 5 件，次品 5 件，现从中任取 3 件产品，问这 3 件产品中的次品件数是多少？

显然，次品件数可以是 0，1，2，3，即试验结果是数量性的. 用 X 表示取到的 3 件产品中的次品件数，则可以分别用 $X=0，1，2，3$ 表示这三件产品中没有次品、有 1 件次品、有 2 件次品和有 3 件次品. 这里，X 是一个变量，它究竟取什么值与试验的结果有关，即与试验的样本空间中的基本事件有关，仍用 U 表示试验的样本空间，用 e 表示样本空间中的元素，即基本事件，并记成 $U=\{e\}$. 例 1 中试验的样本空间为

$U=\{e\}=\{$没有次品，有 1 件次品，有 2 件次品，有 3 件次品$\}$.

因此，可把变量 X 看作定义在样本空间 U 上的函数：

$$X=\begin{cases}0, & e=\text{“没有次品”},\\ 1, & e=\text{“有 1 件次品”},\\ 2, & e=\text{“有 2 件次品”},\\ 3, & e=\text{“有 3 件次品”}.\end{cases}$$

从而可以记为：$X=X(e)$. 由于基本事件的出现是随机的，因此$X(e)$的取值也随机，称 $X(e)$为随机变量.

例 2　抛掷一枚硬币，观察出现正反面的情况.

该试验有两个可能的结果：出现正面和出现反面，即

$$U=\{e\}=\{\text{出现正面，出现反面}\},$$

试验结果是非数量性的. 为了便于研究，可以用一个数代表一个试验结果，例如用 1 代表出现正面，用 0 代表出现反面. 设

$$X=X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{“出现正面”},\\ 0, & e=\text{“出现反面”}.\end{cases}$$

X 是定义在样本空间 U 上的函数，也是随机变量.

定义 1　设试验 E 的样本空间 $U=\{e\}$，如果对每一个 $e\in U$，都有一个实数 $X(e)$ 与之对应，得到一个定义在 U 上的单值实值函数 $X(e)$，称 $X(e)$ 为随机变量，并简记为 X.

随机变量随着试验结果而取不同的值，它是根据试验结果取值的变量. 现实中的随机变量很多，例如，掷一枚骰子出现的点数；射手向某一目标射击，直到击中该目标时的射击次数；炮弹落地点与目标之间的距离，等等. 这些例子对应的随机变量所取的可能值分别为有限个、可列个和连续值.

需要指出，随机变量与普通函数有差别：普通函数是定义在实数轴上的，而随机变量是定义在样本空间上的，样本空间中的元素不一定是实数. 另外，随机变量的取值随试验结果而定，由于试验的各个结果的发生有一定的概率，因而随机变量取各个值也有一定的概率，这也是随机变量与普通函数的区别.

引入随机变量以后，随机事件可以用随机变量来表示. 例如，在例 1 中，3 件产品中的次品件数多于 1 这个事件可以表示为 $X>1$. 这样，可以把对事件的研究转化为对随机变量的研究. 由于有了数量化的随机变量，从而有可能使用微积分等数学工具研究随机试验.

二、分布函数

为了研究随机变量的概率规律，并且由于随机变量 X 的可能值不一定能逐个列出，因此我们在一般情况下需研究随机变量落在某区间 $(x_1, x_2]$ 中的概率，即求 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}$，但由于

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{X\leqslant x_2\}-P\{X\leqslant x_1\},$$

由此可见，要研究 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}$ 就归结为研究形如 $P\{X\leqslant x\}$ 的概率问题了. 不难看出，$P\{X\leqslant x\}$ 的值常随不同的 x 而变化，它是 x 的函数，我们称这个函数为分布函数.

定义 2　设 X 是随机变量，x 为任意实数，函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}$$

称为 X 的分布函数.

由定义 2 可以看出，分布函数 $F(x)$ 实际上就是随机变量 X 落入区间 $(-\infty, x]$ 上的概率值.

例 3　一个象棋选手与对手进行一局比赛，规定赢棋得 2 分，和棋得 1 分，

输棋得 0 分. 根据实力对比，这名棋手赢棋的概率为 0.5，和棋的概率为 0.3，输棋的概率为 0.2. 如果将这名棋手在这局比赛中所得分数记为 X，求随机变量 X 的分布函数.

解　X 的可能取值为 0，1，2. 取这些值的概率依次为 0.2，0.3，0.5.

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}$，而$\{X\leqslant x\}$是不可能事件，所以

$$F(x)=0;$$

当 $0\leqslant x<1$ 时

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}=0.2;$$

当 $1\leqslant x<2$ 时

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X\leqslant x\}=P(\{X=0\}\cup\{X=1\})\\&=P\{X=0\}+P\{X=1\}=0.2+0.3=0.5;\end{aligned}$$

当 $x\geqslant 2$ 时

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X\leqslant x\}=P(\{X=0\}\cup\{X=1\}\cup\{X=2\})\\&=0.2+0.3+0.5=1.\end{aligned}$$

综上所述

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.2, & 0\leqslant x<1,\\ 0.5, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

它的图形如图 6_1 所示.

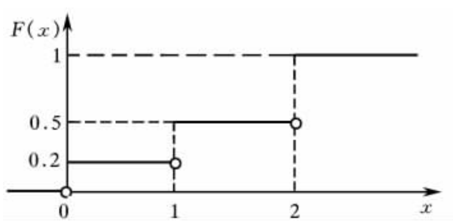


图 6_1

由分布函数的定义可知

$$\begin{aligned}P\{x_1<X\leqslant x_2\}&=P\{X\leqslant x_2\}-P\{X\leqslant x_1\}\\&=F(x_2)-F(x_1),\end{aligned}$$

即事件$\{x_1<X\leqslant x_2\}$的概率等于分布函数 $F(x)$在该区间上的增量.

分布函数具有以下一些基本性质：

(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1\quad(-\infty<x<+\infty)$；

(2) $F(x_1)\leqslant F(x_2)\ (x_1<x_2)$，即 $F(x)$是单调非减的；

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

(4) $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$是右连续的.

以上各性质可结合图 6_1 加以说明.

在引进了随机变量和分布函数后，我们就能利用高等数学的许多结果和方法来研究各种随机现象了，它们是概率论的两个重要而基本的概念. 本章第二节和第三节，我们将分别以离散和连续两种类型来深入地研究随机变量及其分布函数.

习题 6_1

1. 填空题：

随机变量 X 的分布函数 $F(x)$的定义域是________，值域是________.

2. 一个口袋中有 6 个球，球上分别标有-3，-3，1，1，1，2 这样的数字. 从这个口袋中任取一个球，求取得的球上标明的数字 X 的分布函数，并画出 $F(x)$的图形.

第二节　离散型随机变量

一、离散型随机变量的定义

定义 3　对于随机变量 X，如果它只能取有限个或可列个值，则称 X 为离散型随机变量.

例 1 中的随机变量 X 所有可能取的值是 4 个，例 2 中的随机变量 X 所有可能取的值是 2 个，是属于有限个值的情况，它们都是离散型随机变量. 又例如，射手向某一目标射击，直到击中该目标时的射击次数是个随机变量，它所有可能取的值是 1，2，3，…，是属于可列个值的情况，它也是离散型随机变量.

设离散型随机变量 X 所有可能取的值是 x_1，x_2，…，x_k，…，为了完全地描述 X，除了知道 X 可能取的值以外，还要知道 X 取各个值的概率. 设

$$P\{X=x_k\}=p_k \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{1}$$

称式(1)为离散型随机变量的概率分布或分布律. 分布律也常用表格来表示(表 6_1).

表 6_1

X	x_1	x_2	x_3	…	x_k	…
P	p_1	p_2	p_3	…	p_k	…

根据概率的定义容易推得如下两个基本性质：

(1) $p_k \geqslant 0 \quad (k=1, 2, \cdots)$； (2)

(2) $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1.$ (3)

例 4 讨论例1中的随机变量 X 的概率分布.

解 设 X 是取出的 3 件产品中的次品件数，它所有可能取的值是 0，1，2，3．下面分别计算 $P\{X=0\}$，$P\{X=1\}$，$P\{X=2\}$ 和 $P\{X=3\}$.

这是古典概型的抽球问题，容易算出

$$P\{X=0\}=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1\}=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5}{12},$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{5}{12},$$

$$P\{X=3\}=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}.$$

它们满足式(2)和式(3).

例 5 如图 6_2 所示，电子线路中装有两个并联的继电器．设这两个继电器是否接通具有随机性，且彼此独立．已知每个继电器接通的概率为 0.8，记 X 为线路中接通的继电器的个数．求：

(1) X 的概率分布；

(2) 线路接通的概率；

(3) 分布函数 $F(x)$.

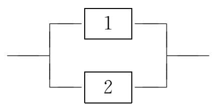


图 6_2

解 (1) 随机变量 X 仅可能取 0，1，2 三个值.

设 A_i="第 i 个继电器接通"($i=1,2$)，则 A_1，A_2 相互独立，且 $P(A_1)=P(A_2)=0.8$．于是

$$P\{X=0\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)=0.2\times0.2=0.04,$$

$$\begin{aligned}P\{X=1\}&=P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)\\&=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)\\&=0.8\times0.2+0.2\times0.8=0.32,\end{aligned}$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.8\times0.8=0.64.$$

(2) 因为此电路是并联电路，所以，只要有一个继电器接通，整个线路就接通．于是，线路接通的概率为

$$\begin{aligned}P\{X\geqslant1\}&=P\{X=1\}\cup P\{X=2\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}\\&=0.32+0.64=0.96.\end{aligned}$$

(3)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.04, & 0\leqslant x<1,\\ 0.04+0.32=0.36, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

$F(x)$的图形见图 6_3.

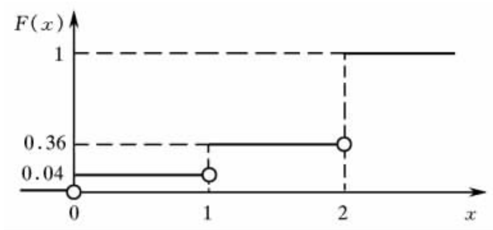


图 6_3

由例 5 可以看出，离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$是阶梯函数，其图形是由若干直线组成的阶梯形的不连续曲线.

一般地，设离散型随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=x_k\}=p_k$ $(k=1, 2, \cdots)$，则 X 的分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\}=\sum_{x_k\leqslant x}p_k. \tag{4}$$

式(4)中是对所有满足 $x_k\leqslant x$ 的 p_k 求和.

二、常见的离散型随机变量的概率分布

下面介绍三种常见的离散型随机变量的概率分布.

1. 两点分布

如果随机变量 X 只可能取 1 和 0 两个值，并且它的概率分布为

$$P\{X=1\}=p,\ P\{X=0\}=1-p\ (0<p<1), \tag{5}$$

则称 X 服从参数为 p 的两点分布.

两点分布也称为(0_1)分布，是一种最简单然而却有着非常重要用途的离散型随机变量的分布. 对于一个随机试验，如果只有两个可能的结果，即样本空间 U 只包含两个元素，则总能在 U 上定义一个服从两点分布的随机变量，用它来描述该随机试验. 这对于试验结果是非数量性的情况特别适用，例如例 2，还有某人一次射击是否中靶，检查产品的质量是否合格，明天是否下雨，等等.

2. 二项分布

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \cdots, n). \tag{6}$$

式中，$0<p<1$，$q=1-p$，则称 X 服从参数为 n，p 的二项分布，记作 $X\sim B(n, p)$.

由于 $P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$ 正好是二项式 $(p+q)^n$ 的展开式中出现 p^k 的项，因此称此分布为二项分布.

在上一章中介绍的伯努利概型，其中事件 A 发生的次数是个随机变量，这个随机变量服从参数为 n，p 的二项分布，这是二项分布的实际背景.

服从参数为 n，p 的二项分布的随机变量 X 所有可能取的值有 $n+1$ 个，即 $0, 1, 2, \cdots, n$. 特别地，当 $n=1$ 时，二项分布成为两点分布，因此也可用 $B(1, p)$ 表示两点分布.

例 6 某批产品的合格率为98%，现随机地从这批产品中做有放回地抽样 20 次，每次抽一个产品，问抽得的 20 个产品中恰好有 $k(k=0, 1, 2, \cdots, 20)$个为合格品的概率是多少？

解 我们将抽检一个产品看其是否为合格品看成一次试验，显然，抽检 20 个产品就相当做 20 重伯努利试验，以 X 记 20 个产品中合格品的个数，那么 X 服从 $B(20, 0.98)$，从而

$$P\{X=k\}=C_{20}^k \cdot 0.98^k \cdot 0.02^{20-k} \quad (k=0, 1, 2, \cdots, 20).$$

若在例 6 中将参数 20 改为 200 或更大，显然此时直接计算该概率就显得相当麻烦. 为此我们不加证明地给出一个当 n 很大而 p(或 $1-p$)很小时的近似计算公式.

定理 1(泊松定理) 设 $\lambda>0$ 是一常数，n 是任意正整数，设 $np_n=\lambda$，则对任意一固定的非负整数 k，有

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

由于 $\lambda=np_n$ 是常数，所以当 n 很大时 p_n 必定很小，因此，上述定理表明，当 n 很大 p_n 很小(通常 $n>10$，$p_n<0.1$ 即可)时，有以下计算公式

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{7}$$

其中，$\lambda=np_n$.

例 7 某十字路口有大量汽车通过，假设每辆汽车在这里发生交通事故的概率为 0.001，如果每天有 5000 辆汽车通过这十字路口，求发生交通事故的次数不少于 2 的概率.

解 此处 $n=5000$，$p=0.001$，$\lambda=np=5$，则

$$P\{X\geqslant 2\}=\sum_{k=2}^{5000} C_{5000}^k \cdot 0.001^k \cdot 0.999^{5000-k}$$

$$=1-P\{X<2\}=1-\sum_{k=0}^{1}P\{X=k\}$$
$$=1-0.999^{5000}-5\times0.999^{4999}$$
$$\approx1-\frac{5^0e^{-5}}{0!}-\frac{5e^{-5}}{1!}.$$

查表可得

$$P\{X\geqslant2\}=1-0.00673-0.03369=0.95958.$$

3. **泊松分布**

如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots),\tag{8}$$

式(8)中，$\lambda>0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记作 $X\sim P(\lambda)$.

在实际问题中，有很多随机变量服从泊松分布．例如，在一个时间间隔内，某地区发生的交通事故的次数，某电话总机接到的呼叫次数，放射性物质发出的 α 粒子的个数，某容器内部的细菌数，等等，都可以用服从某一参数的泊松分布的随机变量来描述.

有关泊松分布的计算可以查附表 1.

例 8　某电话总机每分钟接到的呼叫次数服从参数为5的泊松分布，求：

(1) 每分钟恰好接到 7 次呼叫的概率；

(2) 每分钟接到的呼叫次数大于 4 的概率.

解　设每分钟总机接到的呼叫次数为 X，则 $X\sim P(5)$，$\lambda=5$.

(1) $P\{X=7\}=\dfrac{5^7e^{-5}}{7!}$，由附表 1 可查到，其值为 0.10444.

(2) $$P\{X>4\}=1-P\{X\leqslant4\}$$
$$=1-[P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}+P\{X=4\}],$$

由附表 1 可以查到

$$P\{X=0\}=0.00673,\ P\{X=1\}=0.03369,$$
$$P\{X=2\}=0.08422,\ P\{X=3\}=0.14037,$$
$$P\{X=4\}=0.17547,$$

从而

$$P\{X>4\}=0.55952.$$

习题 6_2

一、单项选择题

1. 设 X 是离散型随机变量，则它的概率分布是(　　).

(A)

X	0	1	2
P	$-1/2$	1	$1/2$

(B)

X	0	1	2
P	$1/3$	$1/3$	$1/4$

(C)

X	0	1	2
P	$1/4$	$1/4$	$3/2$

(D)

X	0	1	2
P	$1/6$	$1/3$	$1/2$

2. **某城市每月发生的交通事故的次数** X **服从** $\lambda=4$ **的泊松分布，则每月交通事故的次数大于** 10 **的概率是**(　　).

(A) $\dfrac{4^{10}}{10!}e^{-4}$　　(B) $\displaystyle\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{4^k}{k!}e^{-4}$

(C) $\displaystyle\sum_{k=11}^{+\infty}\frac{4^k}{k!}e^{-4}$　　(D) $\displaystyle\sum_{k=11}^{+\infty}\frac{4^k}{10!}e^{-4}$

二、其他类型题

1. **设随机变量** X **的概率分布为**

$$P\{X=k\}=ak\quad(k=0,1,2,\cdots,n),$$

试确定常数 a.

2. **设随机变量** X **的概率分布为** $P\{X=k\}=\dfrac{a}{2^k}$ $(k=0,1,2,\cdots)$，**试确定常数** a.

3. **盒中有** 5 **只乒乓球，分别编为** 1，2，3，4，5 **号，从中同时取出** 3 **只球，用** X **表示** 3 **只球中的最大编号，写出** X **的概率分布及分布函数**.

4. **抛掷一枚硬币，直到出现正面时为止，求抛掷次数的概率分布**.

5. **一批零件中有** 9 **个正品和** 3 **个次品，现从中任取一个用于安装机器．如果取出的是次品，则不再放回，而再取下一个，直到取到正品为止．求在取到正品以前已取出的次品数的概率分布**.

6. 10 **门炮同时向一敌舰射击一发炮弹，当有不少于两发炮弹击中时，敌舰将被击沉．设每门炮弹射击一发炮弹的命中率为** 0.6，**求敌舰被击沉的概率**.

7. **设** X **服从泊松分布，并且已知** $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，**求** $P\{X=4\}$.

第三节　连续型随机变量

一、连续型随机变量的定义

上一节我们研究了离散型随机变量，这类随机变量的特点是它的可能取值及与其相对应的概率能被逐个地列出．这一节我们将要研究的连续型随机变量就不具有这样的性质了．连续型随机变量的特点是它的可能取值连续地充满某个区间甚至整个数轴．例如，测量一个工件长度，在理论上说这个长度的值 X 可以取区间 $(0, +\infty)$ 内的任何一个值．此外，连续型随机变量取某特定值的概率总是零．例如，抽检一个工件，其长度 X 丝毫不差刚好是其固定值(如 1.824cm)的事件 $\{X=1.824\}$ 几乎是不可能的，应认为 $P\{X=1.824\}=0$．因此讨论连续型随机变量在某点的概率是毫无意义的．于是，对于连续型随机变量就不能采用像对离散型随机变量那样的方法进行研究了．

定义 4　若对随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数 $f(x)$，使对于任意实数 x 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x, \tag{9}$$

则称 X 为连续型随机变量．其中 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度或分布密度．

由式(9)知，连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是连续函数．由分布函数的性质 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$ 及 $F(x)$ 单调不减知，$F(x)$ 是一条位于直线 $y=0$ 与 $y=1$ 之间的单调不减的连续曲线．

由定义 4 可知，$f(x)$ 具有以下性质：

(1) $f(x)\geqslant 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$；

(3) $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \quad (x_1\leqslant x_2)$；

(4) 若 $f(x)$ 在 x 点处连续，则有 $F'(x)=f(x)$．

前面我们曾指出，对连续型随机变量 X 而言，它取某特定值 a 的概率为零，即 $P\{X=a\}=0$．这样，在计算连续型随机变量 X 取值于某个区间的概率时，可以不必区分该区间是开区间或闭区间或半开半闭区间，即

$$\begin{aligned} P\{x_1<X\leqslant x_2\}&=P\{x_1\leqslant X<x_2\}=P\{x_1<X<x_2\}=P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}\\ &=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{10}$$

由积分的几何意义可知，$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$ 是在区间(x_1, x_2)上$f(x)$ 图形之下的曲边梯形面积，见图 6_4. 因此，X 取值于 (x_1, x_2) 的概率 $P\{x_1<X<x_2\}$就是该曲边梯形的面积.

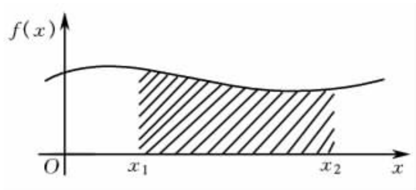


图 6_4

例 9　某公共汽车从上午7时开始，每 15min 来一辆车，如某乘客到达此站的时间是 7 时到 7 时半之间的均匀分布的随机变量，试求他等车少于 5min 的概率.

解　设乘客于 7 时过 Xmin 到达车站，由于 X 在$[0, 30]$上是均匀分布的，于是有

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 0\leqslant x\leqslant 30,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然，只有乘客在 7:10 到 7:15 之间或 7:25 到 7:30 之间到达车站时，等车的时间才少于 5min，因此所求概率为

$$P\{10<X\leqslant 15\}+P\{25<X\leqslant 30\}=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}\mathrm{d}x+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

二、常见的连续型随机变量的概率密度

1. 均匀分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{11}$$

则称 X 在区间(a, b)内服从均匀分布. 由式(9)易得

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}\tag{12}$$

密度函数 $f(x)$和分布函数 $F(x)$的图形分别如图 6_5 和图 6_6 所示.

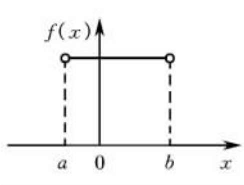


图 6_5

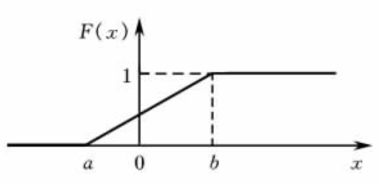


图 6_6

因为对于区间(a,b)内任一长度为 l 的子区间$(c,c+l)$，$a\leqslant c<c+l\leqslant b$，有

$$P\{c<X\leqslant c+l\}=\int_c^{c+l}f(x)\mathrm{d}x=\int_c^{c+l}\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{l}{b-a},$$

所以服从均匀分布的随机变量 X 落在(a,b)区间内的某子区间的概率与子区间的长度成正比，而与子区间的位置无关.

2. 正态分布

设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty),\tag{13}$$

其中 μ，$\sigma(\sigma>0)$为常数，则 X 服从参数为 μ，σ 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 正态分布是概率论和数理统计中最重要的一种分布. 它有着广泛的应用. 例如，测量某零件长度的误差，一个地区成年男性的身高，某地区居民的年收入，海洋波浪的高度，等等，都可以看成服从或近似服从正态分布. 正态分布在概率统计的理论与应用中占有特别重要的地位.

参数 μ，σ 的意义将在第八章中说明，$f(x)$的图形呈钟形，如图 6_7 所示，它具有如下性质：

(1) 曲线关于 $x=\mu$ 对称；

(2) 曲线在 $x=\mu$ 处取得最大值；

(3) 曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点；

(4) 曲线以 Ox 轴为渐近线；

(5) 若固定 μ，当 σ 越小时图形越尖陡(图 6_8).

由式(13)得 X 的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t.\tag{14}$$

特别地，当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，称 X 服从标准正态分布，其概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x)$，$\Phi(x)$表示，即有

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\tag{15}$$

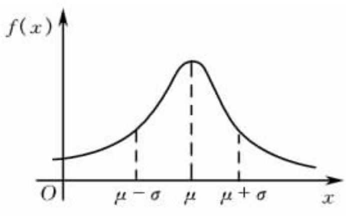


图 6_7

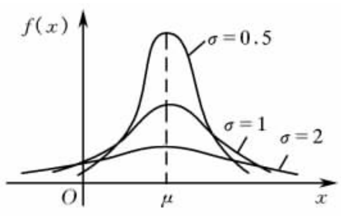


图 6_8

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t. \tag{16}$$

下面介绍关于正态分布的计算，首先介绍关于标准正态分布的计算.

现已编制了 $\Phi(x)$ 的数值表，可供查用，见附表 2.

由式(16)，对 $X\sim N(0, 1)$，有

$$P\{x_1<X<x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x_2}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{x_1}\varphi(x)\mathrm{d}x$$
$$=\Phi(x_2)-\Phi(x_1). \tag{17}$$

特别地

$$P\{X>x_1\}=\int_{x_1}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{x_1}\varphi(x)\mathrm{d}x$$
$$=1-\Phi(x_1), \tag{18}$$

$$P\{X<x_2\}=\int_{-\infty}^{x_2}\varphi(x)\mathrm{d}x=\Phi(x_2). \tag{19}$$

在附表 2 中，只对 $x\geqslant 0$ 给出了 $\Phi(x)$ 的值，当 $x<0$ 时，可以使用下面的公式计算 $\Phi(x)$ 的值.

定理 2 设 $X\sim N(0, 1)$，则

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x). \tag{20}$$

证 由 $\Phi(x)$ 的定义知

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

作变量代换，令 $t=-y$，则

$$\Phi(-x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y$$
$$=1-\Phi(x).$$

例 10 设 $X\sim N(0, 1)$，计算：

(1) $P\{1<X<2\}$；(2) $P\{X\leqslant 1.5\}$；(3) $P\{|X|<2.48\}$.

解　(1) 使用式(17)，得到

$$P\{1<X<2\}=\Phi(2)-\Phi(1)=0.9772-0.8413=0.1359;$$

(2) 使用式(19)，得到

$$P\{X\leqslant 1.5\}=P\{X<1.5\}=\Phi(1.5)=0.9333;$$

(3) $$\begin{aligned}P\{|X|<2.48\}&=P\{-2.48<X<2.48\}\\&=\Phi(2.48)-\Phi(-2.48)\\&=\Phi(2.48)-[1-\Phi(2.48)]\\&=2\Phi(2.48)-1\\&=2\times 0.9934-1=0.9868.\end{aligned}$$

一般地，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 的分布函数 $F(x)$ 可通过变量代换化成标准正态分布函数 $\Phi(x)$，然后查表求得 $F(x)$ 的值. 事实上，由

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t,$$

令 $u=\dfrac{t-\mu}{\sigma}$，则

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}P\{x_1<X\leqslant x_2\}&=F(x_2)-F(x_1)\\&=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right),\end{aligned}\tag{21}$$

$$P\{X>x_1\}=1-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right),\tag{22}$$

$$P\{X<x_2\}=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right).\tag{23}$$

例 11　设 $X\sim N(2,4)$，计算：

(1) $P\{-1<X<2\}$；(2) $P\{|X|>1\}$.

解　利用式(21)，可得

(1) $$\begin{aligned}P\{-1<X<2\}&=\Phi(0)-\Phi(-1.5)\\&=\Phi(0)-[1-\Phi(1.5)]=0.4332;\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P\{|X|>1\}&=1-P\{|X|\leqslant 1\}=1-P\{-1<X<1\}\\&=1-[\Phi(-0.5)-\Phi(-1.5)]\\&=1-[\Phi(1.5)-\Phi(0.5)]=0.7583.\end{aligned}$$

例 12　公共汽车车门的高度是按成年男子与车门顶碰头的机会在1%以下来设计的. 设男子身高 X 服从 $\mu=170(\text{cm})$，$\sigma=6(\text{cm})$ 的正态分布，即 $X\sim N(170,6^2)$，问车门的高度应如何确定？

解 设车门高度为 h(cm)，按设计要求 $P\{X \geqslant h\} \leqslant 0.01$ 或 $P\{X<h\} \geqslant 0.99$. 因为 $X \sim N(170, 6^2)$，故

$$P\{X<h\}=F(h)=\Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) \geqslant 0.99,$$

查表得
$$\Phi(2.33)=0.9901>0.99.$$

故取 $\frac{h-170}{6}=2.33$，即 $h=184$. 设计车门高度为不低于 184cm 时，可使成年男子与车门顶碰头的机会不超过 1%.

习题 6_3

一、单项选择题

1. 设连续型随机变量 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases} Ax, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $A=(\quad)$.

(A) 2　　(B) 1　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 0

2. 设随机变量 $X \sim N(2, 2)$，则 X 的概率密度为(　　).

(A) $f(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sqrt{2}}}\quad(-\infty<x<+\infty)$

(B) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{4}}\quad(-\infty<x<+\infty)$

(C) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}\quad(-\infty<x<+\infty)$

(D) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{4}}\quad(-\infty<x<+\infty)$

3. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$，则 $P\{X>3\}=(\quad)$.

(A) $\Phi(3)$　　(B) $1-\Phi(3)$

(C) $1-\Phi(-3)$　　(D) $\Phi(3)-1$

4. 设随机变量 $X \sim N(10, \sigma^2)$，且 $P\{10<X<20\}=0.3$，则 $P\{0<X<10\}=(\quad)$.

(A) 0.3　　(B) 0.2　　(C) 0.1　　(D) 0.5

二、填空题

1. 设 X 是连续型随机变量，则对于任意实数 a，$P\{X=a\}=$________.

2. 连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 与概率密度 $f(x)$ 之间有关系式 $F(x)=$________，对 $f(x)$ 的连续点 x，有 $f(x)=$________.

3. 设随机变量 X 服从(0，4)上的均匀分布，则 $P\{2\leqslant X\leqslant 3\}=$________.

4. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，它的概率密度 $f(x)$ 的图形的对称轴是直线________，在 $x=$________处 $f(x)$ 有最大值________.

5. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则 X 的概率密度 $\varphi(0)=$________，函数值 $\Phi(0)=$________，概率 $P\{X=0\}=$________.

三、其他类型题

1. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{A}{1+x^2}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

确定常数 A，并求 $P\{-1<X<1\}$.

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 X 的分布函数 $F(x)$；

(2) 计算 $P\left\{\frac{1}{3}\leqslant X<2\right\}$ 和 $P\{X\geqslant 4\}$.

3. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 求 X 的概率密度 $f(x)$；

(2) 计算 $P\{X<2\}$ 和 $P\{X>3\}$.

4. 某条线路的公共汽车每隔 15min 发一班车，某人来到车站的时间间隔是随机的，问此人在车站至少要等 6min 才能上车的概率是多少？

5. 设 $X\sim N(0,1)$，求：

(1) $P\{1.4<X<2.4\}$；(2) $P\{X\leqslant -1\}$；(3) $P\{|X|<1.3\}$.

6. 设 $X\sim N(3,4)$，求：

(1) $P\{2<X<5\}$；(2) $P\{|X|>2\}$；(3) 试确定 c，使 $P\{X>c\}=P\{X\leqslant c\}$.

7. 设某地区成年男性的身高(单位：cm) $X\sim N(170,7.69^2)$，在该地区随机地抽取一名成年男性，求其身高超过 175cm 的概率.

8. 某厂生产的螺栓长度 X(单位：mm)服从 $N(10.05,0.06^2)$，规定长度在(10.05±0.12)mm 范围内为合格品. 求一螺栓为不合格品的概率.

9. 一工厂生产的电子管寿命 X(单位：h)服从 $\mu=160$ 的正态分布 $N(160,\sigma^2)$，若要求 $P\{120<X\leqslant 200\}\geqslant 0.8$，允许 σ 最大不超过多少？

第四节　随机变量的函数及其分布

在分析和解决实际问题的过程中，时常会遇到由随机变量经过运算或变换而得到的某些变量——随机变量的函数，它们也是随机变量. 如车床旋出的轴的直径 X 是一个随机变量，则轴的横截面面积 $Y\left(=\frac{1}{4}\pi X^2\right)$是随机变量 X 的函数，它是一个新的随机变量. 下面我们通过实例介绍如何从已知随机变量 X 的分布导出随机变量 X 的函数的分布.

一、离散型随机变量的函数及其分布

例 13　设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-1	1	2
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

，

$Y=X-1$，$Z=X^2$. 求随机变量 Y，Z 的分布律.

解　X 的可能取值为 -1，1，2，相应地，Y 的可能取值为 -2，0，1. 因为

$$P\{Y=-2\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{4},$$

所以

Y	-2	0	1
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

，

此即随机变量 Y 的分布律.

类似地

$$P\{Z=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{3}{4},$$

$$P\{Z=4\}=P\{X=2\}=\frac{1}{4},$$

所以

Z	1	4
P	$3/4$	$1/4$

，

此即随机变量 Z 的分布律.

二、连续型随机变量的函数及其分布

例 14　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求随机变量 X 的函数 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的分布密度.

解　X 的分布密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，于是

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant y\right\}=P\{X\leqslant\sigma y+\mu\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\sigma y+\mu}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.\end{aligned}$$

令 $u=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，则

$$F_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

因此，Y 的分布密度为$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$，即 $Y\sim N(0,1)$.

例 15　设 $X\sim N(0,1)$，求随机变量 X 的函数 $Y=X^2$ 的分布密度.

解　因为 Y 只取非负值，所以，当 $y<0$ 时

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0;$$

当 $y\geqslant0$ 时

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\},$$

$$F_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

令 $u=x^2$，则

$$F_Y(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-\frac{u}{2}}\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-\frac{u}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du.$$

因此，$Y=X^2$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^y e^{-\frac{u}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du, & y\geqslant0.\end{cases}$$

从而，$Y=X^2$ 的分布密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}y^{-\frac{1}{2}}, & y\geqslant0.\end{cases}$$

第六章习题参考答案

习题 6_1

1. $(-\infty,+\infty)$；$[0,1]$. 2. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ \dfrac{1}{3}, & -3\leqslant x<1,\\ \dfrac{5}{6}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$

习题 6_2

一、1. D.　　2. C.

二、1. $a=\dfrac{2}{n(n+1)}$. 2. $a=\dfrac{1}{2}$.

3. $F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ \dfrac{1}{10}, & 3\leqslant x<4,\\ \dfrac{2}{5}, & 4\leqslant x<5,\\ 1, & x\geqslant 5.\end{cases}$

X	3	4	5
P	1/10	3/10	6/10

.

4. $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}$　$(k=1,2,3,\cdots)$.

5.

X	0	1	2	3
P	3/4	9/44	9/220	1/220

.

6. 0.9983.　　7. 0.0902.

习题 6_3

一、1. A.　2. D.　3. B.　4. A.

二、1. 0.　2. $\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$；$F'(x)$.　3. $\dfrac{1}{4}$.

4. $x=\mu$；μ；$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.　5. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$；0.5；0.

三、1. $\dfrac{1}{\pi}$；$\dfrac{1}{2}$.　2.（1）$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 2x-x^2, & 0<x<1,\\ 1, & x\geqslant 1;\end{cases}$（2）$\dfrac{4}{9}$，0.

3.（1）$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases}$（2）$1-e^{-2}$，$e^{-3}$.　4. $\dfrac{3}{5}$.

5.（1）0.0726；（2）0.1587；（3）0.8064.

6.（1）0.5328；（2）0.6977；（3）3.

7. 0.2578.　8. 0.0456.　9. $\sigma=31.25$.

第七章　二维随机变量及其分布

第六章我们讨论了一个随机变量的情形．但在实际问题中，对于某些试验的结果往往需要同时用两个或两个以上的随机变量来表示．例如，研究射击结果，弹着点就要由两个随机变量，即弹着点的横坐标和纵坐标来表示；研究飞机在空中的位置，要考虑所在的经度、纬度及距地面的高度三个量，即要用三个随机变量来表示；等等．与一个试验有关的几个随机变量之间存在着一定的联系，孤立地考虑它们是不够的，必须把它们看成一个整体，研究它们的统计规律性．本章主要讨论二维随机变量及其分布，可将其推广到 n 维随机变量的情形．

第一节　二维随机变量及其分布函数

一、二维随机变量的定义

定义 1　设 E 是一个随机试验，U 是它的样本空间，在 U 上定义两个随机变量 X 和 Y，写成向量的形式 (X, Y)，称为二维随机变量或二维随机向量．

二维随机变量 (X, Y) 中，两个随机变量 X，Y 是定义在一个样本空间上的．对应于试验的一个结果，X 和 Y 便分别取定一个实数，得到一个二维向量 (x, y)，对应 xOy 平面上的一个点．(X, Y) 所有可能取的值 (x, y) 所对应的点可能是平面上有限个点，也可能是平面上某个区域内的所有点，或者整个平面上的所有点．

二维随机变量也分成离散型和连续型两种情形．我们首先讨论它们的分布函数．

二、二维随机变量的分布函数

定义 2　设 (X, Y) 是二维随机变量，对于任意实数 x，y，定义二元函数

$$F(x, y)=P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}\ (-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty), \qquad (1)$$

称 $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数，简称为随机变量 X，Y 的分布函数．

由定义 2 可知，$F(x, y)$ 在点 (x, y) 的值，就是点 (X, Y) 落在矩形：$-\infty<X\leqslant x$，$-\infty<Y\leqslant y$（如图 7_1 中阴影部分）上的概率．

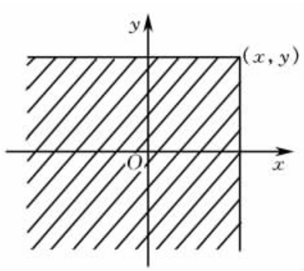


图 7_1

如果我们知道了一个二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(x, y)$，就可以求出(X, Y)落在矩形域

$$x_1 < X \leqslant x_2,\ y_1 < Y \leqslant y_2$$

上的概率

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2,\ y_1 < Y \leqslant y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

二维随机变量的分布函数$F(x, y)$具有与一维随机变量分布函数类似的性质.

性质 1　$F(x, y)$是x或y的不减函数. 即对于任意固定的y，当$x_2 > x_1$时，$F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y)$；对于任意固定的$x$，当$y_2 > y_1$时，$F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1)$.

性质 2　$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$，且对于任意固定的$y$与$x$，有

$$F(-\infty, y) = 0,\ F(x, -\infty) = 0,$$
$$F(-\infty, -\infty) = 0,\ F(+\infty, +\infty) = 1.$$

性质 3　$F(x, y)$关于x右连续，关于y也右连续，即

$$F(x+0, y) = F(x, y),$$
$$F(x, y+0) = F(x, y).$$

习题 7_1

1. 叙述二维随机变量为什么分成离散型和连续型两种情形.
2. 二维随机变量的分布函数$F(x, y)$在点(x, y)的值表示的是什么？

第二节　二维离散型随机变量及其分布

一、二维离散型随机变量的联合分布

定义 3　若二维随机变量所有可能取的值是有限对或可数无限多对，则称(X, Y)是离散型随机变量.

设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取的值为(x_i,y_j)　$(i,j=1,2,\cdots)$，而

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots),\tag{2}$$

则有

$$p_{ij}\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=1.$$

称式(2)为二维随机变量(X,Y)的联合概率分布，简称为概率分布或联合分布. (X,Y)的概率分布也可以用表7_1表示. 称其为(X,Y)的概率分布律.

表7_1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

例1　一个箱子里装有12只开关，其中2只是次品. 现从箱子中有放回地抽取两次，每次取一只. 定义随机变量X,Y如下：

$$X=\begin{cases}0, & \text{第一次取出正品},\\ 1, & \text{第一次取出次品},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}0, & \text{第二次取出正品},\\ 1, & \text{第二次取出次品},\end{cases}$$

求随机变量(X,Y)的概率分布.

解　由概率的乘法公式可得随机变量(X,Y)的概率分布为

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{10}{12}\times\frac{9}{11}=\frac{15}{22},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{10}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{5}{33},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{2}{12}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{33},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{66},$$

从而得到(X,Y)的分布律(表7_2).

表7_2

$X \backslash Y$	0	1
0	15/22	5/33
1	5/33	1/66

例2　设试验E为掷一颗骰子，观察出现的点数. 在这个试验中，规定两个随机变量X,Y如下：

$$X=\text{出现的点数},\ Y=\begin{cases}1, & \text{当出现奇数点时},\\ 2, & \text{当出现偶数点时},\end{cases}$$

求 X，Y 的联合分布律.

解　显然，X 可能取的值为 1，2，3，4，5，6，Y 可能取的值为 1，2. 二维随机变量 (X,Y) 可能取的值为 (1，1)，(2，2)，(3，1)，(4，2)，(5，1)，(6，2). 由乘法原理得

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\}=\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6}$$

或

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\}P\{X=1|Y=1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

同理可以求出 (X,Y) 落在其他各点的概率.

另外，(X,Y) 落在 (1，2)，(2，1)，(3，2)，(4，1)，(5，2)，(6，1) 各点的概率均为零. 例如，

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2\}P\{Y=1|X=2\}=\frac{1}{6}\times 0=0$$

或

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{Y=1\}P\{X=2|Y=1\}=\frac{1}{2}\times 0=0,$$

从而得到 (X,Y) 的分布律(表 7_3).

表 7_3

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	1/6	0	1/6	0	1/6	0
2	0	1/6	0	1/6	0	1/6

由二维随机变量的分布函数的定义可知，二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\sum_{\substack{x_i\leqslant x\\ y_j\leqslant y}}p_{ij}.$$

也就是说，$F(x,y)$ 在点 (x,y) 的值等于 (X,Y) 落在图 7_1 中阴影区域内各点的概率之和.

二、二维随机变量 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布

在二维随机变量 (X,Y) 中，如果我们只考虑其中的一个变量，另一个变量可以取任何它可以取的值，则得到两个一维随机变量 X 和 Y，它们的分布(包

括分布函数、分布律和概率密度)分别称为二维随机变量(X, Y)关于X和关于Y的边缘分布. 下面讨论怎样由联合分布求边缘分布.

设$F(x, y)$为二维随机变量(X, Y)的分布函数，$F_X(x)$，$F_Y(y)$分别表示(X, Y)关于X和Y的边缘分布函数，则

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x, Y<+\infty\}=F(x, +\infty),$$

即

$$F_X(x)=F(x, +\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x, y). \tag{3}$$

同理

$$F_Y(y)=F(+\infty, y)=\lim_{x\to+\infty}F(x, y). \tag{4}$$

对于二维离散型随机变量(X, Y)，设联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i, j=1, 2, \cdots),$$

则

$$\begin{aligned}P\{X=x_i\}&=P\{X=x_i, Y<+\infty\}\\&=P\{X=x_i, \bigcup_{j=1}^{+\infty}(Y=y_j)\}\\&=P\{\bigcup_{j=1}^{+\infty}(X=x_i, Y=y_j)\}.\end{aligned}$$

由于事件$\{X=x_i, Y=y_j\}(i, j=1, 2, \cdots)$是互不相容的，所以

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i, Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}.$$

记

$$\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{i\cdot} \quad (i=1, 2, 3, \cdots),$$

于是(X, Y)关于X的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot} \quad (i=1, 2, 3, \cdots). \tag{5}$$

同理可得(X, Y)关于Y的边缘分布律为

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j} \quad (j=1, 2, 3, \cdots). \tag{6}$$

其中

$$p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}.$$

例 3 设试验E为掷一颗骰子，观察出现的点数. 在这个试验中，规定两个维随机变量X，Y如下：

$$X=\text{出现的点数}, Y=\begin{cases}1, & \text{当出现奇数点时},\\2, & \text{当出现偶数点时},\end{cases}$$

求二维随机变量(X, Y)关于X和Y的边缘分布律.

解 $P\{X=i\}=p_{i\cdot}=\dfrac{1}{6} \quad (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$,

$$P\{Y=j\}=p_{\cdot j}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\quad (j=1,2).$$

例 4　一袋中有6张纸条，每张纸条上标有自然数 1，2，…，9 中的一个数字，今从袋中任取 1 张纸条，观察其上的数字. 定义两个随机变量 X，Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, & \text{取出的数是奇数}, \\ 1, & \text{取出的数是偶数},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}0, & \text{取出的数能被 3 整除}, \\ 1, & \text{取出的数不能被 3 整除},\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

解　二维随机变量(X,Y)可以取的值为$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$及$(1,1)$. 由乘法原理得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\}=\frac{5}{9}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{9},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1|X=0\}=\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{9},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0|X=1\}=\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{9}.$$

或者根据 1，2，…，9 中：3，9 是奇数，又能被 3 整除；1，5，7 是奇数，不能被 3 整除；6 是偶数，能被 3 整除；2，4，8 是偶数，不能被 3 整除，从而求出(X,Y)的联合分布律.

由(X,Y)的联合分布律可求出 X，Y 的边缘分布律如下：

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{5}{9},$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{9}+\frac{3}{9}=\frac{4}{9},$$

同理可得

$$P\{Y=0\}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9},\ P\{Y=1\}=\frac{3}{9}+\frac{3}{9}=\frac{6}{9}.$$

下面把(X,Y)的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律列在表 7_4 中.

表 7_4

Y \ X	0	1	Y 的边缘分布
0	2/9	1/9	3/9
1	3/9	3/9	6/9
X 的边缘分布	5/9	4/9	1

习题 7_2

1. 一口袋中装有三个球，它们依次标有数字 1，2，2. 从这个袋中任取一球后，不返回袋中，再从袋中任取一球. 设每次取球时，袋中各球被取到的可能性相同. 以 X，Y 分别记第一次、第二次取得的球上标有的数字，求(X, Y)的联合分布律.

2. 设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律如表 7_5.

表 7_5

$X \backslash Y$	0	1	Y 的边缘分布
0	1/12	0	3/12
3/2	2/12	1/12	1/12
2	3/12	1/12	0

求关于 X 及关于 Y 的边缘分布律.

3. 二维随机变量(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x, y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}y(1-\mathrm{e}^{-x}), & x>0，0\leqslant y<2, \\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0，y\geqslant 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求边缘分布函数 $F_X(x)$及 $F_Y(y)$.

第三节　二维连续型随机变量及其分布

一、二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度

定义 4　对于二维随机变量(X, Y)的分布函数 $F(x, y)$，如果存在非负函数 $f(x, y)$，使对于任意实数 x，y 有

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称(X, Y)为连续型二维随机变量，称 $f(x, y)$为二维随机变量(X, Y)的联合概率密度或 X，Y 的概率密度.

由定义 4 可知，$f(x, y)$具有以下性质.

性质 4　$f(x, y)\geqslant 0$.

性质 5　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

性质 6　若 $f(x, y)$在点(x, y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y).$$

性质 7　设 D 是 xOy 平面上的一个区域，则 (X,Y) 落在 D 内的概率等于联合概率密度在 D 内的二重积分，即

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7}$$

从几何上看，$z=f(x,y)$ 是空间一曲面，由性质 4 可知，它全部位于 xOy 平面的上方. 由性质 5 可知，介于曲面 $z=f(x,y)$ 与 xOy 平面之间的空间区域的体积为 1. 性质 7 指出，点 (X,Y) 落在区域 D 内的概率等于以 D 为底、以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

例 5　设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} K\mathrm{e}^{-(2x+3y)}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 K；(2) 求 (X,Y) 的分布函数；(3) 求 $P\{X>Y\}$.

解　(1) 根据性质 5 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} K\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$$

而

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} K\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty} K\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y=\frac{K}{6},$$

于是

$$\frac{K}{6}=1,\ K=6.$$

(2) 据分布函数的定义及性质 7 可知，当 $x>0$，$y>0$ 时

$$\begin{aligned} F(x,y)&=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &=\int_0^x 6\mathrm{e}^{-2u}\mathrm{d}u\int_0^y \mathrm{e}^{-3v}\mathrm{d}v=(\mathrm{e}^{-2x}-1)(\mathrm{e}^{-3y}-1). \end{aligned}$$

于是

$$F(x,y)=\begin{cases} (\mathrm{e}^{-2x}-1)(\mathrm{e}^{-3y}-1), & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) 如图 7_2 中阴影部分，即 $x>y$，且 $f(x,y)\neq 0$ 的区域为 D，所以

$$\begin{aligned} P\{X>Y\}&=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^x 6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}y \\ &=\int_0^{+\infty} 6\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{-3y}\mathrm{d}y=\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

例 6　设 D 是平面上的有界区域，其面积为 S. 若二维随机变量 (X,Y) 具

有概率密度

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x, y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{8}$$

则称(X, Y)在 D 上服从均匀分布.

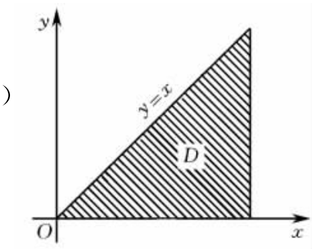


图 7_2

设区域 $D_1\subset D$，D_1 的面积为 A，则

$$P\{(X, Y)\in D_1\}=\iint\limits_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\frac{1}{S}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{A}{S}.$$

例 7 二维随机变量中最常用的是正态分布，其概率密度为

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$(-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty), \tag{9}$$

其中，μ_1，μ_2，σ_1，σ_2 及 ρ 均为常数，并且 $\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$.

特别地，当 $\mu_1=\mu_2=0$，$\sigma_1+\sigma_2=1$，$\rho=0$ 时

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\quad(-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty).$$

二维正态分布的概率密度的图形如图 7_3 所示. 当 $\mu_1=\mu_2=0$ 时，图形如图 7_4 所示.

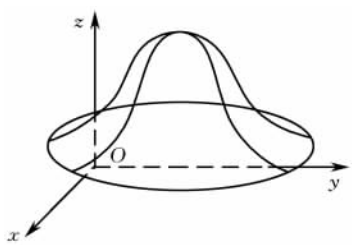


图 7_3

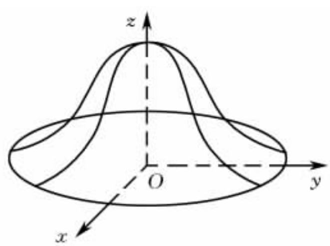


图 7_4

二、二维连续型随机变量的边缘分布

定义 5 若二维连续型随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)$，则 X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x, +\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\ (-\infty<x<+\infty),$$

$$F_Y(y)=F(+\infty, y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\ (-\infty<y<+\infty).$$

根据连续型随机变量的定义，可知 X **和** Y **也是连续型随机变量，并且**(X, Y)**关于** X **和** Y **的边缘概率密度分别为**

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}y\ (-\infty<x<+\infty), \tag{10}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}x\ (-\infty<x<+\infty), \tag{11}$$

简称为边缘分布.

例 8　**设二维随机变量**(X, Y)**在由**$x=0$，$y=0$ **及** $x+y=1$ **围成的区域** D **上服从均匀分布（如图** 7_5），**求**（X，Y）**关于** X **和** Y **的边缘概率密度.**

解　**已知**(X, Y)**在** D **上服从均匀分布，而区域** D **的面积为** 0.5，**所以**(X, Y)**的联合概率密度为**

$$f(x, y)=\begin{cases}2, & (x, y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

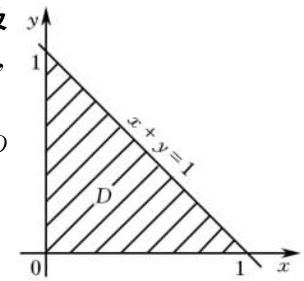


图 7_5

根据式(10)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}y\ (-\infty<x<+\infty),$$

对于小于 0 **和大于** 1 **的每个确定的** x，**有**

$$f(x, y)=0\ (-\infty<y<+\infty),$$

于是

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}y=0;$$

对于大于 0 **和小于** 1 **的每个确定的** x，**有**

$$f(x, y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ 2, & 0<y<1-x,\\ 0, & y\geqslant 1-x,\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}y+\int_{0}^{1-x}2\mathrm{d}y+\int_{1-x}^{+\infty}0\mathrm{d}y\\&=\int_{0}^{1-x}2\mathrm{d}y=2(1-x).\end{aligned}$$

综上得

$$f_X(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & x\leqslant 0\ \text{或}\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

同理可得

$$f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & y\leqslant 0 \text{ 或 } y\geqslant 1.\end{cases}$$

习题 7_3

1. 设二维随机变量(X, Y)的联合分布密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) D 为 xOy 平面内由不等式 $x<1$，$y<3$ 所确定的区域；

(2) D 为 xOy 平面内由不等式 $x+y<3$ 所确定的区域.

试分别求 $P\{(X, Y)\in D\}$.

2. 设(X, Y)服从区域 $D(y=x^2$ 及 $y=x$ 所围的区域$)$上的均匀分布，求联合概率密度和边缘概率密度.

第四节　随机变量的独立性及二维随机变量函数的分布

一、随机变量的相互独立性

第二章讨论了事件的独立性，本节将由事件的独立性引出随机变量的独立性概念.

定义 6　设(X, Y)是二维随机变量，若对于任意的 x，y 有

$$P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}, \tag{12}$$

则称 X，Y 是相互独立的.

下面给出与随机变量相互独立的条件(12)等价的几个等式. 由分布函数的定义可知，式(12)即对任意的 x，y 有

$$F(x, y)=F_X(x)F_Y(y), \tag{13}$$

其中，$F(x, y)$，$F_X(x)$和 $F_Y(y)$分别为(X, Y)，X 和 Y 的分布函数. 即随机变量 X，Y 相互独立的充分必要条件是联合分布函数等于边缘分布函数的乘积.

对于离散型随机变量(X, Y)，条件(12)等价于对任意一组可能取的值(x_i, y_j)有

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}. \tag{14}$$

即对离散型随机变量(X, Y)来说，X，Y 相互独立的充分必要条件是联合分布律等于边缘分布律的乘积.

对于连续型随机变量(X, Y)，条件(12)等价于对一切 x，y 有

$$f(x, y)=f_X(x)f_Y(y). \tag{15}$$

其中，$f(x, y)$，$f_X(x)$和 $f_Y(y)$分别为(X, Y)，X 和 Y 的概率密度. 即对连续型随机变量(X, Y)来说，X，Y 相互独立的充分必要条件是联合密度等于边缘密度的乘积.

另外，若随机变量 X，Y 相互独立，则对任意实数 a，b，c，d，$a<b$，$c<d$，事件$\{a<X<b\}$与$\{c<Y<d\}$都相互独立；若随机变量 X，Y 相互独立，则 $aX+b$，$cY+d$ 相互独立(a，b，c，d 是常数)，X^2 与 Y^2 也相互独立.

例 9　例 2 中两个随机变量 X，Y 是否相互独立？

解　例 3 中已经求出了(X, Y)关于 X 和 Y 的边缘分布律，其中

$$P\{X=1\}=\frac{1}{6},\ P\{Y=1\}=\frac{1}{2},$$

而

$$P\{X=1, Y=1\}=\frac{1}{6},$$

可见

$$P\{X=1, Y=1\}\neq P\{X=1\}P\{Y=1\},$$

故 X，Y 不相互独立.

例 10　设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

问 X，Y 是否相互独立？

解　根据式(10)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\ (-\infty<x<+\infty),$$

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x, y)=0$，于是，$f_X(x)=0$；当 $x>0$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}y+\int_{0}^{+\infty} xe^{-(x+y)}\mathrm{d}y=xe^{-x}.$$

综上得

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

根据式(11)

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\quad (-\infty<y<+\infty),$$

当 $y\leqslant 0$ 时，$f(x, y)=0$，于是，$f_Y(y)=0$；当 $y>0$ 时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} xe^{-(x+y)}\mathrm{d}x=e^{-y}.$$

综上得

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0. \end{cases}$$

所以对一切 x，y 有

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y),$$

故 X 与 Y 相互独立.

例 11 设随机变量 X，Y 相互独立，概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0, \end{cases}$$

求 $P\left\{0<X<\dfrac{1}{2},\ 0<Y<2\right\}$.

解 由已知，X，Y 相互独立，事件 $P\left\{0<X<\dfrac{1}{2}\right\}$ 与事件 $P\{0<Y<2\}$ 相互独立，从而

$$P\left\{0<X<\frac{1}{2},\ 0<Y<2\right\}=P\left\{0<X<\frac{1}{2}\right\}P\{0<Y<2\}$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}1\mathrm{d}x\int_0^2 e^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(1-e^{-2}).$$

另外，也可以先求出 X，Y 的联合密度

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

于是

$$P\left\{0<X<\frac{1}{2},\ 0<Y<2\right\}=\iint\limits_{\substack{0<x<\frac{1}{2} \\ 0<y<2}} e^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2 e^{-y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}(1-e^{-2}).$$

二、二维随机变量函数的分布举例

设(X,Y)是二维随机变量，$z=f(x,\ y)$是二元函数．若当(X,Y)取值(x,y)时，随机变量 Z 取 $Z=f(x,\ y)$，则称 Z 是 X，Y 的函数，记作 $z=f(x,\ y)$，它是一维随机变量．若已知 X，Y 的联合分布，如何求 Z 的分布？我们举例说明如下.

例 12 设 X 与 Y 相互独立，并且 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，证明 $X+Y$ 服从 $P(\lambda_1+\lambda_2)$.

证 $X+Y$ 是一维随机变量，可能取的值为 $0,1,2,3,\cdots$，并且对任意正整数 k，

$$
\begin{aligned}
P\{X+Y=k\} &= \sum_{i=0}^{k} P\{X=i, Y=k-i\} \\
&= \sum_{i=0}^{k} P\{X=i\}P\{Y=k-i\} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \mathrm{e}^{-\lambda_1}}{i!} \frac{\lambda_2^{k-i}\mathrm{e}^{-\lambda_2}}{(k-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} \\
&= \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^k,
\end{aligned}
$$

所以，$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

例 13　设二维随机变量(X, Y)的概率密度为 $f(x, y)$，求$Z=X+Y$ 的概率密度.

解　先求 Z 的分布函数

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\} \\
&= \iint\limits_{x+y<z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ (-\infty<z<+\infty).
\end{aligned}
$$

化成二次积分，得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x}f(x, y)\mathrm{d}y.$$

将上式两端对 z 求导$\left(\text{假设}\int_{-\infty}^{z-x}f(x, y)\mathrm{d}y\text{ 对 } z \text{ 求导与对 } x \text{ 积分可以交换次序}\right)$，得到 Z 的概率密度为

$$
\begin{aligned}
f_Z(z)=F'_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x}f(x, y)\mathrm{d}y\right]'_z\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}f(x, z-x)\mathrm{d}x \ (-\infty<z<+\infty).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

同理可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y, y)\mathrm{d}y \ (-\infty<z<+\infty). \tag{17}$$

如果 X 与 Y 相互独立，则 $f(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$，于是

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x \ (-\infty<z<+\infty), \tag{18}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y \ (-\infty<z<+\infty). \tag{19}$$

特别地，如果 X，Y 相互独立，并且 $X\sim N(0, 1)$，$Y\sim N(0, 1)$，则 $Z=X$

$+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

令 $t=x-\frac{z}{2}$，得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \quad (-\infty<z<+\infty),$$

即 $Z\sim N(0,\ 2)$.

一般地，若随机变量 X，Y 相互独立，并且 $X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$. 可以证明 $Z=X+Y$ 仍然服从正态分布，并且$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$，这个结论还可以推广到多个随机变量的和的情形.

例 14 设随机变量 X，Y 相互独立，并且 $X\sim N(0,\ 1)$，$Y\sim N(0,\ 1)$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的概率密度.

解 先求 Z 的分布函数，由已知

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty).$$

由于 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$不能取负值，所以，当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当$z\geqslant 0$时

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z\}=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}<z}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

不等式$\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z$ 表示以原点为中心，以 z 为半径的圆域. 利用极坐标得

$$F_Z(z)=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^z\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}})\mathrm{d}\theta=1-\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}.$$

所以

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0,\end{cases}$$

将上式两边对 z 求导得

$$f_Z(z)=\begin{cases}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0,\end{cases}$$

这个分布称为参数为 1 的瑞利(Rayleigh)分布.

习题 7_4

1. (X, Y)的联合分布律见表 7_6.

表 7_6

X \ Y	-1	0	2
1/2	2/20	1/20	2/20
2	2/20	1/20	2/20
2	4/20	2/20	4/20

求证 X, Y 相互独立.

2. 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 求(X, Y)的联合密度.

3. 设 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 求 $Z = X + Y$ 的密度 $f_Z(z)$.

4. 设 X 与 Y 相互独立, 服从相同的分布 $N(0, \sigma^2)$. 求$Z = \sqrt{X + Y^2}$的密度.

第七章习题参考答案

习题 7_2

1.

Y \ X	1	2
1	0	1/3
2	1/3	1/3

.

2.

X	0	3/2	2
P	1/3	1/3	1/3

;

Y	0	-1	2
P	3/6	1/6	2/6

.

3. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0; \end{cases}$ $F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}y, & 0 \leqslant y < 2, \\ 1, & y \geqslant 2. \end{cases}$

习题 7_3

1．(1) $P\{(X, Y)\in D\}=\dfrac{3}{8}$；(2) $P\{(X, Y)\in D\}=\dfrac{5}{24}$.

2．$f(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}；\end{cases}$

$f(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

习题 7_4

1．X，Y 的边缘分布律分别为

X	1/20	1	2
P	1/4	1/4	1/4

；

Y	-1	0	2
P	2/5	1/5	2/5

.

经直接验算可知，$P_{ij}=P_i\cdot P_j\,(i=1, 2, 3)$，所以 X，Y 相互独立.

2．$f(x, y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$.

3．$f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}[z-(\mu_1+\mu_2)]^2}$.

4．$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

第八章 随机变量的数字特征

随机变量的分布律与分布密度都能较完整地描述随机变量的概率特征，但在实际问题中寻求分布律和密度函数往往是很麻烦的. 很多实际问题中并不需要也不可能确切地了解一个随机变量取值规律的全貌，只需或只能找出一些数字，更集中、更概括地反映随机变量的特征. 人们把描述随机变量特征的数字称为随机变量的数字特征.

本章主要介绍几种数字特征——数学期望、方差和相关系数.

第一节 数学期望

一、离散型随机变量的数学期望

例 1 为了检验某电子管的寿命，从一批产品中任取 10 只进行试验，其寿命是一个随机变量 X，试验结果如表 8_1 所示(表中 8000 表示寿命在 8000～9000h，其余相同).

表 8_1

X	8000 以下	8000	9000	10000	11000	12000
电子管数	0	1	1	5	3	0
频　率	0	1/10	1/10	5/10	3/10	0

那么，该厂生产的 10 只电子管的平均寿命是

$$\frac{8000\times1+9000\times1+10000\times5+11000\times3+12000\times0}{10}$$
$$=8000\times\frac{1}{10}+9000\times\frac{1}{10}+10000\times\frac{5}{10}+11000\times\frac{3}{10}+12000\times0$$
$$=10000\ (\text{h}).$$

可以看出，X 的平均值等于 X 的每一个可能取的值乘以它对应的频率，然后再相加.

如果从该厂生产的电子管中另取 10 只做试验，寿命的平均值不一定是 10000h，所以不能用 10000h 作为该厂电子管寿命的平均值. 由于在平均值计算中，频率发生了变化，因而平均值也发生了变化. 我们知道，如果抽取的数量越大，或试验的次数越多，频率愈稳定在概率附近. 因此用概率来代替频率，

所算得的平均值就能比较精确地表示电子管的平均寿命.

定义 1 设离散型随机变量 X 的概率分布律如表 8_2 所示.

表 8_2

$X=x_k$	x_1	x_2	…	x_k	…
$P\{X=x_k\}$	p_1	p_2	…	p_k	…

若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛①，则称级数的和为随机变量 X 的数学期望或均值，简称期望，记为 $E(X)$. 即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k. \tag{1}$$

例 2 甲、乙两人进行射击，所得分数是随机变量 X，Y，其分布律如表 8_3 和表 8_4 所示.

表 8_3

$X=x_k$	1	2	3
$P\{X=x_k\}$	0.4	0.1	0.5

表 8_4

$Y=y_k$	1	2	3
$P\{Y=y_k\}$	0.1	0.2	0.7

试比较甲乙两人的技术谁优.

解 比较两人射击水平，就是对其数学期望进行比较.

$$E(X)=1\times0.4+2\times0.1+3\times0.5=2.1,$$

$$E(Y)=1\times0.1+2\times0.2+3\times0.7=2.6.$$

这表明，如果进行多次射击，则甲乙两人得分的数学期望分别是 2.1 与 2.6. 因此，乙射手的技术优于甲射手的技术.

例 3 某厂长需要就该厂的产品是否需采用新的工艺进行生产作出决策. 根据有关资料表明，采用新工艺，成功率为 50%，这时可增加利润 50 万元；失败率为 50%，这时要减少利润 30 万元；如果采用旧工艺，则利润不变. 试问该厂长应作何种决策？

解 用 X 表示采用新工艺能增加利润的数值，那么 X 的分布律如表8_5 所示，采用新工艺能增加利润的数学期望为

表 8_5

$X=x_k$	−30	50
$P\{X=x_k\}$	50%	50%

$$\begin{aligned}E(X)&=50\times50\%+(-30)\times50\%\\&=10\ (\text{万元}).\end{aligned}$$

由于仍采用旧工艺的利润不变(即增加利润为零)，而采用新工艺能增加利润的数学期望为 10 万元，故应作出采用新工艺的决策.

---

① 若级数收敛，则称是绝对收敛.

二、连续型随机变量的数学期望

定义 2　设连续型随机变量 X 的分布密度为 $f(x)$，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称此积分值为随机变量 X 的数学期望或均值，记为 $E(X)$．即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

例 4　设某电子元件的寿命为一随机变量 X，其分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1000}\mathrm{e}^{-\frac{x}{1000}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求这种电子元件的平均寿命(单位：h)．

解　求电子元件的平均寿命就是求 X 的数学期望．根据式(2)有

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1000}\mathrm{e}^{-\frac{x}{1000}}\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{-\frac{x}{1000}}(x+1000)\Big|_{0}^{+\infty}=1000\ (\mathrm{h}).\end{aligned}$$

所以，该电子元件的平均寿命为 1000h．

例 5　设随机变量 X 服从$[a,b]$上的均匀分布，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $E(X)$．

解　根据式(2)有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} x\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}.$$

例 6　设随机变量 X 服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，即

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中，μ，$\sigma(\sigma>0)$为常数，求 $E(X)$．

解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由广义积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0,$$

由分布密度的性质得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1,$$

于是

$$E(X)=\mu.$$

三、随机变量函数的数学期望

随机变量的函数通常仍为随机变量. 关于随机变量函数的数学期望，我们只介绍两个重要的公式而不加以证明.

(1) 如果 X 是离散型随机变量，其分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$ ($k=1, 2, \cdots$)，则函数 $Y=f(X)$ 的数学期望 $E\{f(X)\}$ 可按下式计算：

$$E(Y)=E(f(X))=\sum_{k=1}^{+\infty} f(x_k)p_k. \tag{3}$$

(2) 如果 X 是连续型随机变量，其分布密度为 $\varphi(x)$，则函数 $Y=f(X)$ 的数学期望 $E(f(X))$ 可按下式计算：

$$E(Y)=E(f(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

例 7 已知 X 的概率分布律如表 8_6 所示，$Y=X^2+X-1$. 试求 $E(Y)$.

解 用两种方法求得.

方法一 先求出 Y 的分布律，见表 8_7，再由式(1)得

$$E(Y)=-1\times0.3+1\times0.3+5\times0.4=2.$$

表 8_6

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

表 8_7

Y	-1	1	5
P	0.3	0.3	0.4

方法二 从 X 的分布律出发，运用式(3)得

$$\begin{aligned}E(Y)=E(X^2+X-1)&=[(-1)^2+(-1)-1]\times0.1+[0^2+0-1]\times0.2+\\&\quad[1^2+1-1]\times0.3+[2^2+2-1]\times0.4\\&=-0.1-0.2+0.3+2=2.\end{aligned}$$

* 四、二维随机变量的数学期望

对于二维随机变量的数学期望，可以由一维随机变量的数学期望类似地定义. 这里不加证明地给出有关的计算公式.

(1) 设 (X, Y) 为二维离散型随机变量，它的联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}(i, j=1, 2, 3, \cdots)$，随机变量 $Z=f(X, Y)$，则

① $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i p_{i\cdot}$，$E(Y)=\sum\limits_{j=1}^{+\infty} y_j p_{\cdot j}$；

② $E(Z)=Ef(X, Y)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty} f(x_i, y_j)p_{ij}$.

这里要求上述级数都绝对收敛.

(2) 设(X, Y)为二维连续型随机变量，分布密度为$\varphi(x, y)$，$Z=f(X, Y)$，则

① $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$，

$\qquad=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_X(x)\mathrm{d}x$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} y\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$

$\qquad=\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_Y(y)\mathrm{d}y$；

② $E(Z)=Ef(X, Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

这里要求上述广义积分都绝对收敛.

例 8　已知二维随机变量(X, Y)的联合密度为

$$\varphi(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{6}, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 3, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$Z=f(X, Y)=X+Y$，试求 $E(X)$，$E(Y)$及 $E(Z)$.

解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}\int_0^3\int_0^1 x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{13}{24}$，

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}\int_0^3\int_0^1 y(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{45}{24}$，

$E(Z)=E[f(X, Y)]=E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\qquad=\int_0^3\int_0^1 (x+y)\dfrac{x+y}{6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}\int_0^3\int_0^1 (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{87}{36}$.

五、数学期望的性质

数学期望有如下的运算性质.

性质 1　设 C 是常数，则 $EC=C$.

性质 2　设 C 是常数，则 $E(CX)=C(E(X))$.

性质 3　设 X，Y 为两个随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

性质 4　设 X 与 Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

推论 1　当 k，C 为常数时，则 $E(kX+C)=kE(X)+C$.

推论 2　设 X_1，X_2，…，X_n 是随机变量，则有

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X)_1+E(X)_2+\cdots+E(X)_n.$$

证　仅对性质 2 中 X 是离散型的情形进行证明.

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k\quad(k=1,2,\cdots),$$

根据离散型随机变量的数学期望的定义有

$$E(CX)=\sum_{k=1}^{+\infty}(Cx_k)p_k=C\sum_{k=1}^{+\infty}x_kp_k=CE(X).$$

例 9　设随机变量 $X\sim B(n,p)$，求 $E(X)$.

解　将随机变量 X 看作 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数. 由于 n 重伯努利试验中第 i 次试验结果也是随机变量，记为 X_i，显然 X_i 服从 0_1 分布，即

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{在第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 出现,}\\ 0, & \text{在第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 不出现}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

从而，n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数 X 与 X_1，X_2，…，X_n 的关系是

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

而 $E(X)_i=p(i=1,2,\cdots,n)$，由推论 2 知

$$\begin{aligned}E(X)&=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)\\&=np.\end{aligned}$$

例 10　一机场送客车送 n 个旅客到 m 个车站下车. 假设每个旅客在各个车站下车是等可能的，如到达某一车站时，没有旅客下车则不停车. 以 X 表示停车次数，求 $E(X)$.

解　设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{在第 } i \text{ 个车站有旅客下车,}\\ 0, & \text{在第 } i \text{ 个车站没有旅客下车}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m)$，

则

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_m.$$

X_i 的分布律见表 8_8，所以

$$E(X)=0\times\left(\frac{m-1}{m}\right)^n+1\times\left[1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^n\right]=1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^n.$$

表 8_8

X_i	0	1

P	$\left(\frac{m-1}{m}\right)^n$	$1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^n$

由 X_i 的相互独立性，得

$$E(X)=\sum_{i=1}^{m} E(X)_i=m\left[1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^n\right].$$

当直接求某个随机变量的数学期望有困难或计算甚繁时，一个较有效的方法是把它分解成若干易于求数学期望的随机变量(例如服从两点分布的随机变量)的和，从而可以方便地求出随机变量的数学期望.

习题 8_1

1. 已知一批产品经检验分为优等品、一、二、三等品及等外品共 5 种. 其构成比例依次是 0.2，0.5，0.15，0.1，0.05，按优质优价的市场规律，每类产品的售价分别为 9 元、7.1 元、5.4 元、3 元、2 元. 试求这批产品的平均售价.

2. 设甲乙两人在同样条件下进行射击，他们各自的命中环数是随机变量，分别记为 X_1 和 X_2，其分布律见表 8_9 和表 8_10. 试比较哪一位射手技术好？

表 8_9

X_1	8	9	10
P	0.3	0.1	0.6

表 8_10

X_2	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

3. 已知离散型随机变量 X 的分布律为见表 8_11，求 $E(X)^2$，$E(-2X+1)$.

表 8_11

X	-1	0	2	4
P	1/8	1/4	3/8	1/4

4. 设在规定的时间内，某电器设备用于最大负荷的时间X(单位：min) 是一个随机变量，其分布密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1500^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1500, \\ -\dfrac{1}{1500^2}(x-3000), & 1500<x\leqslant 3000, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求最大负荷的平均时间.

5. 已知某种电子元件的寿命 X 是一个服从指数分布的随机变量，其分布密度为

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

若 $\lambda=0.0005$(单位：h)，求这类电子元件寿命的均值.

6. 已知连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases} \quad Y=e^{\frac{2X}{3}}.$$

试求 $E(Y)$.

7. 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作. 若一周的五个工作日里无故障，可获得利润 10 万元；发生一次故障时可获得利润 5 万元；发生两次故障则无利润；发生三次或三次以上故障，就要亏损 2 万元. 求一周利润的数学期望是多少.

＊8. 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光，电梯于每个整点的 5min，25min 和 55min 从底层开动. 假设一游客在早上 8 点的第 Xmin 到达底层电梯处，且 X 在[0，60]上服从均匀分布，求该游客等候时间的数学期望.

＊9. 已知随机变量 X 与 Y 的联合概率密度函数为$f(x,y)$，试求$E(XY)$.

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0<x<+\infty,\ 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

＊10. 根据统计资料，一位 40 岁的健康人在十年内仍活着的概率为 $p(0<p<1$，p 为已知)，在十年内死亡的概率为 $1-p$. 保险公司开办十年人寿保险，参加者需交保险费 a 元(a 为已知). 如果十年之内死亡，公司赔偿 b 元($b>a$). 求：(1)如何确定 b 才能使公司可期望获益？(2)如果有 m 人参加公司保险，公司可期望收益多少？

第二节　方　　差

一、方差的概念

数学期望固然重要，但是它只体现了随机变量取值的平均水平. 为了能够对随机变量的变化情况作出进一步的描述，我们还需要了解随机变量对其数学期望的分散程度. 先看下面的例子.

例 11　已知射手甲命中环数 X 的分布律和射手乙命中环数 Y 的分布律见表 8_12 和表 8_13. 试据此对射手甲、乙作出比较.

表 8_12

X	5	7	9
P	0.175	0.6	0.225

表 8_13

Y	6	7	8
P	0.2	0.5	0.3

解　计算可得它们的数学期望(平均命中率)是相同的，即

$$E(X)=E(Y)=7.1.$$

如果在竞技比赛中，无评判细则可循，那么据此可断言他们有相同的射击水平而并列于同一名次．但是应该指出，甲、乙两射手射击水平的差异确实是存在的．从分布律可以看到甲的命中环数分散，显得不很稳定，相比之下乙要稳定些．为此，为了描述这样的差异性而引入另一种数字特征——方差．

定义 3　设 X 是随机变量，若 $E(X-E(X))^2$ 存在，则称它为随机变量 X 的方差，记为 $D(X)$．即

$$D(X)=E(X-E(X))^2, \tag{5}$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差或均方差，记为 σX．即

$$\sigma X=\sqrt{D(X)}. \tag{6}$$

例 11 中，由定义可得

$$\begin{aligned}D(X)&=E(X-E(X))^2=(5-7.1)^2\times0.175+(7-7.1)^2\times0.6+(9-7.1)^2\times0.225\\&=1.59,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(Y)&=E(Y-E(Y))^2=(6-7.1)^2\times0.2+(7-7.1)^2\times0.5+(8-7.1)^2\times0.3\\&=0.49.\end{aligned}$$

计算表明，较大方差对应着随机变量的取值与它的数学期望有较大偏离，即随机变量取值比较分散．反之，则表示随机变量的取值比较集中．据此可判断乙射手射击水平较稳定．因此，方差是衡量随机变量取值集中或分散程度的数字特征．

均方差要说明的问题，原则上与方差是一致的．所不同的是：方差毋需开方，在统计分析中常被采用；标准差与随机变量有相同的量纲，在工程技术中广为使用．

二、方差的计算

从定义上看，方差实际上也是随机变量函数的数学期望，因而方差的计算可由数学期望的公式得到．

如果 X 是离散型随机变量，其分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$ $(k=1,2,\cdots)$，可得

$$D(X)=E(X-E(X))^2=\sum_{i=1}^{+\infty}(x_k-E(X))^2p_k. \tag{7}$$

如果 X 是连续型随机变量，分布密度为 $f(x)$，可得

$$D(X)=E(X-E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

由于 $E(X)$ 为常数，所以

$$D(X)=E(X-E(X))^2=E[X^2-2X\cdot E(X)+(E(X))^2]$$

$$=E(X)^2-2E(X)\cdot E(X)+(E(X))^2$$
$$=E(X)^2-(E(X))^2.$$

因此，计算方差常用公式

$$D(X)=E(X)^2-(E(X))^2. \tag{9}$$

例 12 设随机变量 X 服从 0_1 分布，求 $D(X)$.

解 可以用两种方法求 $D(X)$.

方法一

由式(7)求 $D(X)$.

随机变量 X 的分布律如表 8_14.

表 8_14

X	0	1
P	q	p

$$E(X)=0\times q+1\times p=p \quad (p+q=1),$$
$$D(X)=E(X-E(X))^2=E(X-p)^2=(0-p)^2\times q+(1-p)^2\times p$$
$$=pq(p+q)=pq.$$

方法二

由式(9)求 $D(X)$.

$$E(X)^2=0^2\times q+1^2\times p=p,\ (E(X))^2=p^2,$$

由式(9)得

$$D(X)=E(X)^2-(E(X))^2=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

例 13 设随机变量 X 的分布密度为 $f(x)$，求 $D(X)$.

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}0\mathrm{d}x=0,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-0)^2f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}0\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$

例 14 设随机变量 X 服从$[a,b]$上的均匀分布，分布密度为 $f(x)$，求 $D(X)$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解 由第一节已算得

$$E(X)=\frac{a+b}{2},$$

$$E(X)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^3}{3(b-a)}\bigg|_a^b=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2).$$

所以

$$D(X)=E(X)^2-(E(X))^2=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

例 15　设随机变量 X 服从正态分布，即 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $D(X)$.

解　因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以有 $E(X)=\mu$.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\sigma^2.$$

为查阅方便，现将几个常用的随机变量的数学期望和方差列于表 8_15.

表 8_15

分布名称	分布律或分布密度	均值	方差
0_1 分布	$P\{x=1\}=p$，$P\{x=0\}=q$ $p+q=1$，$0<p<1$	p	q
二项分布 $B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^kp^kq^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$；$p+q=1$，$0<p<1$	np	npq
泊松分布 $P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$	λ	λ
均匀分布 $U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\sigma>0,-\infty<\mu<+\infty$	μ	σ^2

三、方差的性质

性质 5　设 C 是常数，则 $DC=0$.

性质 6　设 C 是常数，则 $D(CX)=C^2D(X)$.

性质 7　设随机变量 X，Y 相互独立，则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

推论 3　设 k，C 是常数，则 $D(kX+C)=k^2D(X)$.

推论 4　设随机变量 X_1，X_2，…，X_n 相互独立，则有

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n).$$

例 16　设随机变量 $X\sim B(n,\ p)$，求 $D(X)$.

解　根据本章例 9 得

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

其中，X_i 服从 0_1 分布，且 X_1，X_2，…，X_n 相互独立. 由于

$$E(X)_i=p,\ E(X)_i^2=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p,$$

所以

$$D(X)_i=E(X)_i^2-(E(X)_i)^2=p-p^2=p(1-p),$$

由推论 2 得

$$\begin{aligned}D(X)&=D(X_1+X_2+\cdots+X_n)\\&=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)=np(1-p)=npq,\end{aligned}$$

其中，$q=1-p$.

例 17　已知随机变量 X 的数学期望和方差分别为 $E(X)$和 $D(X)$，求证：随机变量

$$Y=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\quad(D(X)>0)$$

的数学期望和方差分别为 $E(Y)=0$，$D(Y)=1$.

证　由于 $E(X)$和 $D(X)$都是常数，所以

$$E(Y)=E\,\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}E(X-E(X))=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}(E(X)-E(X))=0,$$

$$\begin{aligned}D(Y)&=D\,\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}=\frac{1}{D(X)}D(X-E(X))=\frac{1}{D(X)}[D(X)-D(E(X))]\\&=\frac{1}{D(X)}(D(X)-0)=1.\end{aligned}$$

设 X 为任一随机变量，则称

$$Y=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为 X 的标准化随机变量.

由例 17 知，任何标准化随机变量的数学期望都为 0，方差都为 1. 这个结论在数理统计中有着重要的应用.

习题 8_2

1. 设甲乙两射手打靶时击中的环数分别为 X_1，X_2，其分布律见表 8_16 和表 8_17，求 X_1，X_2 的方差.

表 8_16

X_1	8	9	10
P	0.3	0.1	0.6

表 8_17

X_2	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，求 $D(X)$.

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，求 $D(X)$.

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

4. 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，求 $E(X)$，$D(X)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\leqslant 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

5. 从含有 5% 次品的产品中，每次抽取 1 个，然后再放回，这样连续抽取 6 次. 试求其中所含次品数的数学期望和方差.

6. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，求 $E(X)$与 $D(X)$.

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

7. 一小型客车载有 20 名旅客自出发地开出，途中有 10 个车站可以下车. 如到一车站没有旅客下车就不停车. 假如每位旅客在各车站下车是等可能的，且各旅客下车与否是相互独立的. 以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$与 $D(X)$.

8. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，服从同一分布，且 $E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，求 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的数学期望与方差.

*第三节　协方差与相关系数

对于二维随机变量(X,Y)，除了讨论随机变量的数学期望与方差外，还需要讨论随机变量 X 与 Y 之间相互关系的数字特征，即协方差与相关系数.

一、协方差

作为描述随机变量 X 与 Y 之间相互关系的数字特征，我们简要介绍协方差的概念与性质.

定义 4　对于二维随机变量(X, Y)，若

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

存在，则称其为X与Y的协方差，记为$\mathrm{Cov}(X, Y)$. 即

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]. \tag{10}$$

设(X, Y)为二维离散型随机变量，它的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}\quad (i, j=1, 2, 3, \cdots),$$

则

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}(x_i-E(X))(y_j-E(Y))p_{ij}. \tag{11}$$

设(X, Y)为二维连续型随机变量，分布密度为$f(x, y)$，则

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))(y-E(Y))f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{12}$$

协方差还有如下计算公式：

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y). \tag{13}$$

显然，当随机变量X与Y相互独立时，有$\mathrm{Cov}(X, Y)=0$. 此外，当$X=Y$时，有$\mathrm{Cov}(X, X)=D(X)$，这就是说随机变量X与它自身的协方差便为方差.

表 8_18

Y \ X	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

例 18　二维离散型随机变量X与Y的联合分布律见表 8_18. 求$\mathrm{Cov}(X, Y)$.

解　X, Y的边缘分布见表 8_19 和表 8_20. 于是

$E(X)=0\times0.2+1\times0.8=0.8$,

$E(Y)=0\times0.9+1\times0.1=0.1$,

$E(XY)=(0\times0)\times0.1+(0\times1)\times0.1+(1\times0)\times0.8+(1\times1)\times0=0$,

所以

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0.8\times0.1=-0.08.$$

表 8_19

X	0	1
$p_{i\cdot}$	0.2	0.8

表 8_20

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	0.9	0.1

例 19　已知二维连续型随机变量(X, Y)的分布密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{6}, & 0\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y\leqslant3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求协方差$\mathrm{Cov}(X, Y)$.

解　由本章例 8 知

$$E(X)=\frac{13}{24},\ E(Y)=\frac{45}{24},$$

又

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{6}\int_0^3\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$$

故

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1-\frac{13}{24}\times\frac{45}{24}=-\frac{9}{576}.$$

设 X，Y 为随机变量，由协方差的定义与计算公式，我们可以得到如下性质.

性质 8　设 C_1，C_2 为常数，则

$$\mathrm{Cov}(X+C_1, Y+C_2)=\mathrm{Cov}(X, Y).$$

性质 9　设 k_1，k_2 为常数，则

$$\mathrm{Cov}(k_1X, k_2Y)=k_1k_2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

性质 10　$\mathrm{Cov}(X_1+X_2, Y)=\mathrm{Cov}(X_1, Y)+\mathrm{Cov}(X_2, Y)$.

* 二、相关系数

定义 5　设二维随机变量(X, Y)中的每个分量都存在方差，则称

$$\frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\ (D(X)\neq 0, D(Y)\neq 0)$$

为随机变量 X，Y 的相关系数，记为 ρ_{XY}. 即

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}. \tag{14}$$

显然，当 X，Y 为独立的随机变量时，有 $\mathrm{Cov}(X, Y)=0$，也就有 $\rho_{XY}=0$.

注意到协方差是有量纲的，而相关系数是无量纲的，所以它在科技领域中应用很广. 事实上，相关系数就是 X，Y 分别标准化之后的协方差. X，Y 标准化之后，分别记为

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}, Y^*=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{DY}},$$

便有

$$\mathrm{Cov}(X^*, Y^*)=E(X^*Y^*)=\frac{E(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$
$$=\rho_{XY}.$$

因而相关系数也称为标准化协方差.

例 20　求例 2 中的相关系数 ρ_{XY}.

解　由例 19 知　$\mathrm{Cov}(X, Y)=-\frac{9}{576}$,

可以算得

$$D(X)=\frac{47}{576},\ D(Y)=\frac{351}{576},$$

所以相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{9}{576}}{\sqrt{\frac{47}{576}}\sqrt{\frac{351}{576}}}=-\frac{9}{\sqrt{47\times 351}}=-0.0701.$$

相关系数具有以下性质.

性质 11 设 X，Y 为任意随机变量，则有 $|\rho_{XY}|\leqslant 1$.

若 $\rho_{XY}\neq 0$，称 X 与 Y 是相关的；若 $\rho_{XY}=0$，称 X 与 Y 不相关.

性质 12 $|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是随机变量 X 与 Y 之间以概率为 1 地存在着线性关系，即存在常数 a 与 b，使得

$$P\{Y=aX+b\}=1.$$

相关系数 ρ_{XY} 的实际意义是：它刻画了 X，Y 之间线性关系的近似程度. 一般说来，它越接近于 1，X 与 Y 越近似地有线性关系.

习题 8_3

*1. 已知两随机变量 X 与 Y，$E(X)=15$，$E(Y)=20$，$E(XY)=195$，试求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与 ρ_{XY}.

*2. 已知 X_1，X_2 的联合分布律与边缘分布律，见表 8_21. 求随机变量 X 与 Y 的协方差及相关系数.

表 8_21

X_1 \ X_2	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.1	0.1	0.25
1	0.8	0	0.8
$p_{\cdot j}$	0.9	0.1	1

*3. 设二维随机变量(X,Y)的分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 与 Y 的协方差及相关系数.

*4. 设随机变量 X 与 Y 的方差为 16 和 25，相关系数为 0.5，求 $D(X+Y)$.

*5. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2<1,\\ 0, & x^2+y^2\geqslant 1.\end{cases}$$

(1)求协方差及相关系数；(2)问 X 与 Y 是否相关？是否独立？

第四节　大数定律与中心极限定理

在引入概率概念时，我们知道频率是概率的反映，随着试验次数的增大，频率将会逐渐稳定到概率. 大数定律和中心极限定理是用极限方法考察随机变量的变化规律性. 它们是概率论及数理统计的理论基础.

一、大数定律

随机现象总是在大量重复试验中才能呈现出明显的规律性. 集中体现这个规律的是频率的稳定性. 大数定律则从理论上给出这种规律性的确切的含义. 凡是用以说明随机现象平均结果稳定性的定理统称为大数定律.

为了后面讨论的需要，首先引进一个极为重要的不等式——契比雪夫(Chebyshev)不等式.

引理(契比雪夫不等式)　设随机变量 X 有数学期望 $E(X)$及方差 $D(X)$，则对任一正数 ε，有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{15}$$

契比雪夫不等式表明，当方差 $D(X)$越小时，事件$\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}$发生的

概率越小．此时，X 落入 $E(X)$ 的小邻域 $(E(X)-\varepsilon, E(X)+\varepsilon)$ 内的可能性相当大．由此说明 X 的取值将集中在 $E(X)$ 的附近，这正是方差概念的本意．

特别地，当 $D(X)=0$ 时，则对任一正数 ε，有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=0.$$

令上式中的 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，直观上，事件 $\left\{|X-E(X)|\geqslant\frac{1}{n}\right\}$ 在 $n\to+\infty$ 时将趋于 $\{|X-E(X)|\neq 0\}$，故

$$P\{|X-E(X)|\neq 0\}=\lim_{n\to+\infty}P\left\{|X-E(X)|\geqslant\frac{1}{n}\right\}=0,$$

而

$$\{|X-E(X)|=0\}=1-P\{|X-E(X)|\neq 0\}=1,$$

即有

$$P\{X=E(X)\}=1.$$

由此可知，当方差 $D(X)=0$ 时，随机变量 X 将以概率 1 取唯一的定值 $E(X)$．这正是关于方差概率意义的讨论中所提到的事实．

契比雪夫不等式的等价形式是

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{16}$$

例 21 某批产品的次品率为0.05，试用契比雪夫不等式估计 10000 件产品中，次品数不少于 400 件而又不多于 600 件的概率．

解 设随机变量 X 表示次品数，它服从参数 $n=10000$，$p=0.05$的二项分布．从而

$$E(X)=np=10000\times 0.05=500\ (\text{件}),$$

$$D(X)=npq=10000\times 0.05\times 0.95=475\ (\text{件}),$$

$$P\{400<X<600\}=P\{|X-500|<100\}.$$

$$\varepsilon=100,\quad D(X)=475,$$

此时，由式(16)，得

$$P\{|X-500|<100\}\geqslant 1-\frac{475}{100^2}=1-0.0475=0.9525,$$

即

$$P\{400<X<600\}\geqslant 0.9525.$$

这表明次品数不少于 400 件而又不多于 600 件的概率不小于0.9525．

契比雪夫不等式借助数学期望、方差给出了事件 $\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$ 或事件 $\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}$ 的概率估计，所以它在应用和理论两方面都很有价值．大数定律的讨论将以此为工具．下面介绍两个大数定律．

定理 1(伯努利大数定律)　设事件 A 在每次伯努利试验中发生的概率为 p，记随机变量 n_A 为 n 重伯努利试验中 A 发生的次数. 则对于任一正数 ε，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{17}$$

频率靠近概率是可以直接观察到的一种客观现象，而上述定理则从理论上给了这种现象更确切的含义.

下面再介绍一个比伯努利大数定律更广泛一些的契比雪夫大数定律.

定理 2(契比雪夫大数定律)　设 X_1，X_2，…，X_n 为一列两两独立的随机变量，且它们的方差有界，即存在常数 $C>0$，使得 $D(X)_i\leqslant C(i=1,2,\cdots)$，则对任一正数 ε，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X)_i\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{18}$$

满足式(18)的随机变量序列$\{X_i\}$被称为服从大数定律. 这一结果是俄国数学家契比雪夫于 1866 年证明的. 它是关于大数定律的相当普遍的结论，许多大数定律的古典形式可视为其特例. 伯努利大数定律便是其中的一个.

大数定律提示了大量随机变量的算术平均在取极限的过程中的概率性质. 契比雪夫大数定律告诉人们：随机变量的算术平均有极大的可能性接近于它们的数学期望的平均. 由此说明，在给定条件下，随机变量的算术平均几乎是一个确定的常数. 这为在实际工作中广泛使用的算术平均法则提供了理论依据. 例如，为确定某一零件的长度，在相同条件下进行了 n 次重复测量，每次测量值不尽相同. 那么，究竟采用哪一次测量值作为长度真值的近似呢？依据契比雪夫定律，应以所有测值的平均作为零件长度真值的近似为最佳.

这两个大数定律表明，当试验次数越来越多时，频率将在相应的概率附近作微小摆动. 其确切的数学含义是：频率将以概率 1 收敛于它的概率 p. 从而以严格的数学形式表述了频率稳定于概率的事实. 这样，频率的稳定性以及由此形成的概率的统计定义有了理论上的依据.

二、中心极限定理

正态分布在随机变量的一切可能的分布中占有特别重要的地位. 实际生活中遇到的大量的随机变量都是服从正态分布的. 概率论中的中心极限定理在一定程度上解释了这种现象.

定理 3(林德贝格_勒维中心极限定理)　若 X_1，X_2，…，X_n 是相互独立且服从相同分布的随机变量，$E(X)_i=\mu$，$D(X)_i=\sigma^2>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意实数 x，

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{19}$$

这个定理的证明比较复杂，这里就不作证明了.

这个定理表明，独立同分布随机变量之和的标准化变量的极限分布仍为标准正态分布 $N(0,1)$. 这是一条强有力的定理，因为它只假设独立同分布及数学期望与方差存在，而不管原分布如何，极限分布同样都是正态分布. 一方面，它从理论上说明了正态分布的重要性，初步地说明了为什么在实际应用中会经常遇到正态分布；另一方面，它也提供了计算独立同分布随机变量和的分布的近似方法.

例 22　一射击运动员在一次射击中所得环数的概率分布见表 8_22.

表 8_22

X_i	10	9	8	7	6
P	0.5	0.3	0.1	0.05	0.05

问在 100 次射击中所得的总环数介于 900 环与 930 环之间的概率是多少？超过 950 环的概率是多少？

解　用 X_i 表示该运动员第 i 次射击所得的环数，则 $X_i(i=1,2,\cdots,100)$ 具有表 8_22 所示的同一分布并且可以认为是相互独立的. 从而

$$\mu=E(X)_i=10\times0.5+9\times0.3+8\times0.1+7\times0.05+6\times0.05=9.15,$$

$$E(X)_i^2=10^2\times0.5+9^2\times0.3+8^2\times0.1+7^2\times0.05+6^2\times0.05=84.95,$$

$$\sigma^2=D(X)_i=E(X)^2-(E(X)_i)^2=84.95-9.15^2\approx1.23.$$

因在 100 次射击中所得总环数为 $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$，所以所要求的两个概率分别是 $P\{900\leqslant X\leqslant930\}$ 和 $P\{X>950\}$，由式(19)得

$$\begin{aligned}P\{900\leqslant X\leqslant930\}&=P\left\{\frac{900-9.15\times100}{10\times\sqrt{1.23}}\leqslant\frac{X-9.15\times100}{10\times\sqrt{1.23}}\leqslant\frac{930-9.15\times100}{10\times\sqrt{1.23}}\right\}\\&=P\left\{-1.35\leqslant\frac{X-9.15\times100}{10\times\sqrt{1.23}}\leqslant1.35\right\}\\&\approx\int_{-1.35}^{1.35}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\&=\Phi(1.35)-\Phi(-1.35)\\&=2\Phi(1.35)-1=0.8230,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X>950\}&=P\left\{\frac{X-915}{10\times\sqrt{1.23}}>\frac{950-915}{10\times\sqrt{1.23}}\right\}=P\left\{\frac{X-915}{10\times\sqrt{1.23}}>3.15\right\}\\&=1-P\left\{\frac{X-915}{10\times\sqrt{1.23}}\leqslant3.15\right\}\end{aligned}$$

$$\approx 1-\Phi(3.15)$$
$$\approx 0.0008.$$

定理 4(棣莫弗_拉普拉斯中心极限定理)　设在 n 重伯努利试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率为 $p\ (0<p<1)$，n_A 表示 n 次试验中 A 出现的次数，则对任何实数 a，$b(a<b)$，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{a\leqslant\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant b\right\}=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{20}$$

由此可知，二项分布在 n 无限增大时可用正态分布来近似.

棣莫弗_拉普拉斯中心极限定理是林德贝格_勒维中心极限定理在伯努利试验场合的应用.

例 23　保险公司为了估计利润，需要计算各种概率. 若一年中某类投保者中每个人死亡的概率等于 0.005，现有这类投保者 10000 人，试求在未来一年中，在这些投保人中死亡人数不超过 70 人的概率.

解　把每位投保人看作一次试验，死亡的概率 $p=0.005$，因此可看作是 $n=10000$ 次的伯努利试验. 把在未来一年中死亡的投保人数记为随机变量 X，则 $X\sim B(10000, 0.005)$，从而

$$np=10000\times0.005=50,$$
$$\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{50\times0.995}=7.05.$$

由棣莫弗_拉普拉斯中心极限定理有

$$\begin{aligned}P\{0\leqslant X\leqslant 70\}&=P\left\{\frac{0-50}{7.05}\leqslant\frac{X-50}{7.05}\leqslant\frac{70-50}{7.05}\right\}\\&=P\left\{-7.09\leqslant\frac{X-50}{7.05}\leqslant 2.84\right\}\\&\approx\Phi(2.84)-\Phi(-7.09)\\&=\Phi(2.84)+\Phi(7.09)-1\\&=0.997.\end{aligned}$$

习题 8_4

1. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，试利用契比雪夫不等式，估计概率 $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}$.

2. 在每次试验中，事件 A 发生的概率等于 0.5，利用契比雪夫不等式估计，在 1000 次独立试验中事件 A 发生的次数在 400 至 600 次之间的概率.

3. 设电站供电网有 10000 盏电灯，夜间每一盏灯开灯的概率都是 0.7，而假定开、关时间彼此独立，试估计同时开着的灯数在 6800 与 7200 之间的概率.

4. 据统计，某地区男婴的出生率为 $\frac{22}{43}$，现有 7000 名产妇，试估计该地区

可能有多少男婴出生.

5. 已知相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 都在区间 $[-1, 1]$ 上服从均匀分布. 试求这些随机变量总和的绝对值不超过 10 的概率.

6. 某工厂有 150 台机床，开工率为 0.85，每台机床在 1 个工作日内正常耗电 10kW·h. 假定每台机床开工与否是相互独立的，试问供电部门至少供应多少电力，才能以 95% 的概率确保不因供电不足而影响生产.

7. 若每次射击目标命中的概率为 0.1，不断地对靶进行射击，求在 500 次射击中击中目标的次数在区间(49，55)内的概率.

8. 某厂产品中一等品为 20%，现从该厂产品中随机地抽出 100 个，问一等品的个数在 18 到 25 之间的概率是多少？

第八章习题参考答案

习题 8_1

1. 6.25(元).　2. 甲比乙好.　3. $\frac{45}{8}$; $-\frac{9}{4}$.

4. 1500min.　5. 2000h.　6. 3.　7. 5.216(万元).

*8. 11.67(min).　*9. 1.

*10. (1) $a<b<\frac{a}{1-p}$; (2) $ma-mb(1-p)$.

习题 8_2

1. 0.2; 0.6.　2. $\frac{1}{6}$.　3. 2.　4. 2; $\frac{4}{3}$.

5. 0.3; 0.285.　6. 1; $\frac{1}{6}$.　7. 9(次); 1.068. 8. $\mu, \frac{\sigma^2}{n}$.

习题 8_3

*1. −105.　*2. −0.08; $\frac{2}{3}$.　*3. −0.046; −0.245.

*4. 61.　*5. (1)0, 0; (2)不相关，不独立.

习题 8_4

1. $\frac{1}{9}$.　2. 0.975.　3. 0.95.　4. 3581.　5. 0.9164.

6. 135.　7. 0.323.　8. 0.394.

附表 1　　泊松分布表

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

k	λ					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.904 837	0.818 732	0.740 818	0.670 320	0.606 531	0.548 812
1	0.090 484	0.163 746	0.222 245	0.268 128	0.303 265	0.329 287
2	0.004 524	0.016 375	0.033 337	0.053 626	0.075 816	0.098 786
3	0.000 151	0.001 092	0.003 334	0.007 150	0.012 636	0.019 757
4	0.000 004	0.000 055	0.000 250	0.000 715	0.001 580	0.002 964
5		0.000 002	0.000 015	0.000 057	0.000 158	0.000 358
6			0.000 001	0.000 004	0.000 013	0.000 036
7					0.000 001	0.000 003

k	λ					
	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0
0	0.496 585	0.449 329	0.406 570	0.367 879	0.223 130	0.135 335
1	0.347 610	0.359 463	0.365 913	0.367 879	0.334 695	0.270 671
2	0.121 663	0.143 785	0.164 661	0.183 940	0.251 021	0.270 671
3	0.028 388	0.038 344	0.049 398	0.061 313	0.125 510	0.180 447
4	0.004 968	0.007 669	0.011 115	0.015 328	0.047 067	0.090 224
5	0.000 696	0.001 227	0.002 001	0.003 066	0.014 120	0.036 089
6	0.000 081	0.000 164	0.000 300	0.000 511	0.003 530	0.012 030
7	0.000 008	0.000 019	0.000 390	0.000 073	0.000 756	0.003 437
8	0.000 001	0.000 002	0.000 004	0.000 009	0.000 142	0.000 859
9				0.000 001	0.000 024	0.000 191
10					0.000 004	0.000 038
11						0.000 007
12						0.000 001

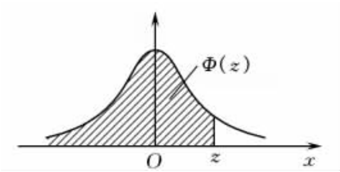
续附表 1

k	λ					
	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.082 085	0.049 787	0.030 197	0.018 316	0.011 109	0.006 733
1	0.205 212	0.149 361	0.105 691	0.073 263	0.049 990	0.033 690
2	0.256 516	0.224 042	0.184 959	0.146 525	0.112 479	0.084 224
3	0.213 763	0.224 042	0.215 785	0.195 367	0.168 718	0.140 374
4	0.133 602	0.168 031	0.188 812	0.195 367	0.189 808	0.175 467
5	0.066 801	0.100 819	0.132 169	0.156 293	0.170 827	0.175 467
6	0.027 834	0.050 409	0.077 098	0.104 196	0.128 120	0.146 223
7	0.009 941	0.021 604	0.038 549	0.059 540	0.082 363	0.104 445
8	0.003 106	0.008 102	0.016 865	0.029 770	0.046 329	0.065 278
9	0.000 863	0.002 701	0.006 559	0.013 231	0.023 165	0.036 266
10	0.000 216	0.000 810	0.002 296	0.005 292	0.010 424	0.018 133
11	0.000 049	0.000 221	0.000 730	0.001 925	0.004 264	0.008 242
12	0.000 010	0.000 055	0.000 213	0.000 642	0.001 599	0.003 434
13	0.000 002	0.000 013	0.000 057	0.000 197	0.000 554	0.001 321
14		0.000 003	0.000 014	0.000 056	0.000 178	0.000 472
15		0.000 001	0.000 003	0.000 015	0.000 053	0.000 157
16			0.000 001	0.000 004	0.000 015	0.000 049
17				0.000 001	0.000 004	0.000 014
18					0.000 001	0.000 004
19						0.000 001

续附表 1

k	λ				
	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.002 479	0.000 912	0.000 335	0.000 123	0.000 045
1	0.014 873	0.006 383	0.002 684	0.001 111	0.000 454
2	0.044 618	0.022 341	0.010 735	0.004 998	0.002 270
3	0.089 235	0.052 129	0.028 626	0.014 994	0.007 567
4	0.133 853	0.091 226	0.057 252	0.033 737	0.018 917
5	0.160 623	0.127 717	0.091 604	0.060 727	0.037 833
6	0.160 623	0.149 003	0.122 138	0.091 090	0.063 055
7	0.137 677	0.149 003	0.139 587	0.117 116	0.090 079
8	0.103 258	0.130 377	0.139 587	0.131 756	0.112 599
9	0.068 838	0.101 405	0.124 077	0.131 756	0.125 110
10	0.041 303	0.070 983	0.099 262	0.118 580	0.125 110
11	0.022 529	0.045 171	0.072 190	0.097 020	0.113 736
12	0.011 264	0.026 350	0.048 127	0.072 756	0.094 780
13	0.005 199	0.014 188	0.029 616	0.050 376	0.072 908
14	0.002 228	0.007 094	0.016 924	0.032 384	0.052 077
15	0.000 891	0.003 311	0.009 026	0.019 431	0.034 718
16	0.000 334	0.001 448	0.004 513	0.010 930	0.021 699
17	0.000 118	0.000 596	0.002 124	0.005 786	0.012 764
18	0.000 039	0.000 232	0.000 944	0.002 893	0.007 091
19	0.000 012	0.000 085	0.000 397	0.001 370	0.003 732
20	0.000 004	0.000 030	0.000 159	0.000 617	0.001 886
21	0.000 001	0.000 010	0.000 061	0.000 264	0.000 889
22		0.000 003	0.000 022	0.000 108	0.000 404
23		0.000 001	0.000 008	0.000 042	0.000 176
24			0.000 003	0.000 016	0.000 073
25			0.000 001	0.000 006	0.000 029
26				0.000 002	0.000 011
27				0.000 001	0.000 004
28					0.000 001
29					0.000 001

附表 2　　标准正态分布函数表



$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)\,du$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 6	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 3	0.773 4	0.776 4	0.779 4	0.782 3	0.785 2
0.8	0.788 1	0.791 0	0.793 9	0.796 7	0.799 5	0.802 3	0.805 1	0.807 8	0.810 6	0.813 3
0.9	0.815 9	0.818 6	0.821 2	0.823 8	0.826 4	0.828 9	0.831 5	0.834 0	0.836 5	0.838 9
1.0	0.841 3	0.843 8	0.846 1	0.848 5	0.850 8	0.853 1	0.855 4	0.857 7	0.859 9	0.862 1
1.1	0.864 3	0.866 5	0.868 6	0.870 8	0.872 9	0.874 9	0.877 0	0.879 0	0.881 0	0.883 0
1.2	0.884 9	0.886 9	0.888 8	0.890 7	0.892 5	0.894 4	0.896 2	0.898 0	0.899 7	0.901 5
1.3	0.903 2	0.904 9	0.906 6	0.908 2	0.909 9	0.911 5	0.913 1	0.914 7	0.916 2	0.917 7
1.4	0.919 2	0.920 7	0.922 2	0.923 6	0.925 1	0.926 5	0.927 8	0.929 2	0.930 6	0.931 9
1.5	0.933 2	0.934 5	0.935 7	0.937 0	0.938 2	0.939 4	0.940 6	0.941 8	0.943 0	0.944 1
1.6	0.945 2	0.946 3	0.947 4	0.948 4	0.949 5	0.950 5	0.951 5	0.952 5	0.953 5	0.954 5
1.7	0.955 4	0.956 4	0.957 3	0.958 2	0.959 1	0.959 9	0.960 8	0.961 6	0.962 5	0.963 3
1.8	0.964 1	0.964 8	0.965 6	0.966 4	0.967 1	0.967 8	0.968 6	0.969 3	0.970 0	0.970 6
1.9	0.971 3	0.971 9	0.972 6	0.973 2	0.973 8	0.974 4	0.975 0	0.975 6	0.976 2	0.976 7
2.0	0.977 2	0.977 8	0.978 3	0.978 8	0.979 3	0.979 8	0.980 3	0.980 8	0.981 2	0.981 7
2.1	0.982 1	0.982 6	0.983 0	0.983 4	0.983 8	0.984 2	0.984 6	0.985 0	0.985 4	0.985 7
2.2	0.986 1	0.986 4	0.986 8	0.987 1	0.987 4	0.987 8	0.988 1	0.988 4	0.988 7	0.989 0
2.3	0.989 3	0.989 6	0.989 8	0.990 1	0.990 4	0.990 6	0.990 9	0.991 1	0.991 3	0.991 6
2.4	0.991 8	0.992 0	0.992 2	0.992 5	0.992 7	0.992 9	0.993 1	0.993 2	0.993 4	0.993 6
2.5	0.993 8	0.994 0	0.994 1	0.994 3	0.994 5	0.994 6	0.994 8	0.994 9	0.995 1	0.995 2
2.6	0.995 3	0.995 5	0.995 6	0.995 7	0.995 9	0.996 0	0.996 1	0.996 2	0.996 3	0.996 4
2.7	0.996 5	0.996 6	0.996 7	0.996 8	0.996 9	0.997 0	0.997 1	0.997 2	0.997 3	0.997 4
2.8	0.997 4	0.997 5	0.997 6	0.997 7	0.997 7	0.997 8	0.997 9	0.997 9	0.998 0	0.998 1
2.9	0.998 1	0.998 2	0.998 2	0.998 3	0.998 4	0.998 4	0.998 5	0.998 5	0.998 6	0.998 6
3.0	0.998 7	0.998 7	0.998 7	0.998 8	0.998 8	0.998 9	0.998 9	0.998 9	0.999 0	0.999 0
3.2	0.999 3	0.999 3	0.999 4	0.999 4	0.999 4	0.999 4	0.999 4	0.999 5	0.999 5	0.999 5
3.4	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 8
3.6	0.999 8	0.999 8	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9
3.8	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9	0.999 9

$\Phi(4.0)=0.999\,968\,329$	$\Phi(5.0)=0.999\,999\,713\,3$	$\Phi(6.0)=0.999\,999\,999$